Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 1: Σύνολα (Α)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Τι είναι τα Διακριτά Μαθηματικά;
- Σύνολα: βασική έννοια και συμβολισμός
- Ειδικά σύνολα, συμβολισμός δόμησης συνόλου, και το Παράδοξο του Russell
- Υποσύνολο και οι ιδιότητές του· πρώτη απόδειξη με διπλό εγκλεισμό
- Δυναμοσύνολο και πληθικότητα

Καλωσορίσατε!

Πρόβλημα προθέρμανσης. Ο πιο δημοφιλής μαθηματικός στον κόσμο διοργανώνει πάρτι για όλους τους φίλους του. Αν οι 10 παρευρισκόμενοι χαιρετηθούν με χειραψία ο καθένας με κάθε άλλον ακριβώς μία φορά, πόσες χειραψίες έγιναν συνολικά;

Δεν χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα σήμερα· θα το ξαναδούμε σύντομα.

Προς το παρόν, σκεφτείτε: *ποια αντικείμενα εμπλέκονται;* Άνθρωποι; Ζευγάρια ανθρώπων;

Θα χρειαστούμε μια γλώσσα για να μιλάμε με ακρίβεια για **συλλογές αντικειμένων**. Αυτή είναι η γλώσσα των **συνόλων**.

Τι είναι τα Διακριτά Μαθηματικά;

δια·κρι·τός: Επίθετο. Ξεχωριστός και διακεκριμένος.

Στον Απειροστικό Λογισμό μελετάμε σύνολα σαν το $\mathbb{R}$ ή το $[0, \infty)$: **συνεχή**· ανάμεσα σε δύο στοιχεία υπάρχουν πάντα άπειρα ακόμη.

Τα Διακριτά Μαθηματικά μελετούν αντικείμενα που είναι **ξεχωριστά και διακριτά**: π.χ. $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$· ο αριθμός παιδιών ενός ανθρώπου δεν μπορεί να είναι $1{,}32419$.

Θα μελετήσουμε δομές όπως σύνολα, σχέσεις, συναρτήσεις, ακολουθίες, γραφήματα: εργαλεία για τη μοντελοποίηση προβλημάτων με «απαριθμήσιμα», διακριτά συστατικά.

Η έννοια του συνόλου

Ορισμός: Σύνολο

Ένα **σύνολο** είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή αντικειμένων. Τα αντικείμενα λέγονται **στοιχεία** (ή μέλη) του συνόλου.

Δύο σύνολα είναι **ίσα** ακριβώς όταν περιέχουν τα ίδια στοιχεία· ένα σύνολο καθορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του.

Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά ούτε οι επαναλήψεις:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}.$$

Βασικός συμβολισμός

Γράφουμε

$$A = \{1, 2, 3\}$$

και διαβάζουμε: «Το A είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία 1, 2 και 3.»

Το σύμβολο $\in$ διαβάζεται «είναι στοιχείο του»: $a \in \{a, b, c\}$.

Το σύμβολο $\notin$ σημαίνει το αντίθετο: $d \notin \{a, b, c\}$.

Παράδειγμα: Ένα «περίεργο» σύνολο

Έστω $A = \{1,\ b,\ \{x, y, z\},\ \emptyset\}$. Το A έχει **4 στοιχεία**: τον αριθμό 1, το γράμμα b, το σύνολο $\{x, y, z\}$, και το κενό σύνολο $\emptyset$.

Είναι $x \in A$; **Όχι!** Κανένα από τα 4 στοιχεία του A δεν είναι το x (το x είναι μόνο *μέσα* σε ένα από τα στοιχεία).

Ειδικά σύνολα

Σύμβολο	Περιγραφή
$\emptyset$	Το **κενό σύνολο**: δεν περιέχει κανένα στοιχείο.
$\mathbb{N}$	Οι **φυσικοί αριθμοί**: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.
$\mathbb{Z}$	Οι **ακέραιοι**: $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
$\mathbb{Q}$	Οι **ρητοί** αριθμοί.
$\mathbb{R}$	Οι **πραγματικοί** αριθμοί.
$\mathcal{P}(A)$	Το **δυναμοσύνολο** του A (θα το δούμε σήμερα).

Σημείωση: κάποιοι συγγραφείς δεν συμπεριλαμβάνουν το 0 στο $\mathbb{N}$, προσέξτε τη σύμβαση που χρησιμοποιείται.
Ένα σύνολο με ένα μόνο στοιχείο, όπως το $\{a\}$, λέγεται **μονοσύνολο**.

Συμβολισμός δόμησης συνόλου

Πώς περιγράφουμε ένα σύνολο με άπειρα (ή πολλά) στοιχεία; Π.χ. το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ είναι άρτιος}\}$$

Διαβάζεται: «το σύνολο όλων των x στο $\mathbb{N}$, **τέτοιο ώστε** το x να είναι άρτιος».

