Ειδικά Θέματα Διακριτών Μαθηματικών

1η Σειρά Ασκήσεων Ακ. Έτους 2025-26

Σύντομες Λύσεις

Οι παρακάτω λύσεις ενίοτε είναι πιο κοντά σε εκτεταμένες υποδείξεις παρά σε πλήρεις απαντήσεις. Δίνονται για να σας βοηθήσουν να λύσετε όσες ασκήσεις δεν μπορέσατε να ολοκληρώσετε μόνοι σας, αλλά δεν αποτελούν υπόδειγμα για το πως θα έπρεπε να γράφετε τις απαντήσεις σας. Για το τελευταίο ο καλύτερος οδηγός είναι οι λυμένες ασκήσεις που ανεβαίνουν κάθε εβδομάδα.

Άσκηση 1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις Σωστή ή Λάθος. Να δώσετε μια πολύ σύντομη δικαιολόγηση της κάθε απάντησης (2-3 γραμμές ή ένα σχήμα αρκούν).

1. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα όπου κάθε επικαλυπτικό υπογράφημά του είναι συνεκτικό και το ίδιο το γράφημα δεν είναι πλήρες.

   Λάθος. Αναγκαστικά το γράφημα είναι μια μεμονωμένη κορυφή , δηλαδή το K_1.
2. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών $\langle 5,3,3,3,3,3\rangle$.

   Σωστό. Αρκεί να τρέξει κανείς τον αλγόριθμο των Havel-Hakimi.
3. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών $\langle 5,3,3,3,3,2\rangle$.

   Λάθος. Περιττό άθροισμα βαθμών (ή τρέχουμε τον αλγόριθμο των Havel-Hakimi).
4. **Σ/Λ** Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με θετικά βάρη στις ακμές του. Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις ακμές με τον ίδιο θετικό αριθμό, δεν αλλάζουν τα ελάχιστα/βέλτιστα επικαλυπτικά δέντρα (ΒΕΔ) (δηλαδή κάθε υπογράφημα που αποτελούσε στο αρχικό γράφημα ΒΕΔ συνεχίζει να αποτελεί ΒΕΔ και στο νέο γράφημα).

   Σωστό. Το βάρος κάθε υπογραφήματος πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο θετικό αριθμό. Τα ΒΕΔ παραμένουν τα επικαλυπτικά δέντρα με το ελάχιστο βάρος.
5. **Σ/Λ** Αν προσθέσουμε σε όλες τις ακμές με τον ίδιο θετικό αριθμό, δεν αλλάζουν τα ελάχιστα/βέλτιστα επικαλυπτικά δέντρα.

   Σωστό. Αν c ο αριθμός αυτός, τότε το βάρος κάθε υπογραφήματος k ακμών αυξάνεται κατά kc. Επειδή κάθε επικαλυπτικό δέντρο έχει $|V(G)|-1$ ακμές, τα ΒΕΔ παραμένουν τα επικαλυπτικά δέντρα με το ελάχιστο βάρος.
6. **Σ/Λ** Αν όλα τα βάρη είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε το ΒΕΔ είναι μοναδικό.

   Σωστό. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ένα μοναδικό τρέξιμο του αλγορίθμου του Prim (ή του Kruskal).
7. **Σ/Λ** Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών $(5,3,3,3,3,3)$.

   Λάθος. Αρκεί να διακρίνουμε περιπτώσεις για το πόσες κορυφές περιέχει κάθε μερίδιο της διαμέρισης.
8. **Σ/Λ** Αν ένα γράφημα είναι διμερές και έχει 6 κορυφές, τότε έχει το πολύ 9 ακμές.

Σωστό. Αρκεί να διακρίνουμε περιπτώσεις για το πόσες κορυφές περιέχει κάθε μερίδιο της διαμέρισης.

9. **Σ/Λ** Κάθε άκυκλο γράφημα (δηλαδή κάθε γράφημα που δεν περιέχει κύκλους) είναι διμερές.

   Σωστό. Κάθε άκυκλο γράφημα δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους και άρα είναι διμερές.

10. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα n κορυφών, όπου κάθε κορυφή έχει διαφορετικό βαθμό.
    Σωστό. Το K_1. *[Αν και η πρόθεσή μου ήταν να κάνω την ερώτηση για $n \geq 2$, όπου η απάντηση είναι αρνητική όπως είδαμε στη διάλεξη της Τετάρτης 17/12.]*

Άσκηση 2. Έστω T ένα πλήρες τριαδικό δέντρο με ρίζα. Αν με I συμβολίσουμε το πλήθος των εσωτερικών του κορυφών και με L το πλήθος των φύλλων του, να δείξετε ότι $L = 2I + 1$.

Λύνεται ακριβώς όπως αποδεικνύεται το Θεώρημα 2.8, με τη μόνη διαφορά πως τώρα όλες οι εσωτερικές κορυφές, πλην της ρίζας, έχουν βαθμό 4, ενώ η ρίζα 3. Έτσι προκύπτει η σχέση

$$2(L + I) - 2 = 2(|V(T)| - 1) = 2|E(G)| = \sum_{v \in V(T)} d(v) = L + 4(I - 1) + 3$$

