# Διακριτά Μαθηματικά

## Διάλεξη 2: Σύνολα (Β)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

# Περιεχόμενα Διάλεξης

- Πράξεις σε σύνολα: ένωση, τομή, συμπλήρωμα, διαφορά, συμμετρική διαφορά
- Οι νόμοι De Morgan και οι επιμεριστικοί νόμοι – με πλήρεις αποδείξεις
- Καρτεσιανό γινόμενο (και η γενίκευσή του)
- Διαγράμματα Venn ως εργαλείο απόδειξης

# Ένωση και Τομή

**Ορισμός: Ένωση**

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$.

**Ορισμός: Τομή**

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$.
Αν $A \cap B = \emptyset$, τα σύνολα $A, B$ λέγονται **ξένα μεταξύ τους**.

**Παράδειγμα:**

Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$, τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \qquad A \cap B = \{2, 3\}.$$

# Ιδιότητες της Ένωσης & της Τομής

**Ένωση**

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cup A = A$$

**Τομή**

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cap A = A$$

(ταυτοτικό στοιχείο, μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, αδυναμία – σε πλήρη αντιστοιχία με $+, \times$ στους αριθμούς, εκτός από την τελευταία!)

# Χαρακτηρισμός του Υποσυνόλου

**Τύπος:**

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A.$$

**Απόδειξη ότι** $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$**.**

($\subseteq$) Αν $x \in A \cup B$, τότε $x \in A$ ή $x \in B$. Αν $x \in A$, τότε (αφού $A \subseteq B$) $x \in B$. Σε κάθε περίπτωση $x \in B$.

($\supseteq$) Αν $x \in B$, τότε προφανώς $x \in A \cup B$.

Άρα $A \cup B = B$. ■ (οι υπόλοιπες ισοδυναμίες αποδεικνύονται παρόμοια)

# Σύμπαν και Συμπλήρωμα

## Ορισμός: Σύμπαν και Συμπλήρωμα

Το **σύμπαν** (ή καθολικό σύνολο) $\mathcal{U}$ είναι το «πλαίσιο» όλων των αντικειμένων υπό συζήτηση.
Το **συμπλήρωμα** $\overline{A}$ (ή $A'$ ή $A^c$) περιέχει όλα τα στοιχεία του $\mathcal{U}$ που **δεν** είναι στοιχεία του $A$.

## Παράδειγμα:

Έστω $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$ και $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Τότε

$$\overline{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}.$$

# Ιδιότητες του Συμπληρώματος

## Τύπος:

$$\emptyset' = \mathcal{U} \qquad \mathcal{U}' = \emptyset$$

$$(A')' = A \qquad \text{(διπλό συμπλήρωμα)}$$

$$A \cap A' = \emptyset \qquad A \cup A' = \mathcal{U}$$

## Τύπος: Αντιστροφή του υποσυνόλου

$$A \subseteq B \iff B' \subseteq A'.$$

Δηλαδή: όσο μεγαλώνει ένα σύνολο, τόσο μικραίνει το συμπλήρωμά του.

# Οι Νόμοι του De Morgan

Δύο από τις πιο σημαντικές ταυτότητες σε όλα τα Διακριτά Μαθηματικά:

**Θεώρημα: De Morgan**

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Το συμπλήρωμα μιας **ένωσης** είναι η **τομή** των συμπληρωμάτων – και αντίστροφα.

Θα τους ξαναδούμε (με ακριβώς την ίδια μορφή!) στην προτασιακή λογική, για τα $\vee$ και $\wedge$ αντί για $\cup$ και $\cap$.

# Απόδειξη του Πρώτου Νόμου De Morgan

**Ισχυρισμός:** $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

**Απόδειξη** (αλυσίδα ισοδυναμιών – εναλλακτική στον διπλό εγκλεισμό):

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\iff x \notin (A \cup B) \\ &\iff \neg(x \in A \text{ ή } x \in B) \\ &\iff (x \notin A) \text{ και } (x \notin B) \\ &\iff x \in A' \text{ και } x \in B' \\ &\iff x \in A' \cap B'. \end{aligned}$$

Αφού $x \in (A \cup B)' \iff x \in A' \cap B'$ για **κάθε** $x$, τα δύο σύνολα είναι ίσα. ■

Ο δεύτερος νόμος αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο (άσκηση).