Το σύμβολο $:$ («:» ή «|») χωρίζει τα στοιχεία από τη **συνθήκη** που πρέπει να ικανοποιούν. Γενικότερα γράφουμε $\{x \,:\, \varphi(x)\}$: το a ανήκει σε αυτό το σύνολο αν και μόνο αν η ιδιότητα $\varphi(a)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα: διάβασμα συνόλων

Περιγράψτε με λόγια και απαριθμήστε μερικά στοιχεία:

1. $\{x \,:\, x+3 \in \mathbb{N}\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \,:\, x+3 \in \mathbb{N}\}$
3. $\{x \,:\, x \in \mathbb{N} \text{ ή } -x \in \mathbb{N}\}$
4. $\{x \,:\, x \in \mathbb{N} \text{ και } -x \in \mathbb{N}\}$

1. $\{-3,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$: αριθμοί που, αν προσθέσουμε 3, δίνουν φυσικό.
2. $\{0,1,2,3,\ldots\}$: εδώ το x πρέπει *ήδη* να είναι φυσικός.
3. $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$: όλοι οι ακέραιοι.
4. $\{0\}$: μόνο το 0 έχει και τον εαυτό του και τον αντίθετό του φυσικό.

Προσοχή: Το Παράδοξο του Russell

Ο συμβολισμός $\{x : \varphi(x)\}$ είναι ισχυρός, αλλά **δεν** ορίζει πάντα ένα σύνολο!

Παράδειγμα: Το «σύνολο» των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους

Έστω $\varphi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$», και θεωρήστε

$$R = \{x : x \notin x\}.$$

Ρωτάμε: ισχύει $R \in R$;

Το Παράδοξο του Russell: η αντίφαση

- **Περίπτωση 1:** Αν $R \in R$, τότε (από τον ορισμό του R, αφού το R *δεν* ικανοποιεί την φ) πρέπει $R \notin R$. **Άτοπο!**
- **Περίπτωση 2:** Αν $R \notin R$, τότε (πάλι από τον ορισμό, αφού το R ικανοποιεί την φ) πρέπει $R \in R$. **Άτοπο!**

Και οι δύο περιπτώσεις οδηγούν σε αντίφαση· άρα το R **δεν μπορεί να είναι σύνολο**. Αυτό λέγεται **Παράδοξο του Russell** (1901).

Το Παράδοξο του Russell: πώς το αποφεύγουμε

Γι' αυτό συνήθως χτίζουμε νέα σύνολα ως υποσύνολα ενός *ήδη υπάρχοντος* συνόλου A: γράφουμε

$$\{x \in A : \varphi(x)\}$$

αντί για το «προβληματικότερο», απεριόριστο $\{x : \varphi(x)\}$.

Παρατήρηση:

Αν περιορίσουμε την αναζήτηση σε ένα ήδη υπάρχον σύνολο A, το $\{x \in A : x \notin x\}$ *είναι* καλά ορισμένο σύνολο (υποσύνολο του A)· το πρόβλημα εμφανίζεται μόνο όταν αφήνουμε το «σύμπαν αναφοράς» απεριόριστο.

Υποσύνολο

Ορισμός: Υποσύνολο

Το A είναι **υποσύνολο** του B, γραμμένο $A \subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι επίσης στοιχείο του B. Αν επιπλέον $A \neq B$, τότε το A είναι **γνήσιο υποσύνολο**: $A \subset B$.

Ανάλογο με τη διαφορά ανάμεσα σε $\leq$ και $<$.

Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο **κάθε** συνόλου: $\emptyset \subseteq A$ (δεν υπάρχει στοιχείο του $\emptyset$ που να παραβιάζει τον ορισμό· ο ισχυρισμός είναι «κενά αληθής»).

Ιδιότητες της σχέσης $\subseteq$

Η σχέση $\subseteq$ συμπεριφέρεται πολύ σαν το $\leq$ στους αριθμούς:

Ανακλαστική: $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A.

Αντισυμμετρική: αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Μεταβατική: αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$.

Προσοχή: η σχέση $\in$ **δεν** έχει αυτές τις ιδιότητες με τον ίδιο τρόπο, π.χ. γενικά $A \notin A$ (ενώ πάντα $A \subseteq A$).

Απόδειξη: η Αντισυμμετρική Ιδιότητα

Πρόταση:

Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Απόδειξη. Έστω αυθαίρετο $a \in A$. Αφού $A \subseteq B$, έπεται $a \in B$. Άρα κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B.

Αντίστροφα, έστω αυθαίρετο $b \in B$. Αφού $B \subseteq A$, έπεται $b \in A$. Άρα κάθε στοιχείο του B είναι στοιχείο του A.

Τα A, B έχουν λοιπόν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, άρα $A = B$. ■

Παρατήρηση: Η μέθοδος του «διπλού εγκλεισμού»

Αυτή η απόδειξη είναι το πρότυπο για **κάθε** απόδειξη ισότητας συνόλων: δείχνουμε ξεχωριστά $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Θα το χρησιμοποιούμε συνέχεια.

Παράδειγμα: αληθές, ψευδές, ή χωρίς νόημα;

Έστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3\}$.

