ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

http://eclass.aueb.gr/courses/INF511/

Αλγόριθμοι (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5)

Αλκμήνη Σγουρίτσα

Κοδριγκτώνος 12, 2ος όροφος

E-mail: alkmini@aueb.gr

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Αλγόριθμοι

- Αρχικές έννοιες και ορισμοί
- Βασικοί Αλγόριθμοι:
  - Αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης
  - Αλγόριθμος SelectionSort και InsertionSort για αλφαβητική ταξινόμηση
  - Αναδρομικοί αλγόριθμοι - mergesort
  - Αλγόριθμος του Dijkstra για αναζήτηση συντομότερου μονοπατιού
- Εισαγωγή στην αλγοριθμική πολυπλοκότητα
- Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Αλγόριθμος: Ορισμός - Παραδείγματα

- **Διατεταγμένο (ordered)** σύνολο βημάτων (που να ξεχωρίζουν)
- **Σαφώς ορισμένα** (unambiguous) βήματα
- **Εκτελέσιμα εφικτά** βήματα: π.χ. όχι κάτι σαν

```
Make a list of all the positive integers
```

Έχουμε ήδη δει αλγορίθμους για:

- Μετατροπή δεκαδικής αναπάραστασης αριθμού σε δυαδική
- Ανίχνευση και διόρθωση σφαλμάτων
- Χρονοδρομολόγηση διεργασιών από το λειτουργικό σύστημα
- Τον κύκλο μηχανής μιας CPU:

```
As long as the halt instruction has not been executed
continue to execute the following steps:
  a. Fetch an instruction.
  b. Decode the instruction.
  c. Execute the instruction.
```

Παράδειγμα Αλγορίθμου

Αλγόριθμος: φτιάξε στιγμιαίο καφέ

(1) βράσε νερό
- (1.1) γέμισε χύτρα
  - (1.1.1) βάλε χύτρα κάτω από βρύση
  - (1.1.2) άνοιξε βρύση
  - (1.1.3) περίμενε να γεμίσει η χύτρα
  - (1.1.4) κλείσε βρύση
- (1.2) άναψε το μάτι
- (1.3) περίμενε να βράσει
  - (1.3.1) περίμενε να σφυρίξει η χύτρα
- (1.4) σβήσε το μάτι

(2) βάλε καφέ στο φλιτζάνι
- (2.1) άνοιξε το δοχείο του καφέ
  - (2.1.1) πάρε το δοχείο του καφέ από το ντουλάπι
  - (2.1.2) βγάλε το καπάκι
- (2.2) πάρε ένα κουταλάκι καφέ
- (2.3) άδειασε το κουταλάκι στο φλιτζάνι
- (2.4) κλείσε το δοχείο του καφέ
  - (2.4.1) βάλε το καπάκι στο δοχείο
  - (2.4.2) βαλε το δοχείο στο ντουλάπι

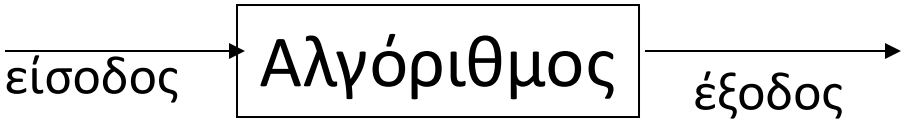
(3) πρόσθεσε νερό στο φλιτζάνι
- (3.1) βάλε νερό από την χύτρα στο φλιτζάνι μέχρι να γεμίσει

Ακολουθία βημάτων για αλγόριθμο

1. βάλε την χύτρα κάτω από βρύση
2. άνοιξε την βρύση → **εάν δεν υπάρχει νερό;**
3. περίμενε να γεμίσει η χύτρα
4. κλείσε την βρύση
5. άναψε το μάτι
6. περίμενε να σφυρίξει η χύτρα → **εάν δεν υπάρχει ρεύμα δεν θα σφυρίξει ποτέ**
7. σβήσε το μάτι
8. πάρε το δοχείο του καφέ από το ντουλάπι
9. βγάλε το καπάκι
10. πάρε ένα κουταλάκι καφέ → **εάν δεν υπάρχει καφές, να δοκιμάσει το επόμενο δοχείο καφέ; εάν είναι όλα άδεια, τι να κάνει;**
11. άδειασε το κουταλάκι στο φλιτζάνι
12. βάλε το καπάκι στο δοχείο
13. βαλε το δοχείο στο ντουλάπι
14. βάλε νερό από την χύτρα στο φλιτζάνι μέχρι να γεμίσει

Ένας καλός αλγόριθμος πρέπει να λαμβάνει υπόψη όλα τα ενδεχόμενα που μπορεί να προκύψουν κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος.

Αλγόριθμοι, προγράμματα, Γλώσσες



- Πώς περιγράφουμε έναν αλγόριθμο;
  - Η φυσική γλώσσα (ελληνικά, αγγλικά) μπορεί να είναι ασαφής
    «μαζεύετε τριαντάφυλλα όσο σας επιτρέπεται»
- Πρόγραμμα (program): μια αναπαράσταση ενός αλγορίθμου, γραμμένη για εκτέλεση από υπολογιστή
- Γλώσσα προγραμματισμού:
  - εύκολη και περιεκτική έκφραση αλγορίθμων
  - άμεσα κατανοητή από υπολογιστές **και** ανθρώπους

Αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης (sequential search)

- Είσοδος: ένας πίνακας/λίστα με στοιχεία ταξινομημένα
- Στόχος: να βρεθεί η ΤιμήΣτόχος (π.χ. ένα όνομα) στον πίνακα/λίστα
- Σειριακή αναζήτηση: αναζήτηση για την ΤιμήΣτόχος στοιχείο προς στοιχείο, από την αρχή προς το τέλος του πίνακα/λίστα

```
διαδικασία Αναζήτηση (Λίστα, ΤιμήΣτόχος)
αν (Λίστα άδεια)
 τότε
  (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή)
 αλλιώς
  (Επίλεξε την πρώτη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο.
  όσο (ΤιμήΣτόχος > ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο και
        υπάρχουν καταχωρίσεις προς σύγκριση)
     κάνε (επίλεξε την επόμενη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο).
  αν (ΤιμήΣτόχος = ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο)
    τότε  (Δήλωσε την αναζήτηση ως επιτυχή.)
    αλλιώς (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή.)
 ) τέλος αν
```

Αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης (sequential search)

Παράδειγμα 1

- Είσοδος:

-5	-1	0	1	1	2	5	5	8	10	11	15	20	20	21

- Στόχος: να βρεθεί η τιμή 5 με σειριακή αναζήτηση
- Πόσες συγκρίσεις χρειάστηκαν; 8

```
διαδικασία Αναζήτηση (Λίστα, ΤιμήΣτόχος)
αν (Λίστα άδεια)
 τότε
  (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή)
 αλλιώς
  (Επίλεξε την πρώτη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο.
  όσο (ΤιμήΣτόχος > ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο και
        υπάρχουν καταχωρίσεις προς σύγκριση)
     κάνε (επίλεξε την επόμενη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο).
  αν (ΤιμήΣτόχος = ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο)
    τότε  (Δήλωσε την αναζήτηση ως επιτυχή.)
    αλλιώς (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή.)
 ) τέλος αν
```

Αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης (sequential search)

Παράδειγμα 2

- Είσοδος:

-5	-1	0	1	1	2	5	5	8	10	11	15	20	20	21

- Στόχος: να βρεθεί η τιμή 6 με σειριακή αναζήτηση
- Πόσες συγκρίσεις χρειάστηκαν; 10

```
διαδικασία Αναζήτηση (Λίστα, ΤιμήΣτόχος)
αν (Λίστα άδεια)
 τότε
  (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή)
 αλλιώς
  (Επίλεξε την πρώτη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο.
  όσο (ΤιμήΣτόχος > ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο και
        υπάρχουν καταχωρίσεις προς σύγκριση)
     κάνε (επίλεξε την επόμενη καταχώριση της Λίστας ως ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο).
  αν (ΤιμήΣτόχος = ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο)
    τότε  (Δήλωσε την αναζήτηση ως επιτυχή.)
    αλλιώς (Δήλωσε την αναζήτηση ως ανεπιτυχή.)
 ) τέλος αν
```

Αλγόριθμος σειριακής αναζήτησης (sequential search)

- Ο έλεγχος (σύγκριση) συνιστά την πιο «δύσκολη» πράξη σε αυτό το παράδειγμα.
- Ο αριθμός ελέγχων θα καθορίσει το χρόνο εκτέλεσης, εφόσον ελέγξουμε ότι δεν γίνονται **πολλές** πιο «εύκολες» πράξεις
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση για σειριακή αναζήτηση ενός ονόματος σε μια λίστα μήκους n;
  - Περίπου n (για την ακρίβεια n+1)
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στην καλύτερη περίπτωση για σειριακή αναζήτηση ενός ονόματος σε μια λίστα μήκους n;
  - 2
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται κατά μέσο όρο για σειριακή αναζήτηση ενός ονόματος σε μια λίστα μήκους n (υποθέστε ότι **δεν υπάρχουν** επαναλήψεις ονομάτων);
  - Περίπου n/2

-5	-1	0	1	2	3	5	7	8	10	11	15	18	20	21

Αλγόριθμος εύρεσης μεγίστου

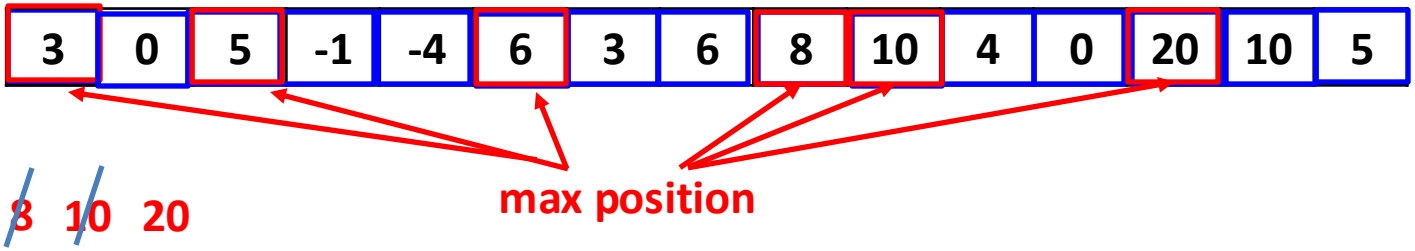
- Είσοδος: ένας πίνακας/λίστα με στοιχεία όχι απαραίτητα ταξινομημένα
- Στόχος: να βρεθεί η μέγιστη τιμή στον πίνακα/λίστα

Παράδειγμα

- Είσοδος:

3	0	5	-1	-4	6	3	6	8	10	4	0	20	10	5

- Στόχος: να βρεθεί η μέγιστη τιμή
- Πόσα στοιχεία πρέπει να ελέγξω;
  - Πρέπει να ελέγξω όλο τον πίνακα, αλλιώς αν δεν ελέγξω κάποιο στοιχείο, εκεί μπορεί να βρίσκεται το μέγιστο.
  - Μπορώ να κοιτάξω τα στοιχεία σειριακά και να «θυμάμαι» το μέγιστο που έχω βρει ως τώρα.



Αλγόριθμος εύρεσης μεγίστου

```
Διαδικασία max(A[1..n])
Είσοδος: Πίνακας στοιχείων A[1..n]
Έξοδος:  Η θέση του μέγιστου στοιχείου του A

max= A[1], position=1 (αρχικοποίηση)

for i=2 to n: (Στον ψευδοκώδικα το βήμα εννοείται 1)
     if A[i]>max: (αν βρεις μεγαλύτερο)
            max=A[i], position=i  (κάνε update)

return position
```