# Διαφορά Συνόλων

**Ορισμός: Διαφορά Συνόλων**

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$

**Τύπος: Σχέση με το συμπλήρωμα**

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

**Παράδειγμα:**

Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $A \cup \{4\}$ προσθέτει το 4 και $A \setminus \{2\}$ αφαιρεί το 2, **δημιουργώντας κάθε φορά ένα νέο σύνολο**!

# Απόδειξη: $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

**Απόδειξη με διπλό εγκλεισμό.**

($\subseteq$) Έστω $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Τότε $x \in A$ και $x \notin (A \setminus B)$, δηλαδή **δεν** ισχύει «$x \in A$ και $x \notin B$». Αφού $x \in A$, το μόνο που μπορεί να μην ισχύει είναι το $x \notin B$· άρα $x \in B$. Συνεπώς $x \in A \cap B$.

($\supseteq$) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$· αφού $x \in B$, δεν ισχύει $x \in A \setminus B$. Άρα $x \in A$ και $x \notin (A \setminus B)$, δηλαδή $x \in A \setminus (A \setminus B)$.

Άρα $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. ■

Δύο ακόμη σχέσεις, ως άσκηση για το σπίτι: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, $A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C')$.

# Συμμετρική Διαφορά

**Ορισμός: Συμμετρική διαφορά**

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – τα στοιχεία που ανήκουν σε **ακριβώς ένα** από τα $A, B$.

**Παράδειγμα:**

Αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$: $\quad A \triangle B = \{1, 4\}$.

**Παρατήρηση: Ισοδύναμος τύπος**

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – «ό,τι είναι σε *κάποιο* από τα δύο, αλλά *όχι και στα δύο*».
Η $\triangle$ είναι μεταθετική και προσεταιριστική, με $A \triangle \emptyset = A$ και $A \triangle A = \emptyset$.

# Μεγάλο Παράδειγμα

Έστω $A = \{1, \dots, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{7, 8, 9\}$, $\mathcal{U} = \{1, \dots, 10\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $B \cap C$
4. $A \cap D$
5. $\overline{B \cup C}$
6. $A \setminus B$
7. $B \triangle C$

1. $\{1, \dots, 6\} = A$
2. $\{2, 4, 6\} = B$
3. $\{2\}$
4. $\emptyset$
5. $\{5, 7, 8, 9, 10\}$
6. $\{1, 3, 5\}$
7. $\{1, 3, 4, 6\}$

# Επιμεριστικοί Νόμοι

## Θεώρημα: Επιμερισμός

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## Παρατήρηση:

Θυμίζει την επιμεριστική ιδιότητα $a \cdot (b + c) = ab + ac$ στους αριθμούς – αλλά **εδώ ισχύει και προς τις δύο κατευθύνσεις**! (Στους αριθμούς, η πρόσθεση *δεν* επιμερίζεται στον πολλαπλασιασμό.)

# Απόδειξη του Πρώτου Επιμεριστικού Νόμου

**Ισχυρισμός:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

**Απόδειξη** (αλυσίδα ισοδυναμιών):

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ και } x \in (B \cup C) \\ &\iff x \in A \text{ και } (x \in B \text{ ή } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ και } x \in B) \text{ ή } (x \in A \text{ και } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \text{ ή } x \in (A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Το κρίσιμο βήμα (3η $\iff$) είναι η επιμεριστική ιδιότητα του «και» πάνω στο «ή» – θα την ξαναδούμε ως ταυτολογία στην προτασιακή λογική.

# Καρτεσιανό Γινόμενο

**Ορισμός: Καρτεσιανό Γινόμενο**

$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$ – το σύνολο όλων των **διατεταγμένων ζευγών**.

**Παράδειγμα:**

Έστω $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Τότε

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

Πόσα στοιχεία έχει το $B \times B$; $|B \times B| = |B| \cdot |B| = 9$.

# Γενικευμένο Καρτεσιανό Γινόμενο

Η ιδέα επεκτείνεται σε παραπάνω από δύο σύνολα:

**Ορισμός:**

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ για κάθε } i\}$ – το σύνολο όλων των **διατεταγμένων $n$-άδων**.

