

Ειδικά Θέματα Διακριτών Μαθηματικών

Διδάσκων: Γ. Αμανατίδης

Τελική εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2025-26

Ενδεικτικές Λύσεις

Οι αναφορές σε Θεωρήματα, Πορίσματα και Ασκήσεις είναι στις σημειώσεις του μαθήματος.

Θέμα 1.

1. **Σ/Λ** Ένας κώδικας σταθερού μήκους, οι λέξεις του οποίου ανά δύο έχουν απόσταση Hamming τουλάχιστον 26, μπορεί να διορθώσει 12 σφάλματα ανά λέξη, αλλά όχι 13.

Σωστό. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.9(β) με $d = 26$: μια λανθασμένη μετάδοση μπορεί να διορθωθεί εφόσον το πλήθος των λανθασμένων ψηφίων είναι μικρότερο του

$$\frac{d}{2} = \frac{26}{2} = 13,$$

δηλαδή εφόσον είναι το πολύ 12. Άρα ο κώδικας διορθώνει με βεβαιότητα 12 σφάλματα ανά λέξη.

Για 13 σφάλματα δεν υπάρχει τέτοια εγγύηση. Πράγματι, έστω x, y δύο κωδικές-λέξεις που απέχουν ακριβώς 26 (η υπόθεση επιτρέπει κάτι τέτοιο). Αν στείλουμε την x και αλλοιωθούν 13 από τις 26 θέσεις στις οποίες οι x και y διαφέρουν, λαμβάνουμε μια λέξη z με

$$d(x, z) = 13 \quad \text{και} \quad d(y, z) = 26 - 13 = 13.$$

Η z ισαπέχει από τις x και y , οπότε ο αποδέκτης δεν έχει τρόπο να αποφασίσει ποια από τις δύο εστάλη.

2. **Σ/Λ** Υπάρχει δέντρο 8 κορυφών, με ακολουθία βαθμών $(5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Λάθος. Κάθε δέντρο με n κορυφές έχει $n - 1$ ακμές (Θεώρημα 2.1), οπότε από το Θεώρημα 1.1 το άθροισμα των βαθμών του ισούται με $2(n - 1) = 2n - 2$. Για $n = 8$ αυτό δίνει 14, ενώ η δοσμένη ακολουθία έχει άθροισμα

$$5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 18 \neq 14.$$

(Ισοδύναμα, από την Άσκηση 2.5 η ακολουθία θα ήταν ακολουθία βαθμών δέντρου αν και μόνο αν το άθροισμά της ήταν $2n - 2 = 14$.)

3. **Σ/Λ** Κάθε άκυκλο γράφημα είναι διμερές.

Σωστό. Από το Θεώρημα 1.4, ένα γράφημα είναι διμερές εάν και μόνον εάν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους. Ένα άκυκλο γράφημα δεν περιέχει κανέναν κύκλο, άρα ειδικότερα δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους, και επομένως είναι διμερές.

4. **Σ/Λ** Αν ένα απλό γράφημα έχει ακολουθία βαθμών $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$ τότε είναι Hamiltonian.

Σωστό. Το γράφημα έχει $|V(G)| = 6 \geq 3$ κορυφές και ελάχιστο βαθμό

$$\delta(G) = 3 = \frac{6}{2} = \frac{|V(G)|}{2}.$$

Ικανοποιείται λοιπόν η συνθήκη του Θεωρήματος 5.1 (Dirac), οπότε το G είναι Hamiltonian.

5. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα 12 κορυφών, το οποίο είναι 11-κορυφών-συνεκτικό και 11-ακμών-συνεκτικό.

Σωστό. Το ζητούμενο γράφημα είναι το πλήρες γράφημα K_{12} .

Πράγματι, στο K_{12} δεν υπάρχουν δύο μη-γειτονικές κορυφές, άρα (από τον ορισμό της συνεκτικότητας-κορυφών) $k(K_{12}) = |V(K_{12})| - 1 = 11$.

Για τη συνεκτικότητα-ακμών: κάθε σύνολο-ακμών-αποκοπής είναι της μορφής $E_{K_{12}}(S, \bar{S})$ και, επειδή κάθε κορυφή του S είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $\bar{S}$, περιέχει $|S| \cdot (12 - |S|)$ ακμές. Η ποσότητα αυτή ελαχιστοποιείται για $|S| = 1$ (ή $|S| = 11$) και δίνει $\lambda(K_{12}) = 11$.