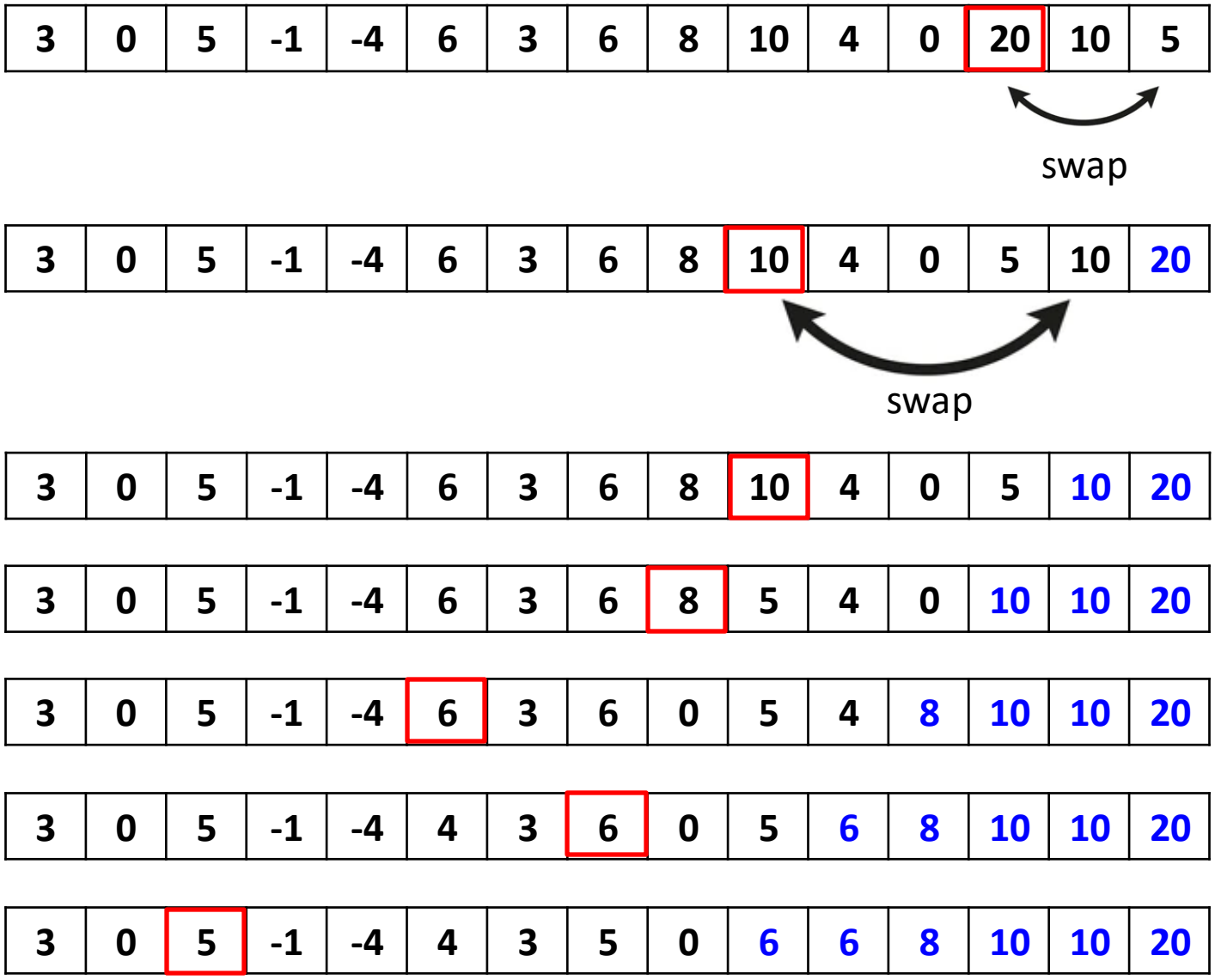
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση;
  - Περίπου n (για την ακρίβεια n-1)
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στην καλύτερη περίπτωση;
  - Χρειάζονται περίπου n (για την ακρίβεια n-1) για οποιαδήποτε είσοδο μεγέθους n.

Αλγόριθμος SelectionSort για ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά ενός πίνακα αριθμών

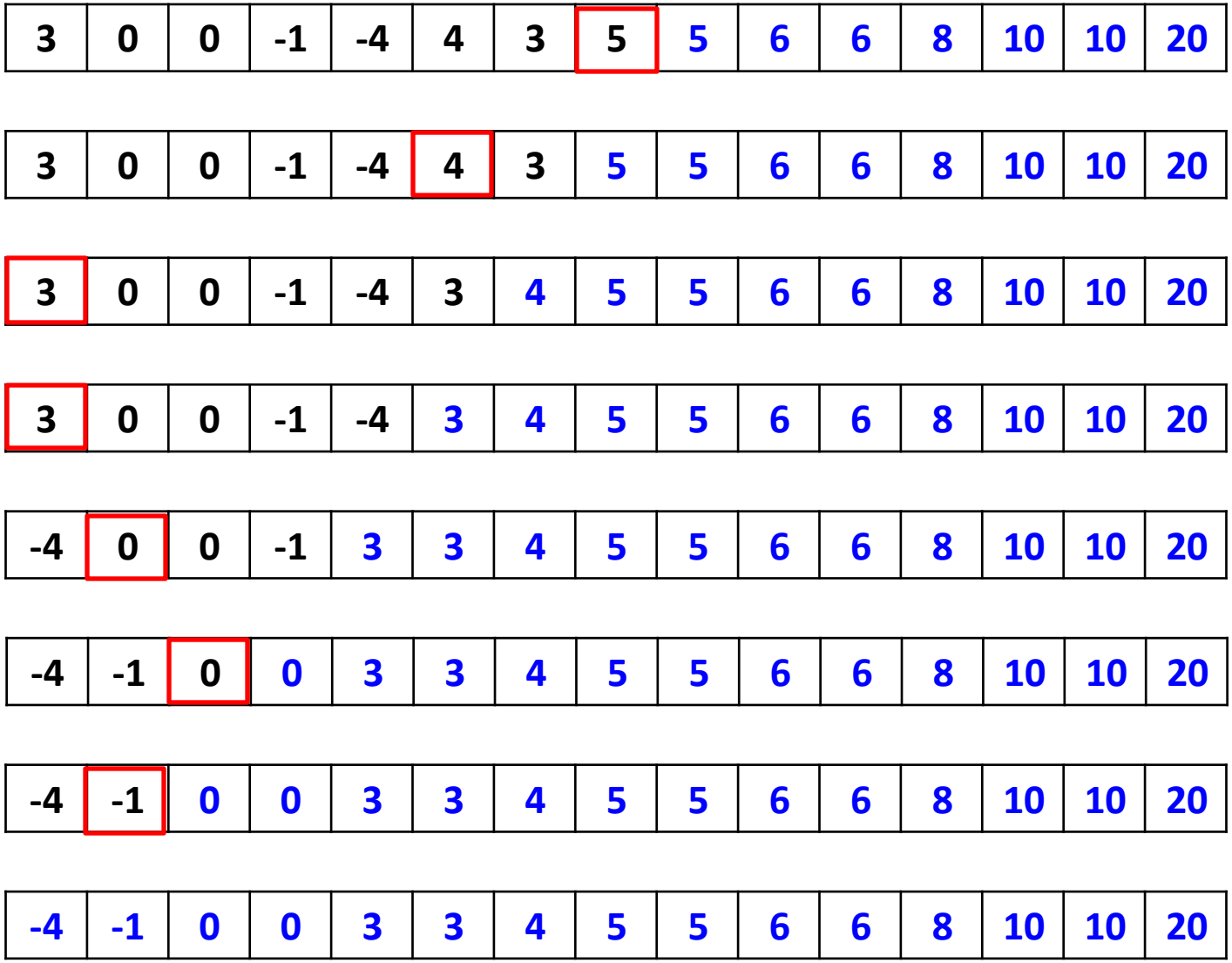
- Είσοδος: ένας πίνακας/λίστα με στοιχεία όχι απαραίτητα ταξινομημένα
- Έξοδος*:* Ο πίνακας/λίστα ταξινομημένος