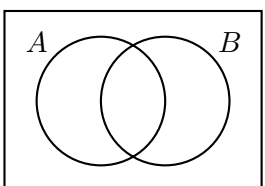
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

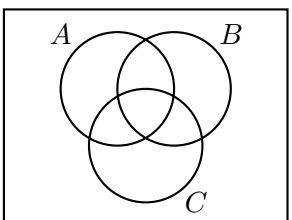
**Παρατήρηση:**

Ειδική περίπτωση: $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ ($n$ φορές). Π.χ. το $\{0,1\}^n$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών bit μήκους $n$ – ξαναβρίσκουμε το $|\{0,1\}^n| = 2^n$ που είδαμε με το δυναμοσύνολο!

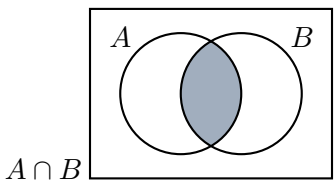
# Διαγράμματα Venn

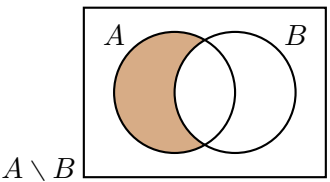
Ένα **διάγραμμα Venn** αναπαριστά σύνολα ως τεμνόμενους κύκλους μέσα σε ένα ορθογώνιο (το σύμπαν) – ένα οπτικό εργαλείο, αλλά και άτυπη τεχνική απόδειξης για λίγα σύνολα.



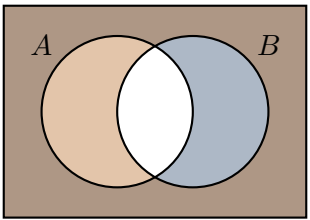
# Παράδειγμα: $A \cap B$ και $A \setminus B$



# Οπτική επαλήθευση: Νόμοι του De Morgan

Χρωματίζουμε $A'$ μπλε και $B'$ πορτοκαλί (κάθε χρώμα ζωγραφίζει «ό,τι μένει έξω» από τον αντίστοιχο κύκλο):



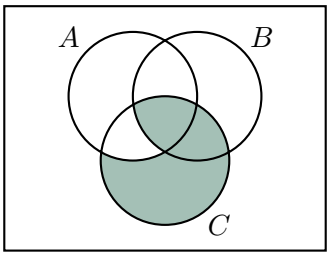

Η περιοχή **μόνο** μπλε $= B \setminus A \subseteq A'$, η μόνο πορτοκαλί $= A \setminus B \subseteq B'$.

Η **διπλά σκιασμένη** (πιο σκούρα) περιοχή είναι μέσα στο $A'$ **και** στο $B'$: είναι το $A' \cap B'$ – και είναι **ακριβώς** η περιοχή έξω από τα δύο κυκλάκια μαζί, δηλαδή το $(A \cup B)'$.

Άρα $(A \cup B)' = A' \cap B'$ – επιβεβαιώνουμε οπτικά τον πρώτο νόμο του De Morgan (που ήδη αποδείξαμε αλγεβρικά)!

# Ένα πιο Σύνθετο Παράδειγμα

Ποια περιοχή αναπαριστά το $(B \cap C) \cup (C \cap \overline{A})$;




**Παρατήρηση:**

Η ίδια σκιασμένη περιοχή περιγράφεται και από $C \cap \overline{(A \cap C) \cap \overline{B}}$ – δύο διαφορετικές εκφράσεις, **ίδιο σύνολο**! Επιβεβαιώνεται με τους επιμεριστικούς νόμους και το De Morgan.

# Άσκηση για την Τάξη

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε (με διπλό εγκλεισμό ή αλυσίδα ισοδυναμιών) ότι

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ για οποιαδήποτε σύνολα $A, B$.

# Σύνοψη

- Πράξεις: $\cup, \cap, \setminus, \overline{(\cdot)}, \triangle, \times$ – με ιδιότητες: ταυτοτικό στοιχείο, μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα.
- Νόμοι De Morgan και επιμεριστικοί νόμοι – **αποδεδειγμένοι** με δύο τεχνικές: διπλό εγκλεισμό, αλυσίδα ισοδυναμιών.
- Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ και η γενίκευσή του $A_1 \times \cdots \times A_n$.
- Διαγράμματα Venn: οπτικό εργαλείο *και* τεχνική απόδειξης.

**Επόμενη διάλεξη:** Σχέσεις – πώς συγκρίνουμε ή συσχετίζουμε στοιχεία ενός ή δύο συνόλων μεταξύ τους.

**Για το φροντιστήριο (Εβδ. 2):** ασκήσεις σε σύνολα και σχέσεις (βλ. Φροντιστήριο 1).