Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 3: Σχέσεις (Α)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Διατεταγμένα ζεύγη, καρτεσιανό γινόμενο, και ο ορισμός μιας σχέσης
- Αντίστροφη σχέση και σύνθεση σχέσεων
- Ιδιότητες σχέσεων: αυτοπάθεια, συμμετρικότητα, μεταβατικότητα, αντισυμμετρικότητα – με αποδείξεις

Ποιες μέρες «μοιάζουν»;

Σε έναν μήνα με 31 ημέρες, η 3η μοιάζει περισσότερο με την 24η παρά με τη 15η. Γιατί;

Και οι δύο πέφτουν **ίδια μέρα της εβδομάδας** (η διαφορά τους, $24 - 3 = 21$, είναι πολλαπλάσιο του 7). Αυτό ορίζει έναν τρόπο να **συσχετίζουμε** ζεύγη ημερών: $a \sim b \iff 7 \mid (a - b)$.

Χωρίζει όλες τις ημέρες σε **ομάδες** (Δευτέρες, Τρίτες, ...) – κάθε ημέρα ανήκει σε ακριβώς μία ομάδα.

Σήμερα θα τυποποιήσουμε αυτή την ιδέα: τι είναι μια **σχέση** και ποιες ιδιότητες μπορεί να έχει. Την επόμενη φορά θα δούμε πώς μας οδηγεί σε έννοιες όπως η **ισοδυναμία** και η **διάταξη**.

Διατεταγμένα Ζεύγη

Ορισμός: Διατεταγμένο Ζεύγος

Ένα **διατεταγμένο ζεύγος** (a, b) αποτελείται από μια **πρώτη συντεταγμένη** a και μια **δεύτερη συντεταγμένη** b. Δύο διατεταγμένα ζεύγη είναι ίσα αν οι επιμέρους συντεταγμένες είναι ίσες:

$$(a, b) = (\gamma, \delta) \iff a = \gamma \text{ και } b = \delta.$$

Παρατήρηση:

Αυτό είναι **διαφορετικό** από το ζεύγος (σύνολο) $\{a, b\}$! Θυμηθείτε: $\{a, b\} = \{b, a\}$ πάντα, αλλά $(a, b) \neq (b, a)$ εκτός αν $a = b$.

Καρτεσιανό Γινόμενο (υπενθύμιση)

Ορισμός: Καρτεσιανό Γινόμενο

$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ και } b \in B\}$.

Γενικά $A \times B \neq B \times A$ (η σειρά έχει σημασία!). Το $A \times A$ είναι το σύνολο **όλων** των διατεταγμένων ζευγών με συντεταγμένες από το A.

Παράδειγμα:

$A = \{1, 2\}$: $\quad A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Τι είναι μια Σχέση;

Ορισμός: Διμελής Σχέση

Μια **διμελής σχέση** ανάμεσα σε δύο σύνολα X, Y είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq X \times Y$.
Αν $(x, y) \in R$ γράφουμε $x\, R\, y$.
Μια **σχέση στο σύνολο** A είναι μια σχέση με $R \subseteq A \times A$.

Παράδειγμα:

Η γνωστή μας $<$ είναι μια σχέση στο $\mathbb{R}$: $\quad < = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$.

Η $\equiv_3$ είναι μια σχέση στο $\mathbb{Z}$: $\quad \equiv_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3 \mid (x - y)\}$.

Πεδίο Ορισμού & Πεδίο Τιμών

Ορισμός:

Για μια σχέση R στο A:

- **Πεδίο ορισμού**: $\{x \,:\, \text{υπάρχει } y \text{ με } x\,R\,y\}$.
- **Πεδίο τιμών**: $\{y \,:\, \text{υπάρχει } x \text{ με } x\,R\,y\}$.

Παράδειγμα:

Στο $A = \{1, 2, 3, 4\}$, έστω R η σχέση «διαιρεί»: $x\,R\,y \iff x \mid y$.

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}.$$

Πεδίο ορισμού $= \{1, 2, 3, 4\}$, πεδίο τιμών $= \{1, 2, 3, 4\}$ (εδώ συμπίπτουν, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντα!).

Αντίστροφη Σχέση

Ορισμός: Αντίστροφη σχέση

Η **αντίστροφη** μιας σχέσης $R \subseteq X \times Y$ είναι η σχέση

$$R^{-1} = \{(y, x) \,:\, (x, y) \in R\} \subseteq Y \times X.$$

Παράδειγμα:

Στο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ με $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$:

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Το πεδίο ορισμού της R^{-1} είναι το πεδίο τιμών της R, και αντίστροφα.