- **Θα χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία max**
- Εύρεση του μεγίστου με τη διαδικασία max. Ανταλλαγή με το τελευταίο στοιχείο.
- Εύρεση του μεγίστου στον υπόλοιπο πίνακα με τη διαδικασία max. Ανταλλαγή με το προτελευταίο στοιχείο.
- κ.ο.κ

Αλγόριθμος SelectionSort Παράδειγμα (1/2)



Αλγόριθμος SelectionSort Παράδειγμα (2/2)



Αλγόριθμος SelectionSort

```
Διαδικασία SelectionSort(A[1..n])
Είσοδος: Πίνακας αριθμών A[1..n]
Έξοδος: Ο πίνακας Α ταξινομημένος

for i=n,n-1,…3,2:
    p=max(A[1..i]) (p: η θέση του μέγιστου στο A[1..i])
    swap(A[p], A[i]) (βάλε τον μέγιστο του A[1..i]
                      στο τέλος αυτού του υποπίνακα)
```

- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) και swaps χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση;
  - Για κάθε i γίνονται i-1 συγκρίσεις (στη max) και 1 swap. Άρα i ενέργειες.
  - Συνολικά $\sum_{i=2}^{n} i = \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} - 1$
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) και swaps χρειάζονται στην καλύτερη περίπτωση;
  - Χρειάζονται $\frac{(n+1)n}{2} - 1$ για οποιαδήποτε είσοδο μεγέθους n.

Αλγόριθμος InsertionSort για ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά ενός πίνακα αριθμών (1)

Input:

8	1	4	9	0	6	5	2	7	3

Αλγόριθμος Ταξινόμησης με Εισαγωγή (InsertionSort)

Iteration 1

8	1	4	9	0	6	5	2	7	3

Iteration 1

8		4	9	0	6	5	2	7	3

Key: 1

Iteration 1

8		4	9	0	6	5	2	7	3

> key

Key: 1

Iteration 1

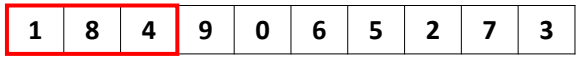
	8	4	9	0	6	5	2	7	3

Key: 1

Τα 2 πρώτα στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά

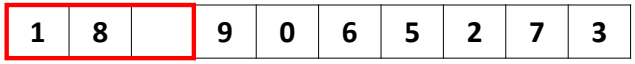
Αλγόριθμος InsertionSort για ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά ενός πίνακα αριθμών (2)

Iteration 2



Key: 

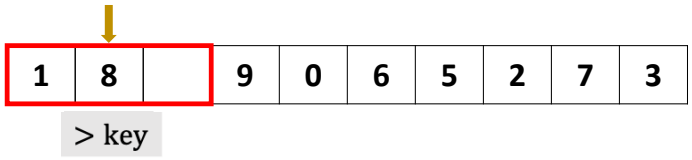
Iteration 2



Key: 4

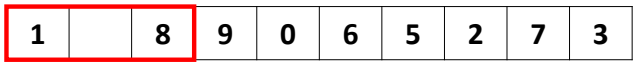
Ξεκινώ συγκρίνοντας το 4 με όλα τα στοιχεία από δεξιά προς τα αριστερά.
Σταματώ είτε όταν βρω ένα στοιχείο που είναι μικρότερο ή ίσο με το key (το 4), τότε τοποθετώ το key μετά (δεξιά) από αυτό το στοιχείο, ή όταν έχω εξετάσει όλα τα στοιχεία αριστερά (στο κόκκινο πλαίσιο), τότε τοποθετώ το key στην πρώτη θέση.