6. **Σ/Λ** Αν προσθέσουμε ένα νέο φύλλο σε ένα δυαδικό δέντρο που έχει ήδη 80 φύλλα, τότε το ύψος του δέντρου σίγουρα θα αυξηθεί.

Λάθος. Από το Θεώρημα 2.9, ένα δυαδικό δέντρο ύψους h έχει το πολύ 2^h φύλλα, οπότε (Πόρισμα 2.10) ένα δέντρο με 80 φύλλα έχει ύψος $h \geq \lceil \log_2 80 \rceil = 7$. Το ίδιο όμως ισχύει και για 81 φύλλα: $\lceil \log_2 81 \rceil = 7$. Δηλαδή ένα ύψος $h = 7$ επιτρέπει έως και $2^7 = 128$ φύλλα, άρα υπάρχει «χώρος».

7. **Σ/Λ** Υπάρχει $(43, 43, 23, 23, 10)$ -σχεδιασμός.

Λάθος. Οι παράμετροι δεν ικανοποιούν καν τις σχέσεις του Θεωρήματος 7.1. Πράγματι, θα έπρεπε

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{10 \cdot 42}{22} = \frac{420}{22} = \frac{210}{11},$$

που δεν είναι καν ακέραιος.

8. **Σ/Λ** Υπάρχει πλήρες, απλό, διμερές Eulerian γράφημα που έχει περιττό πλήθος κορυφών.

Λάθος. Έστω $K_{m,n}$ πλήρες διμερές γράφημα με διαμέριση (X, Y) , $|X| = m$, $|Y| = n$. Κάθε κορυφή του X είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του Y και αντίστροφα, δηλαδή

$$d(u) = n \text{ για κάθε } u \in X, \quad d(w) = m \text{ για κάθε } w \in Y.$$

Από το Θεώρημα 6.1, το γράφημα είναι Eulerian εάν και μόνον εάν όλοι οι βαθμοί του είναι άρτιοι. Τότε όμως το συνολικό πλήθος κορυφών $m + n$ είναι άρτιο.

9. **Σ/Λ** Το κέντρο ενός συνεκτικού γραφήματος, κάθε ακμή του οποίου έχει βάρος 1, αποτελείται από το πολύ δύο κορυφές.

Λάθος. Αυτό ισχύει για δέντρα (Θεώρημα 3.2: $C(T) \cong K_1$ ή $C(T) \cong K_2$), όχι όμως για γραφήματα γενικά.

Αντιπαράδειγμα: ο κύκλος C_n . Λόγω συμμετρίας όλες οι κορυφές του έχουν την ίδια εκκεντρικότητα $\lfloor n/2 \rfloor$, άρα $C(C_n) = V(C_n)$, δηλαδή το κέντρο έχει n κορυφές.

10. **Σ/Λ** Κάθε 5-κορυφών-συνεκτικό γράφημα με 15 κορυφές έχει τουλάχιστον 38 ακμές.

Σωστό. Από το Θεώρημα 4.1 (Whitney),

$$5 \leq k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

δηλαδή κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 5. Από το Θεώρημα 1.1,

$$2\varepsilon(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u) \geq 5 \cdot 15 = 75 \implies \varepsilon(G) \geq \frac{75}{2} = 37,5,$$

και επειδή το $\varepsilon(G)$ είναι ακέραιος, $\varepsilon(G) \geq 38$.

(Βασικά εδώ αρκεί η αναφορά στη συζήτηση πριν το Θεώρημα 4.7)

Θέμα 2. Έστω απλό γράφημα G με ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.

- a. Αν $\delta(G) \geq 2$, τότε το G περιέχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $\delta(G) + 1$. (Άσκηση 1.9)

Έστω $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ ένα μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G (υπάρχει, αφού το G είναι πεπερασμένο). Αν κάποιος γείτονας w της v_0 δεν ανήκε στο P , τότε το $w v_0 v_1 \cdots v_k$ θα ήταν μονοπάτι μήκους $k + 1$, το οποίο αντιβαίνει στη μεγιστότητα του P .