που δίνει το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Δυαδικές λέξεις ονομάζουμε τις συμβολοακολουθίες που αποτελούνται από 0 και/ή 1, π.χ. 0010 ή 111. Θεωρούμε ένα απλό γράφημα G που έχει για κορυφές του όλες τις δυαδικές λέξεις μήκους k, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, και στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές αν και μόνο αν οι αντίστοιχες λέξεις διαφέρουν ακριβώς κατά μία συντεταγμένη. Για παράδειγμα, για $k = 4$, οι κορυφές 1100 και 1000 είναι γειτονικές, ενώ οι 1100 και 1010 δεν είναι. Να δειχθεί ότι:

i. $|V(G)| = 2^k$
ii. $|E(G)| = k2^{k-1}$
iii. το G είναι διμερές.

i. Οι κορυφές είναι όσες οι δυαδικές λέξεις μήκους k, δηλαδή 2^k (2 επιλογές για κάθε μία από k διακεκριμένες θέσεις).

ii. Κάθε κορυφή έχει k γειτονικές κορυφές, μία για κάθε συντεταγμένη της αντίστοιχης λέξης που μπορούμε να αλλάξουμε. Δηλαδή το γράφημα είναι k-κανονικό. Έχουμε $|E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} k = \frac{1}{2}k2^k = k2^{k-1}$.

iii. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι κορυφές που αντιστοιχούν σε δύο δυαδικές λέξεις x, y, με $x \neq y$, που περιέχουν άρτιο (αντίστοιχα περιττό) πλήθος από 1, δεν μπορούν να είναι γειτονικές αφού διαφέρουν σε τουλάχιστον δύο συντεταγμένες. Αυτό ορίζει μία διαμέριση

$$X = \{x \mid \text{η } x \text{ είναι δυαδική λέξη μήκους } k \text{ με άρτιο πλήθος } 1\}$$

και

$$Y = \{y \mid \text{η } y \text{ είναι δυαδική λέξη μήκους } k \text{ με περιττό πλήθος } 1\}$$

που δείχνει ότι το G είναι διμερές.

Άσκηση 4. Έστω D κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς βρόχους και πολλαπλά τόξα (δηλαδή τόξα με τα ίδια άκρα και την ίδια κατεύθυνση). Να αποδειχθεί ότι το D περιέχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $\max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$.

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι P μέγιστου μήκους, έστω από την κορυφή x στην κορυφή y. Όλοι οι εσω-γείτονες της x (δηλαδή οι κορυφές που έχουν ακμή προς την x) πρέπει να ανήκουν στο P, διαφορετικά αυτό μπορεί να επεκταθεί σε ένα μονοπάτι μήκους κατά ένα μεγαλύτερο (που θα ήταν άτοπο). Άρα το P περιέχει τουλάχιστον $\delta^-(D) + 1$ κορυφές (την x και τους τουλάχιστον $\delta^-(D)$ εσω-γείτονές της), δηλαδή έχει μήκος τουλάχιστον $\delta^-(D)$. Κάνοντας το ανάλογο επιχείρημα για την y και τους εξω-γείτονές της, δείχνουμε ότι το P έχει μήκος τουλάχιστον $\delta^+(D)$. Συμπεραίνουμε ότι το P έχει μήκος τουλάχιστον $\max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$.

Άσκηση 5. Έστω G συνεκτικό γράφημα με ακτίνα $\mathrm{rad}(G) = r$, διάμετρο $\mathrm{diam}(G) = d$ και έστω k ακέραιος, τέτοιος ώστε $r \leq k \leq d$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κορυφή $u \in V(G)$, τέτοια ώστε $e(u) = k$, όπου $e(u)$ είναι η εκκεντρ(ικ)ότητα της κορυφής u.

Από τον ορισμό της διαμέτρου και της ακτίνας, υπάρχουν κορυφές x, y, τέτοιες ώστε $e(x) = r$ και $e(y) = d$. Επειδή το G είναι συνεκτικό, υπάρχει κάποιο (x, y)-μονοπάτι P. Καθώς κινούμαστε πάνω στο P, η εκκεντρότητα αυξάνεται από r σε d, αλλά σε κάθε βήμα (δηλαδή από μια κορυφή στην επόμενη της στο P) η εκκεντρότητα μπορεί μόνο να αυξηθεί κατά 1, να μείνει ίδια ή να μειωθεί κατά 1 (βλέπε Άσκηση 3.4). Αναγκαστικά, καθώς κινούμαστε πάνω στο P θα συναντήσουμε κορυφές με κάθε διαφορετική εκκεντρότητα $k \in \mathbb{Z}, r \leq k \leq d$.

Άσκηση 6. Έστω G απλό συνεκτικό 3-κανονικό γράφημα, στο οποίο υπάρχει ακμή e που αποτελεί γέφυρα του G, δηλαδή το γράφημα $G - e$ δεν είναι συνεκτικό. Να αποδειχθεί ότι $|V(G)| \geq 10$.

Αφαιρώντας την e προκύπτουν δύο συνιστώσες G_1, G_2. Η κάθε μία από αυτές έχει βαθμούς 3 εκτός από το ένα άκρο της e που τώρα έχει βαθμό 2. Η συντομότερη ακολουθία της μορφής $\langle 3,3,\ldots,3,2\rangle$ που είναι γραφική στον χώρο των απλών γραφημάτων, είναι η $\langle 3,3,3,3,2\rangle$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί απλά δοκιμάζοντας τον αλγόριθμο των Havel-Hakimi στις ακολουθίες $\langle 2\rangle$, $\langle 3,2\rangle$, $\langle 3,3,2\rangle$, $\langle 3,3,3,2\rangle$ και συμπεραίνοντας ότι κάθε ένα από τα G_1, G_2 έχει τουλάχιστον 5 κορυφές, από όπου προκύπτει το ζητούμενο.