Iteration 2



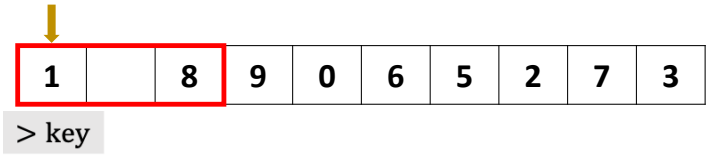
Key: 4

Iteration 2



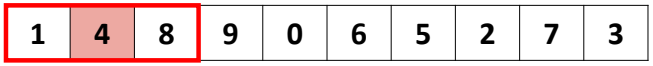
Key: 4

Iteration 2



Key: 4

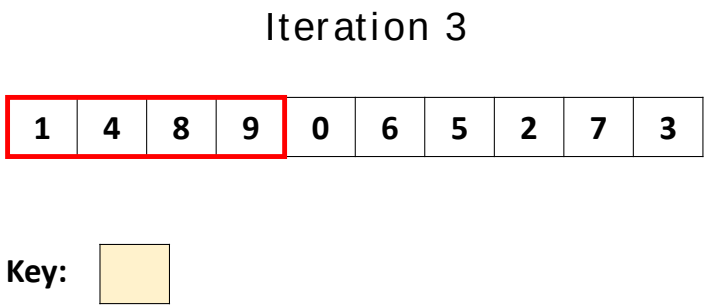
Iteration 2

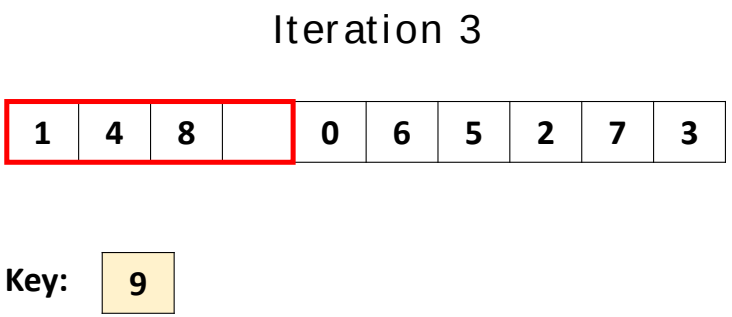


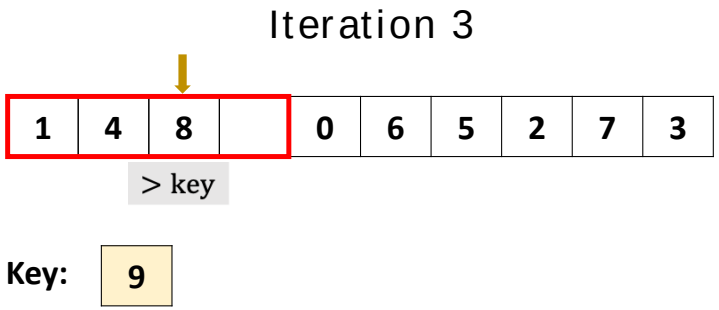
Key: 

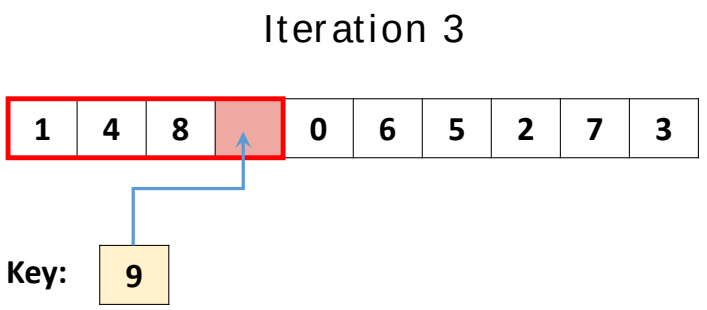
Τα 3 πρώτα στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά

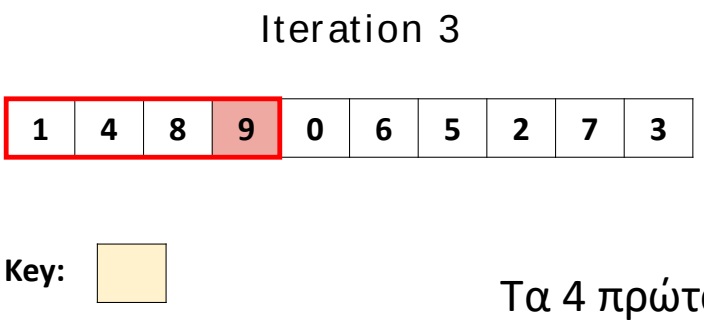
Αλγόριθμος InsertionSort για ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά ενός πίνακα αριθμών (3)











Τα 4 πρώτα στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά

Ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά μιας λίστας αριθμών (4)

Εναλλακτικά: κάνω swap το key με το αριστερό στοιχείο όσο το αριστερό στοιχείο (αν υπάρχει) είναι μεγαλύτερο από το key

Iteration 4

Key: 0

Iteration 4

Key: 0

Iteration 4

Key: 0

Iteration 4

Key: 0

Iteration 4

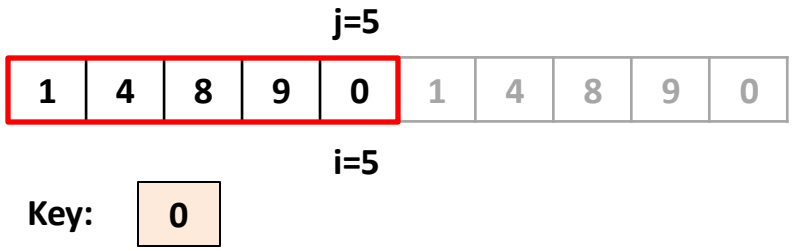
Key: 0

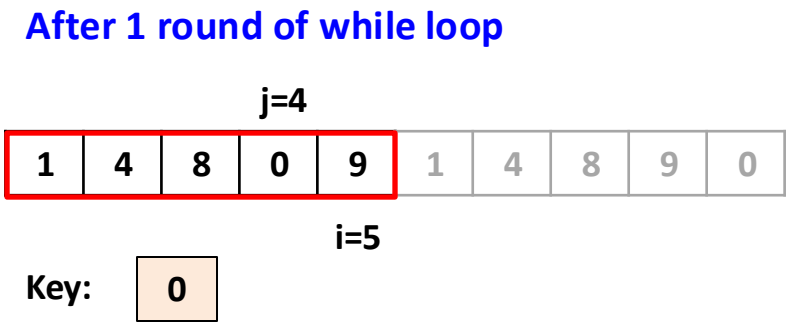
Τα 5 πρώτα στοιχεία είναι σε αύξουσα σειρά

Ψευδοκώδικας InsertionSort

```
Διαδικασία InsertionSort(A[1..n])
Είσοδος: Πίνακας αριθμών A[1..n]
Έξοδος: Ο πίνακας Α ταξινομημένος

for i=2 to n: (i is key's original position)
    j = i      (j is key's current position)
    while (j>1 and A[j]<A[j-1]) do
        swap (A[j], A[j-1])
        j = j-1
```





Ανάλυση InsertionSort

- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση;
  - στο 1ο βήμα (για το 2ο στοιχείο), ο αλγόριθμος θα κάνει 1 σύγκριση
  - στο 2ο βήμα (για το 3ο στοιχείο), θα κάνει 2 συγκρίσεις
  - κ.ο.κ.
  - στο n-1 βήμα (για το n στοιχείο), θα κάνει n-1 συγκρίσεις
  - Σύνολο συγκρίσεων στη χειρότερη περίπτωση:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-n)$$