Σύνθεση Σχέσεων

Ορισμός: Σύνθεση

Για σχέσεις $R \subseteq X \times Y$ και $S \subseteq Y \times Z$, η **σύνθεσή** τους είναι

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \,:\, \text{υπάρχει } y \in Y \text{ με } (x, y) \in R \text{ και } (y, z) \in S\}.$$

Παράδειγμα:

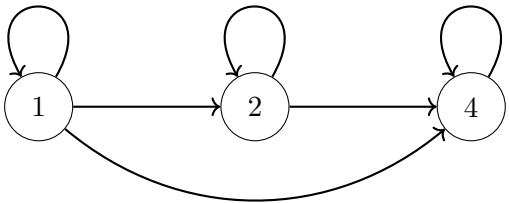
$X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{p, q\}$, $R = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$, $S = \{(a, p), (b, q)\}$.

Το 1 φτάνει στο a (μέσω R), και το a φτάνει στο p (μέσω S) – άρα $(1, p) \in S \circ R$.
Παρόμοια, $(2, p), (2, q) \in S \circ R$.

$$S \circ R = \{(1, p), (2, p), (2, q)\}.$$

Αναπαριστώντας μια Σχέση: Κατευθυνόμενο Γράφημα

Στο $A = \{1, 2, 4\}$ με τη σχέση «διαιρεί» ($x \mid y$):



Βρόχος σε κάθε κορυφή $\Rightarrow$ κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του. **Δεν** υπάρχουν αντίστροφα βέλη (π.χ. $1 \to 2$ αλλά όχι $2 \to 1$). Το απευθείας βέλος $1 \to 4$ υπάρχει επειδή υπάρχουν και τα $1 \to 2$, $2 \to 4$.

Αυτές οι τρεις παρατηρήσεις είναι ακριβώς οι τρεις (από τις τέσσερις) ιδιότητες που θα ορίσουμε τώρα!

Αυτοπαθής (Reflexive)

Ορισμός: Αυτοπαθής Σχέση

Η R στο A είναι **αυτοπαθής** αν $a \, R \, a$ για **κάθε** $a \in A$.

Αυτοπαθείς:

- $\leq$ στο $\mathbb{R}$ ($a \leq a$ πάντα)
- «διαιρεί» στο $\mathbb{Z}_+$ ($a \mid a$ πάντα)
- «απέχουν ≤ 3» ($|a - a| = 0 \leq 3$)

Μη αυτοπαθείς:

- $<$ στο $\mathbb{R}$ ($a \not< a$)
- «αθροίζουν στο 0» (μόνο $0 + 0 = 0$)
- η σχέση ακμών γραφήματος (χωρίς βρόχους)

Στο κατευθυνόμενο γράφημα: αυτοπαθής $\iff$ κάθε κορυφή έχει βρόχο.

Συμμετρική (Symmetric)

Ορισμός: Συμμετρική Σχέση

Η R στο A είναι **συμμετρική** αν: $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$, για κάθε $a, b \in A$.

Συμμετρικές:

- «απέχουν ≤ 3»
- «αθροίζουν στο 0»
- ακμές μη κατευθυνόμενου γραφήματος

Μη συμμετρικές:

- $\leq$ ($3 \leq 4$ αλλά $4 \not\leq 3$)
- «διαιρεί» ($2 \mid 6$ αλλά $6 \nmid 2$)

Στο κατευθυνόμενο γράφημα: συμμετρική $\iff$ κάθε βέλος έχει και το «ανάποδό» του.

Απόδειξη: R Συμμετρική $\iff$ $R = R^{-1}$

Πρόταση:

Μια σχέση R στο A είναι συμμετρική αν και μόνο αν $R = R^{-1}$.

($\Rightarrow$) Έστω R συμμετρική. Αν $(a, b) \in R$, τότε (συμμετρία) $(b, a) \in R$, άρα $(a, b) \in R^{-1}$ (από τον ορισμό της αντίστροφης). Άρα $R \subseteq R^{-1}$. Αντίστροφα, αν $(a, b) \in R^{-1}$ τότε $(b, a) \in R$, οπότε (συμμετρία) $(a, b) \in R$· άρα $R^{-1} \subseteq R$. Συνεπώς $R = R^{-1}$.