Η v_0 έχει $d_G(v_0) \geq \delta(G)$ γείτονες και όλοι τους είναι της μορφής v_i με $1 \leq i \leq k$. Έστω v_m ο γείτονας της v_0 με τον μεγαλύτερο δείκτη m . Επειδή οι (τουλάχιστον $\delta(G)$ το πλήθος) γείτονες της v_0 βρίσκονται όλοι ανάμεσα στις $v_1, v_2, \dots, v_m$, έχουμε

$$m \geq \delta(G).$$

Θεωρούμε τώρα τον κύκλο

$$C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_m v_0,$$

ο οποίος προκύπτει από το τμήμα $v_0 v_1 \cdots v_m$ του P μαζί με την ακμή $v_m v_0$. Το μήκος του είναι $m + 1 \geq \delta(G) + 1$, όπως ζητούσαμε.

- b. Αν $\delta(G) \geq 4$, τότε το G περιέχει τουλάχιστον δύο κύκλους ξένους ως προς τις ακμές.

Επειδή $\delta(G) \geq 4 \geq 2$, από το ερώτημα (a) το G περιέχει κύκλο C . Θεωρούμε το γράφημα

$$G' = G - E(C),$$

δηλαδή αφαιρούμε από το G μόνο τις ακμές του C (καμία κορυφή).

Πόσο πέφτουν οι βαθμοί; Κάθε κορυφή του κύκλου C είναι προσκείμενη σε ακριβώς 2 ακμές του C , ενώ οι υπόλοιπες κορυφές σε καμία. Άρα για κάθε $u \in V(G)$,

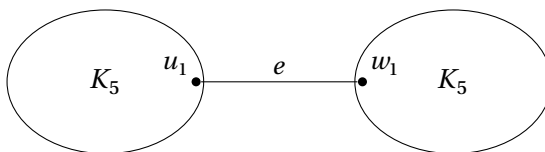
$$d_{G'}(u) \geq d_G(u) - 2 \geq 4 - 2 = 2,$$

δηλαδή $\delta(G') \geq 2$.

Εφαρμόζοντας ξανά το ερώτημα (a), αυτή τη φορά στο G' , βρίσκουμε κύκλο C' στο G' . Οι C και C' είναι ξένοι ως προς τις ακμές, αφού το G' δεν περιέχει καμία ακμή του C .

- c. Μπορεί ένα τέτοιο γράφημα να περιέχει γέφυρα;

Ναι, μπορεί. Η ύπαρξη δύο κύκλων ξένων ως προς τις ακμές δεν εμποδίζει την ύπαρξη γέφυρας. Για παράδειγμα, παίρνουμε δύο ξένα αντίγραφα του K_5 , με σύνολα κορυφών $\{u_1, \dots, u_5\}$ και $\{w_1, \dots, w_5\}$, και τα ενώνουμε με μία μόνο ακμή $e = u_1 w_1$:



Στο γράφημα αυτό οι u_1 και w_1 έχουν βαθμό 5 και όλες οι υπόλοιπες κορυφές βαθμό 4, άρα $\delta(G) = 4$. Η ακμή e είναι γέφυρα: η αφαίρεσή της αφήνει δύο συνιστώσες. Επιπλέον, το G περιέχει δύο κύκλους ξένους ως προς τις ακμές — π.χ. έναν σε κάθε αντίγραφο του K_5 .

Θέμα 3. Έστω G συνεκτικό γράφημα. Δίνοντας κατεύθυνση σε κάθε ακμή του G παίρνουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\vec{G}$.

- a. Αν όλοι οι βαθμοί του G είναι άρτιοι, υπάρχει κατεύθυνση με $d_{\vec{G}}^+(u) = d_{\vec{G}}^-(u)$ για κάθε u .

Επειδή το G είναι συνεκτικό και όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό, από το Θεώρημα 6.1 το G είναι Eulerian, δηλαδή υπάρχει (κλειστό) ίχνος του Euler

$$C = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \cdots e_m u_m = u_0,$$

το οποίο χρησιμοποιεί κάθε ακμή του G ακριβώς μία φορά.

Διατρέχουμε το C ξεκινώντας από την u_0 και δίνουμε σε κάθε ακμή e_i την κατεύθυνση με την οποία τη διασχίζουμε, δηλαδή $u_{i-1} \rightarrow u_i$. Έτσι κάθε ακμή του G παίρνει ακριβώς μία κατεύθυνση (αφού εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στο C), και προκύπτει ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\vec{G}$.