- Πόσα swaps/μετακινήσεις χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση;
  - Ένα σε κάθε σύγκριση. Άρα $\frac{n(n-1)}{2}$
- Ποια είναι η χειρότερη περίπτωση λίστας;
  - Μία ανάποδα ταξινομημένη λίστα
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) και swaps χρειάζονται στην καλύτερη περίπτωση;
  - Σε ταξινομημένο πίνακα: n-1 συγκρίσεις, 0 swaps

Επιστροφή στη σειριακή αναζήτηση

Παράδειγμα 1

- Είσοδος:

-5	-1	0	1	1	2	5	5	8	10	11	15	20	20	21

- Στόχος: να βρεθεί η τιμή 11 με σειριακή αναζήτηση
- Πόσες συγκρίσεις χρειάστηκαν; 12
- Νέος στόχος: να βρεθεί η τιμή 11 σε λιγότερα βήματα.
  - Συγκρίνω με το μεσαίο στοιχείο. Τι συμπέρασμα βγάζω (ο πίνακας είναι ταξινομημένος)?
  - Το 11 βρίσκεται δεξιά του. Γλίτωσα περίπου n/2 συγκρίσεις.

~~-5~~	~~-1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~	~~5~~	~~5~~	8	10	11	15	20	20	21

  - Συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο στον υποπίνακα που έμεινε

-5	-1	0	1	1	2	5	5	8	10	11	~~15~~	~~20~~	~~20~~	~~21~~

-5	-1	0	1	1	2	5	5	~~8~~	~~10~~	11	15	20	20	21

Ο αλγόριθμος της δυαδικής αναζήτησης - Ψευδοκώδικας (1)

Διαδικασία Αναζήτηση (Λίστα, ΤιμήΣτόχος)

αν (Η Λίστα είναι άδεια)

τότε

(Ανάφερε ότι η αναζήτηση απέτυχε)

αλλιώς

[Επίλεξε τη "μεσαία" καταχώριση της Λίστας ως την ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο.

Εκτέλεσε το παρακάτω μπλοκ εντολών που αντιστοιχεί στην κατάλληλη περίπτωση.

περίπτωση 1: ΤιμήΣτόχος=ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο

(Ανέφερε ότι η αναζήτηση είναι επιτυχής.)

περίπτωση 2: ΤιμήΣτόχος<ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο

(Εφάρμοσε τη διαδικασία Αναζήτηση για να δεις αν η ΤιμήΣτόχος βρίσκεται στο τμήμα της λίστας που προηγείται της ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο, και ανέφερε το αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης.)

περίπτωση3: ΤιμήΣτόχος> ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο

(Εφάρμοσε τη διαδικασία Αναζήτηση για να δεις αν η ΤιμήΣτόχος βρίσκεται στο τμήμα της λίστα μετά την ΚαταχώρισηΠροςΈλεγχο, και ανέφερε το αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης.)

] **τέλος αν**

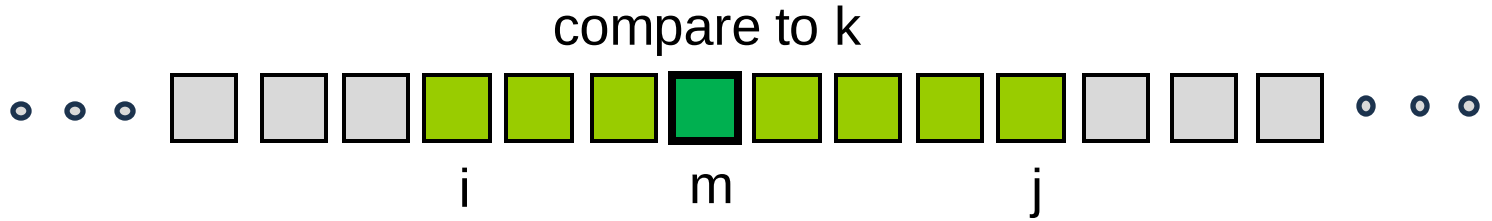
Ο αλγόριθμος της δυαδικής αναζήτησης - Ψευδοκώδικας (2)

```
συνάρτηση binS(A[i..j], k)
Είσοδος:Ταξινομημένος πίνακας κλειδιών A[1..n],
          κλειδί  k
Έξοδος: Η θέση του k στον A αν υπάρχει,
        διαφορετικά nil

if i>j: return nil (το στοιχείο δεν βρέθηκε)

m= ⌊(i+j)/2⌋ (επέλεξε το μεσαίο στοιχείο του πίνακα)
if k=A[m]: return m (έλεγξε αν είναι αυτό που ψάχνω)

(αλλιώς διάλεξε ποιον πίνακα θα κρατήσεις)
if k>A[m]: return binS(A[m+1..j],k)
     else: return binS(A[i, m-1],k)
```