($\Leftarrow$) Έστω $R = R^{-1}$. Αν $(a, b) \in R$, τότε $(a, b) \in R^{-1}$, δηλαδή (από τον ορισμό της αντίστροφης) $(b, a) \in R$. Άρα η R είναι συμμετρική. ■

Μεταβατική (Transitive)

Ορισμός: Μεταβατική Σχέση

Η R στο A είναι **μεταβατική** αν: $a\,R\,b$ και $b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$, για κάθε $a, b, c \in A$.

Μεταβατικές:

- $\leq$
- «διαιρεί»

Μη μεταβατικές:

- «απέχουν ≤ 3»: $1, 3, 5$ – $|1-3| \leq 3, |3-5| \leq 3$ αλλά $|1-5| = 4$.
- «αθροίζουν στο 0»: $5, -5, 5$ – $5 + (-5) = 0, (-5) + 5 = 0$ αλλά $5 + 5 \neq 0$.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα: μεταβατική $\iff$ κάθε «διαδρομή δύο βημάτων» έχει και απευθείας βέλος.

Αντισυμμετρική (Antisymmetric)

Ορισμός: Αντισυμμετρική Σχέση

Η R στο A είναι **αντισυμμετρική** αν: $a\,R\,b$ και $b\,R\,a \Rightarrow a = b$.

Π.χ. η $\leq$ είναι αντισυμμετρική ($a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$) αλλά **δεν** είναι συμμετρική.

Παρατήρηση: Προσοχή – συχνή σύγχυση!

Η αντισυμμετρική **δεν** είναι το αντίθετο της συμμετρικής! Μια σχέση μπορεί να είναι **ούτε** συμμετρική **ούτε** αντισυμμετρική.

Στο κατευθυνόμενο γράφημα: αντισυμμετρική $\iff$ κανένα βέλος που δεν είναι βρόχος δεν έχει το «ανάποδό» του.

Απόδειξη: Συμμετρική + Αντισυμμετρική

Πρόταση:

Αν η R στο A είναι **και** συμμετρική **και** αντισυμμετρική, τότε $R \subseteq \{(a, a) : a \in A\}$ (δηλαδή R είναι υποσύνολο της ισότητας).

Απόδειξη. Έστω $(a, b) \in R$. Από συμμετρία, $(b, a) \in R$. Τώρα έχουμε $a\, R\, b$ **και** $b\, R\, a$· από αντισυμμετρία, $a = b$. Άρα κάθε ζεύγος του R είναι της μορφής (a, a). ■

Αυτό εξηγεί γιατί οι δύο ιδιότητες σπάνια συνυπάρχουν εκτός από την ισότητα (ή υποσύνολά της).

Άσκηση: Ελέγξτε τις Ιδιότητες

Στο $A = \{1, 2, 3, 4\}$, έστω $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3)\}$.

Αυτοπαθής; Ναι – όλα τα (a, a) υπάρχουν.

Συμμετρική; Όχι – $(2,3) \in R$ αλλά $(3,2) \notin R$.

Μεταβατική; Όχι – $(1,2), (2,3) \in R$ αλλά $(1,3) \notin R$.

Αντισυμμετρική; Όχι – $(1,2), (2,1) \in R$ αλλά $1 \neq 2$.

Άσκηση για την Τάξη

Στο σύνολο $A = \{a, b, c, d\}$ θεωρήστε τη σχέση

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c)\}.$$

Ελέγξτε αν η R είναι αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική, και/ή αντισυμμετρική.

Είναι **σχέση ισοδυναμίας**; Είναι **μερική διάταξη**; *(Θα ορίσουμε τυπικά αυτούς τους όρους στην επόμενη διάλεξη – δοκιμάστε με ό,τι ξέρετε ήδη!)*

Υπόδειξη: ελέγξτε πρώτα τις τέσσερις βασικές ιδιότητες μία-μία, συστηματικά.

Σύνοψη

- Σχέση $R \subseteq X \times Y$ (ή $\subseteq A \times A$)· αντίστροφη R^{-1}· σύνθεση $S \circ R$.
- Τέσσερις βασικές ιδιότητες: αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική, αντισυμμετρική – με τις πρώτες μας αποδείξεις: R συμμετρική $\iff R = R^{-1}$, και συμμετρική+αντισυμμετρική $\Rightarrow R \subseteq$ ισότητα.
- Οπτικοποίηση με κατευθυνόμενο γράφημα: βρόχοι = αυτοπάθεια, αμφίδρομα βέλη = συμμετρικότητα, «συντομεύσεις» = μεταβατικότητα.

Επόμενη διάλεξη: συνεχίζουμε τις Σχέσεις – σχέσεις ισοδυναμίας, κλάσεις ισοδυναμίας, διαμερίσεις, και σχέσεις διάταξης.