Έστω τώρα u μια κορυφή. Κάθε φορά που το ίχνος «φτάνει» στην u μέσω κάποιας ακμής, «φεύγει» από αυτήν μέσω της επόμενης ακμής του ίχνους — αυτό ισχύει και για την αρχική κορυφή u_0 , επειδή το ίχνος είναι κλειστό (η πρώτη αναχώρηση από την u_0 αντιστοιχείται με την τελική άφιξη σε αυτήν). Οι αφίξεις στην u είναι ακριβώς οι ακμές που στο $\vec{G}$ καταλήγουν στην u και οι αναχωρήσεις ακριβώς εκείνες που ξεκινούν από αυτήν, οπότε

$$d_{\vec{G}}^+(u) = d_{\vec{G}}^-(u) \quad \text{για κάθε } u \in V(\vec{G}).$$

b. Γενικά, υπάρχει κατεύθυνση με $|d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)| \leq 1$ για κάθε u .

Αν όλοι οι βαθμοί του G είναι άρτιοι, το ζητούμενο προκύπτει από το (a). Έστω λοιπόν ότι το G έχει και κορυφές περιττού βαθμού. Από το Θεώρημα 1.1 (Άσκηση 1.3), το πλήθος τους είναι άρτιο, έστω $2k$.

Χωρίζουμε τις $2k$ κορυφές περιττού βαθμού σε k ζεύγη, αυθαίρετα, και προσθέτουμε στο G μία νέα ακμή για κάθε ζεύγος (επιτρέπονται παράλληλες ακμές). Παίρνουμε έτσι ένα γράφημα H , το οποίο είναι συνεκτικό και στο οποίο κάθε κορυφή έχει πλέον άρτιο βαθμό: οι $2k$ κορυφές αύξησαν τον βαθμό τους κατά 1, ενώ οι υπόλοιπες παρέμειναν άρτιες.

Από το ερώτημα (a), το H δέχεται κατεύθυνση $\vec{H}$ με $d_{\vec{H}}^+(u) = d_{\vec{H}}^-(u)$ για κάθε u .

Αφαιρούμε από το $\vec{H}$ τις k ακμές που είχαμε προσθέσει, κρατώντας τις κατευθύνσεις όλων των υπολοίπων. Προκύπτει ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\vec{G}$, το οποίο είναι μια κατευθυνόμενη εκδοχή του αρχικού G .

Κάθε κορυφή ήταν άκρο το πολύ μίας από τις ακμές που αφαιρέσαμε (οι k ακμές συνδέουν τις $2k$ κορυφές ανά δύο). Αν μια κορυφή u δεν έχασε ακμή, τότε $d_{\vec{G}}^+(u) = d_{\vec{G}}^-(u)$. αν έχασε μία, τότε μειώθηκε κατά 1 ακριβώς ένα από τα $d_{\vec{G}}^+(u)$, $d_{\vec{G}}^-(u)$. Και στις δύο περιπτώσεις

$$|d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)| \leq 1.$$

c. Για $d = (7, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$, να υπολογιστούν οι ελάχιστες δυνατές τιμές των δύο αθροισμάτων.

Πρώτο άθροισμα. Για οποιαδήποτε κατεύθυνση των ακμών ισχύει, από το Θεώρημα 1.7,

$$\sum_{u \in V(\vec{G})} d_{\vec{G}}^+(u) = \varepsilon(\vec{G}) = \sum_{u \in V(\vec{G})} d_{\vec{G}}^-(u),$$

αφού κάθε τόξο συνεισφέρει ακριβώς 1 στο συνολικό άθροισμα των εξωβαθμών και ακριβώς 1 στο συνολικό άθροισμα των εσωβαθμών. Άρα

$$\sum_{u \in V(\vec{G})} (d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)) = \varepsilon - \varepsilon = 0,$$

ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που θα επιλέξουμε. Η ελάχιστη (και μοναδική) τιμή του πρώτου αθροίσματος είναι λοιπόν 0.

Δεύτερο άθροισμα. Για κάθε κορυφή u ισχύει $d_{\vec{G}}^+(u) + d_{\vec{G}}^-(u) = d_G(u)$, οπότε

$$d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u) = d_G(u) - 2d_{\vec{G}}^-(u)$$

έχει την ίδια αρτιότητα με τον βαθμό $d_G(u)$. Επομένως:

- αν $d_G(u)$ είναι περιττός, τότε $d_G^+(u) - d_G^-(u) \neq 0$, δηλαδή $|d_G^+(u) - d_G^-(u)| \geq 1$.
- αν $d_G(u)$ είναι άρτιος, τότε $|d_G^+(u) - d_G^-(u)| \geq 0$.