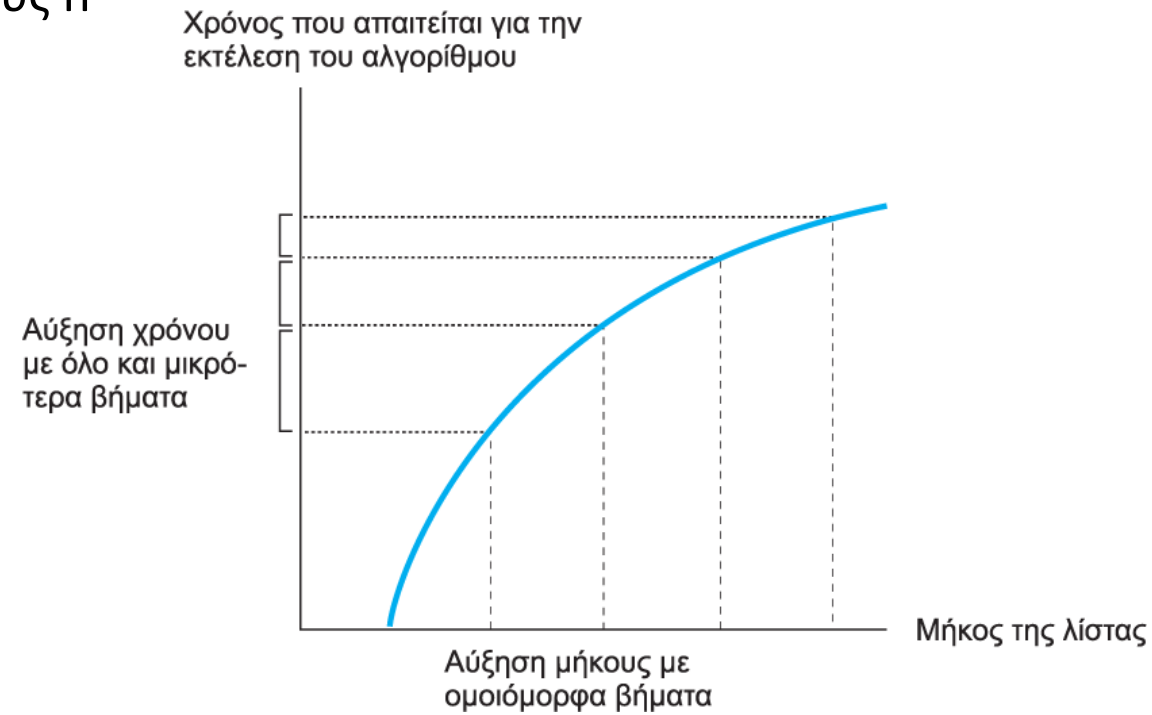


Ο αλγόριθμος της δυαδικής αναζήτησης – Αποδοτικότητα (Πρακτικό Παράδειγμα)

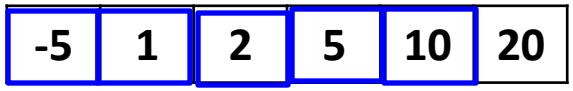
- Λίστα 30,000 ονομάτων φοιτητών
- Ακολουθιακή (sequential) αναζήτηση: **κατά μέσο όρο** χρειάζεται να περάσει 15,000 ονόματα
  - Έστω 10msec για να ελέγξει ένα όνομα
  - Μέσος χρόνος για έλεγχο: 150 sec
- Δυαδική (binary) αναζήτηση: χρειάζεται να ελέγξει **το πολύ** 15 ονόματα
  - Όσες φορές (το πολύ) μπορεί να κοπεί μια λίστα 30,000 ονομάτων στην μέση ($\log_2$ (30,000))
  - 10msec για να ελέγξει ένα όνομα
  - Χρόνος για έλεγχο (στη χειρότερη περίπτωση): 0,15 sec

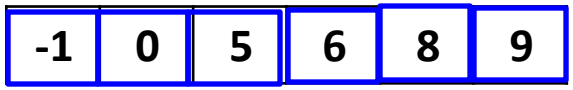
Ο αλγόριθμος της δυαδικής αναζήτησης – Αποδοτικότητα

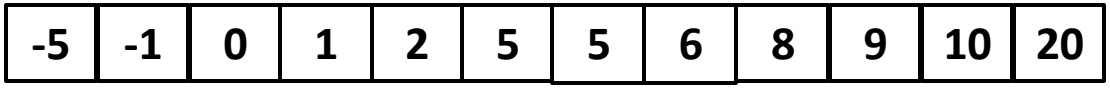
- Ενδιαφερόμαστε για μια λίστα οποιουδήποτε μήκους n
- Χειρότερη περίπτωση (worst case):
  - Για την **ακολουθιακή αναζήτηση**: στη χειρότερη περίπτωση, περίπου n έλεγχοι για λίστα μήκους n
  - **Δυαδική αναζήτηση**: Στη χειρότερη περίπτωση, περίπου $\log_2 n$ έλεγχοι για λίστα μήκους n



Αλγόριθμος Συγχώνευσης (Merge) δύο ταξινομημένων πινάκων





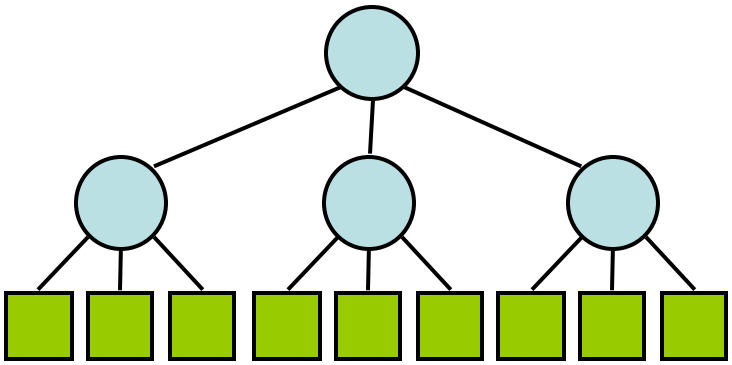


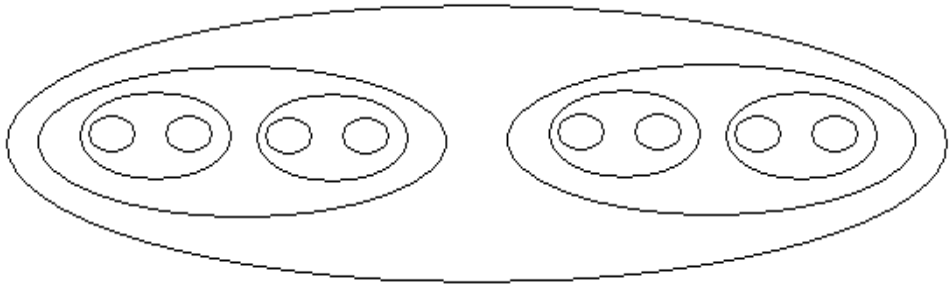
- Πόσοι έλεγχοι (συγκρίσεις) χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση για τη συγχώνευση δύο ταξινομημένων πινάκων μήκους n/2 ο καθένας;
  - Περίπου n (για την ακρίβεια n-1)

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία merge(A[1..p],B[1..q]), όπου Α και Β δύο πίνακες μεγέθους p και q, αντίστοιχα.

