

Ειδικά Θέματα Διακριτών Μαθηματικών

Διδάσκων: Γ. Αμανατίδης

Τελική εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2025-26

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Η σαφήνεια και η συντομία εκτιμώνται. Μπορείτε να αποχωρήσετε το νωρίτερο μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης. Δεν επιτρέπεται για κανέναν λόγο η χρήση κινητών συσκευών. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις Σωστή ή Λάθος. Να δώσετε μια πολύ σύντομη δικαιολόγηση της κάθε απάντησης (1-3 γραμμές ή ένα σχήμα αρκούν).

1. **Σ/Λ** Ένας κώδικας σταθερού μήκους, οι λέξεις του οποίου ανά δύο έχουν απόσταση Hamming τουλάχιστον 26, μπορεί να διορθώσει 12 σφάλματα ανά λέξη, αλλά όχι 13.
2. **Σ/Λ** Υπάρχει δέντρο 8 κορυφών, με ακολουθία βαθμών (5, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1) .
3. **Σ/Λ** Κάθε άκυκλο γράφημα (δηλαδή κάθε γράφημα που δεν περιέχει κύκλους) είναι διμερές.
4. **Σ/Λ** Αν ένα απλό γράφημα έχει ακολουθία βαθμών (4, 4, 4, 4, 3, 3) τότε είναι Hamiltonian.
5. **Σ/Λ** Υπάρχει απλό γράφημα 12 κορυφών, το οποίο είναι 11-κορυφών-συνεκτικό και 11-ακμών-συνεκτικό.
6. **Σ/Λ** Αν προσθέσουμε ένα νέο φύλλο σε ένα δυαδικό δέντρο που έχει ήδη 80 φύλλα, τότε το ύψος του δέντρου σίγουρα θα αυξηθεί.
7. **Σ/Λ** Υπάρχει (43, 43, 23, 23, 10)-σχεδιασμός.
8. **Σ/Λ** Υπάρχει πλήρες, απλό, διμερές Eulerian γράφημα που έχει περιττό πλήθος κορυφών.
9. **Σ/Λ** Το κέντρο ενός συνεκτικού γραφήματος, κάθε ακμή του οποίου έχει βάρος 1, αποτελείται από το πολύ δύο κορυφές.
10. **Σ/Λ** Κάθε 5-κορυφών-συνεκτικό γράφημα με 15 κορυφές έχει τουλάχιστον 38 ακμές.

Θέμα 2. Έστω απλό γράφημα G με ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$. Να δείξετε ότι

- a. Αν $\delta(G) \geq 2$, τότε το G περιέχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $\delta(G) + 1$.
- b. Αν $\delta(G) \geq 4$, τότε το G περιέχει τουλάχιστον δύο κύκλους ξένους ως προς τις ακμές. Δηλαδή οι δύο κύκλοι μπορεί να έχουν κάποιες από τις κορυφές κοινές, αλλά δεν έχουν καμία κοινή ακμή.
- c. Να εξηγήσετε αν μπορεί ένα γράφημα όπως αυτό στο προηγούμενο υποερώτημα να περιέχει μία γέφυρα (δηλαδή μία ακμή που η αφαίρεσή της αυξάνει το πλήθος των συνιστωσών του G).

Θέμα 3. Έστω συνεκτικό γράφημα G . Ξεκινώντας από το G , μπορούμε να φτιάξουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\vec{G}$ δίνοντας κατεύθυνση σε κάθε ακμή του G .

- Αν οι βαθμοί όλων των κορυφών του G είναι άρτιοι, να δείξετε ότι μπορούμε να δώσουμε κατευθύνσεις στις ακμές του με τέτοιο τρόπο ώστε ο εσωβαθμός και ο εξωβαθμός κάθε κορυφής u του $\vec{G}$ να είναι ίσοι μεταξύ τους.
- Γενικά, ό,τι και να είναι οι βαθμοί του G , να δείξετε ότι μπορούμε να δώσουμε κατευθύνσεις στις ακμές του με τέτοιο τρόπο ώστε ο εσωβαθμός και ο εξωβαθμός κάθε κορυφής u του $\vec{G}$ να διαφέρουν το πολύ κατά 1, δηλαδή $|d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)| \leq 1$, για κάθε $u \in V(\vec{G})$.
- Από ένα γράφημα G με ακολουθία βαθμών $\mathbf{d} = (7, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$ κατασκευάζουμε το $\vec{G}$ δίνοντας κατεύθυνση σε κάθε ακμή του G . Να υπολογίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή των αθροισμάτων:

$$\sum_{u \in V(\vec{G})} (d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)) \quad \text{και} \quad \sum_{u \in V(\vec{G})} |d_{\vec{G}}^+(u) - d_{\vec{G}}^-(u)|.$$

Θέμα 4. Ένας (v, b, r, k, λ) -σχεδιασμός με $k = 3$ ονομάζεται *triple system*. Έστω B ένα triple system 6 ποικιλιών, δηλαδή ένας $(6, b, r, 3, \lambda)$ -σχεδιασμός.

- Να δειχθεί ότι το λ πρέπει να είναι άρτιο, ενώ τα r και b πολλαπλάσια του 5.
- Αν γνωρίζουμε ότι στον B όλα τα block είναι διαφορετικά τρισύνολα του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, να προσδιορίσετε όλες τις πιθανές πεντάδες παραμέτρων του B .
- Κατασκευάστε έναν $(6, 20, 10, 3, 4)$ -σχεδιασμό. Συγκεκριμένα, να δείξετε ότι η κατασκευή σας είναι σχεδιασμός, εξηγώντας γιατί κάθε ζεύγος ποικιλιών ανήκει σε ακριβώς 4 block του σχεδιασμού σας.

[Υπενθύμιση: Το πλήθος των υποσυνόλων με m στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων είναι $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.]