Στην ακολουθία $d = (7, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$ οι περιττοί βαθμοί είναι οι 7, 3, 1, 1, δηλαδή τέσσερις το πλήθος. Άρα, για κάθε κατεύθυνση,

$$\sum_{u \in V(\vec{G})} |d_G^+(u) - d_G^-(u)| \geq 4.$$

Από το ερώτημα (b) υπάρχει κατεύθυνση με $|d_G^+(u) - d_G^-(u)| \leq 1$ για κάθε u . Σε αυτήν, οι κορυφές άρτιου βαθμού έχουν $|d_G^+(u) - d_G^-(u)| = 0$ (η διαφορά είναι άρτια και κατ' απόλυτη τιμή ≤ 1), ενώ οι τέσσερις κορυφές περιττού βαθμού έχουν $|d_G^+(u) - d_G^-(u)| = 1$. Το άθροισμα είναι τότε ακριβώς 4.

Η ελάχιστη δυνατή τιμή του δεύτερου αθροίσματος είναι λοιπόν 4 — δηλαδή το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού.

Θέμα 4. Έστω B ένας $(6, b, r, 3, \lambda)$ -σχεδιασμός, δηλαδή $v = 6$ και $k = 3$.

a. Το λ είναι άρτιο και τα r, b πολλαπλάσια του 5.

Από το Θεώρημα 7.1,

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{\lambda \cdot 5}{2} \quad \text{και} \quad b = \frac{vr}{k} = \frac{6r}{3} = 2r.$$

Το r μετρά blocks, άρα $r \in \mathbb{N}$, δηλαδή $2 \mid 5\lambda$. Επειδή οι 2 και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους, έπεται ότι $2 \mid \lambda$.

Γράφοντας $\lambda = 2\mu$ με $\mu \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$r = \frac{5 \cdot 2\mu}{2} = 5\mu.$$

Από τα παραπάνω, $b = 2r = 10\mu = 5 \cdot (2\mu)$.

b. Αν όλα τα blocks είναι διαφορετικά τρισύνολα του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ποιες είναι οι δυνατές πεντάδες παραμέτρων;

Τα blocks είναι τρισύνολα ενός συνόλου 6 στοιχείων και ανά δύο διαφορετικά, άρα το πλήθος τους είναι το πολύ όσα και όλα τα τρισύνολα:

$$b \leq \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Από το ερώτημα (a) έχουμε $b = 5\lambda$ με το λ άρτιο και $\lambda \geq 1$, δηλαδή $\lambda \in \{2, 4, 6, \dots\}$ και $b \in \{10, 20, 30, \dots\}$. Ο περιορισμός $b \leq 20$ αφήνει μόνο δύο περιπτώσεις:

$$\lambda = 2: \quad (v, b, r, k, \lambda) = (6, 10, 5, 3, 2) \quad \text{και} \quad \lambda = 4: \quad (v, b, r, k, \lambda) = (6, 20, 10, 3, 4).$$

c. Κατασκευή ενός $(6, 20, 10, 3, 4)$ -σχεδιασμού.

Ως ποικιλίες παίρνουμε το $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ως blocks όλα τα τρισύνολά του.

Τα τρισύνολα ενός συνόλου 6 στοιχείων είναι

$$b = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Έστω $\{x, y\}$ ένα οποιοδήποτε ζεύγος ποικιλιών. Ένα block που περιέχει και τις δύο είναι της μορφής $\{x, y, z\}$, όπου το z είναι μία από τις υπόλοιπες $6 - 2 = 4$ ποικιλίες, και αντιστρόφως κάθε τέτοια επιλογή του z δίνει ένα (διαφορετικό) τρισύνολο που περιέχει το $\{x, y\}$. Η αντιστοιχία $z \leftrightarrow \{x, y, z\}$ είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα τα blocks που περιέχουν το $\{x, y\}$ είναι ακριβώς

$$\lambda = 4.$$

Επειδή ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος για κάθε ζεύγος και όλα τα blocks έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων ($k = 3$), η οικογένεια αυτή είναι πράγματι σχεδιασμός.

Ομοίως, τα τρισύνολα που περιέχουν μια δοσμένη ποικιλία x αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στα ζεύγη που μπορούμε να διαλέξουμε από τις υπόλοιπες 5 ποικιλίες, δηλαδή

$$r = \binom{5}{2} = 10.$$

Άρα η κατασκευή δίνει $(v, b, r, k, \lambda) = (6, 20, 10, 3, 4)$, όπως ζητούσαμε.