1. $A \subset B$
2. $B \subset A$
3. $B \in C$
4. $\emptyset \in A$
5. $\emptyset \subset A$
6. $3 \in C$
7. $3 \subset C$
8. $\{3\} \subset C$

1. **Ψευδές** ($1 \in A$, $1 \notin B$)
2. **Αληθές**
3. **Ψευδές** (C έχει αριθμούς, όχι σύνολα)
4. **Ψευδές** (A έχει 6 αριθμούς)
5. **Αληθές** ($\emptyset$ υποσύνολο όλων)
6. **Αληθές**
7. **Χωρίς νόημα** (3 δεν είναι σύνολο)
8. **Αληθές** ($\{3\} \subseteq C$)

Δυναμοσύνολο

Ορισμός: Δυναμοσύνολο

Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο **όλων** των υποσυνόλων του A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \subseteq A\}.$$

Παράδειγμα:

Έστω $A = \{1, 2, 3\}$. Βρείτε το $\mathcal{P}(A)$.

Δυναμοσύνολο: μικρά (αλλά σημαντικά) παραδείγματα

Πριν χτίσουμε κάτι μεγαλύτερο, ας δούμε τις πιο απλές περιπτώσεις:

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. (Προσοχή: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$, **όχι** 0! Το $\emptyset$ έχει ένα υποσύνολο: τον εαυτό του.)

$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset,\ \{a\}\}$.

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\}$.

Παρατήρηση:

Παρατηρείτε το μοτίβο; $1, 2, 4, \ldots$, δηλαδή $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$. Θα το εξηγήσουμε αυστηρά σε λίγο.

Δυναμοσύνολο: κατασκευή βήμα-βήμα

Χτίζουμε το $\mathcal{P}(A)$ ανά μέγεθος υποσυνόλου, για $A = \{1, 2, 3\}$:

μέγεθος 0 και 1: $\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\}$

μέγεθος 2: $\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\}$

μέγεθος 3: $\{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Προσοχή: $2 \in A$ αλλά $2 \notin \mathcal{P}(A)$! Ισχύει όμως $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$.

Γιατί $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Έστω $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Για να περιγράψουμε **οποιοδήποτε** υποσύνολο $X \subseteq A$, αρκεί να αποφασίσουμε, για **κάθε** a_i, αν $a_i \in X$ ή $a_i \notin X$.

Δηλαδή κάθε υποσύνολο αντιστοιχεί σε μία ακολουθία n αποφάσεων «μέσα/έξω»· μια **ακολουθία bit** μήκους n (π.χ. 101 σημαίνει «a_1 μέσα, a_2 έξω, a_3 μέσα»).

Υπάρχουν ακριβώς 2 επιλογές (μέσα/έξω) για κάθε ένα από τα n στοιχεία, άρα συνολικά $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} = 2^n$ διαφορετικές ακολουθίες· άρα 2^n υποσύνολα.

Παρατήρηση:

Αυτό είναι ένα πρώτο δείγμα της **πολλαπλασιαστικής αρχής** απαρίθμησης, που θα διατυπώσουμε αυστηρά αργότερα στο μάθημα.

Πληθικότητα

Ορισμός: Πληθικότητα

Η **πληθικότητα** $|A|$ ενός (πεπερασμένου) συνόλου A είναι ο αριθμός των στοιχείων του.

Παράδειγμα:

$A = \{23, 24, \dots, 38\}$: $|A| = 38 - 23 + 1 = 16$.

$B = \{1, \{2, 3, 4\}, \emptyset\}$: $|B| = 3$ (τρία στοιχεία, δύο εξ αυτών είναι σύνολα!).

$C = \{1, 2, 3\}$: $|\mathcal{P}(C)| = 2^3 = 8$.

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Βρείτε δύο σύνολα A, B με $|A| = 5$, $|B| = 7$ και $|A \cup B| = 9$. Πόσο πρέπει να είναι το $|A \cap B|$;

Άσκηση 2. Έστω $A = \{1, 2, \dots, 12\}$ και $\mathcal{B}_3 = \{B \subseteq A \,:\, |B| = 3\}$. Βρείτε το $|\mathcal{B}_3|$ (δεν χρειάζεται να απαριθμήσετε· δοκιμάστε να ξεκινήσετε με την άσκηση του φροντιστηρίου που ρωτάει για το $|\mathcal{B}_3|$).

Σύνοψη

- Σύνολο: μη διατεταγμένη συλλογή στοιχείων· $\in, \notin, \subseteq, \subset$ (ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική)· και η πρώτη μας απόδειξη με **διπλό εγκλεισμό**.
- Ειδικά σύνολα: $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ και γιατί χρειαζόμαστε προσοχή με το $\{x : \varphi(x)\}$ (Παράδοξο του Russell).
- Πληθικότητα $|A|$ και γιατί $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Επόμενη διάλεξη: συνεχίζουμε τα Σύνολα: πράξεις σε σύνολα (ένωση, τομή, συμπλήρωμα, διαφορά), οι νόμοι De Morgan, διαγράμματα Venn, Καρτεσιανό γινόμενο.