Διαίρει και Βασίλευε (Divide and conquer)

- Διαίρεσε το πρόβλημα μεγέθους n σε υπο-προβλήματα μεγέθους n/b
- Λύσε α τέτοια υπο-προβλήματα
- Συνδύασε τις λύσεις τους

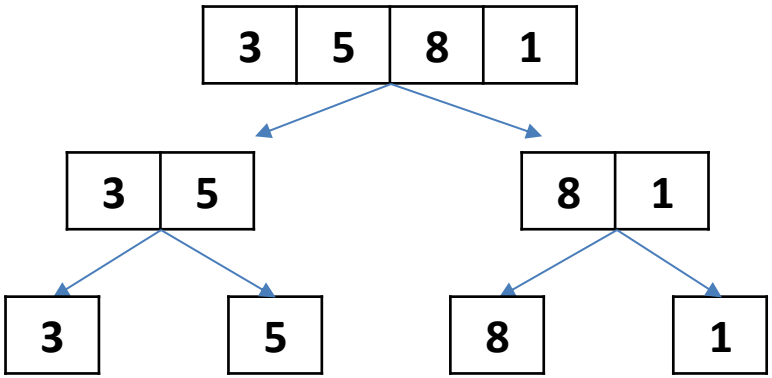


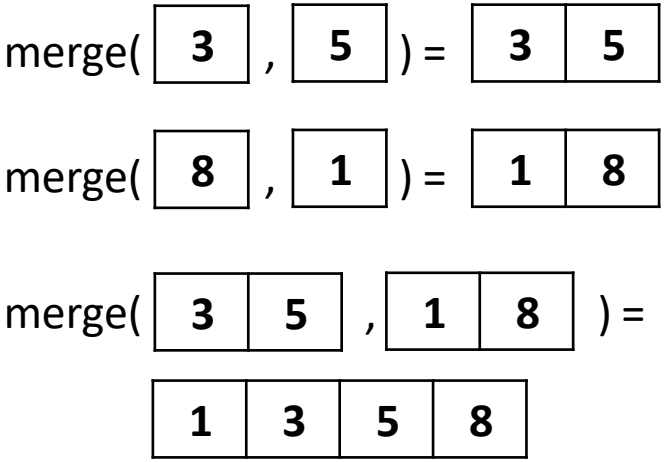


Αλγόριθμος Ταξινόμησης Mergesort

- Είσοδος: ένας πίνακας/λίστα με στοιχεία όχι απαραίτητα ταξινομημένα
- Έξοδος: Ο πίνακας/λίστα ταξινομημένος

- **Θα χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία merge**
- Η merge δέχεται σαν είσοδο δύο ταξινομημένους πίνακες
- Θα χωρίσουμε τον πίνακα επαναλαμβανόμενα μέχρι να έχουμε ταξινομημένους πίνακες. Πότε ξέρουμε ότι είναι ταξινομημένοι;
  - Όταν έχουν 1 στοιχείο!
- Μετά τους συγχωνεύουμε με τη merge!



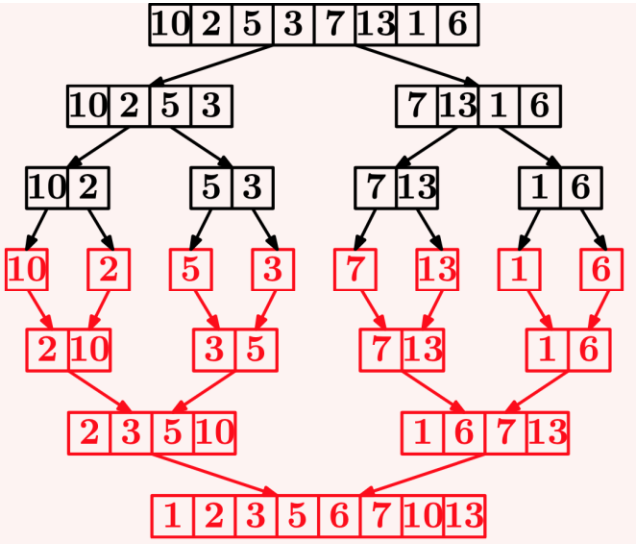


Ψευδοκώδικας Mergesort

```
Διαδικασία mergesort(A[1,…,n])
Είσοδος: Ένας πίνακας αριθμών A[1,…,n]
Έξοδος: Ο πίνακας ταξινομημένος

if n > 1:
   return merge(mergesort(A[1,…,⌊n/2⌋]),mergesort(A[⌊n/2⌋+1,…,n])
else:
   return A
```

Παράδειγμα: mergesort (10,2,5,3,7,13,1,6)

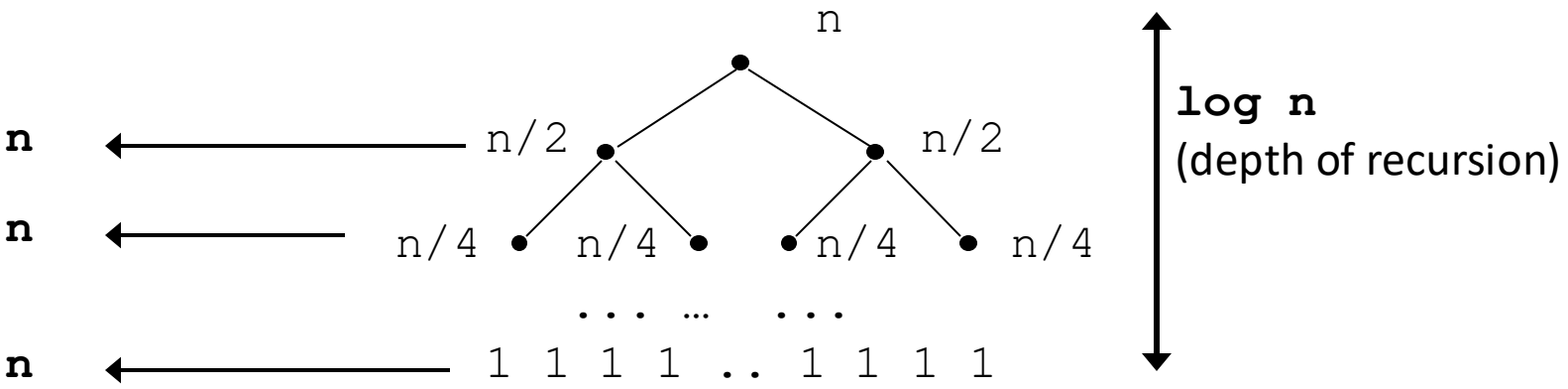


Divide

Conquer

Combine(merge)

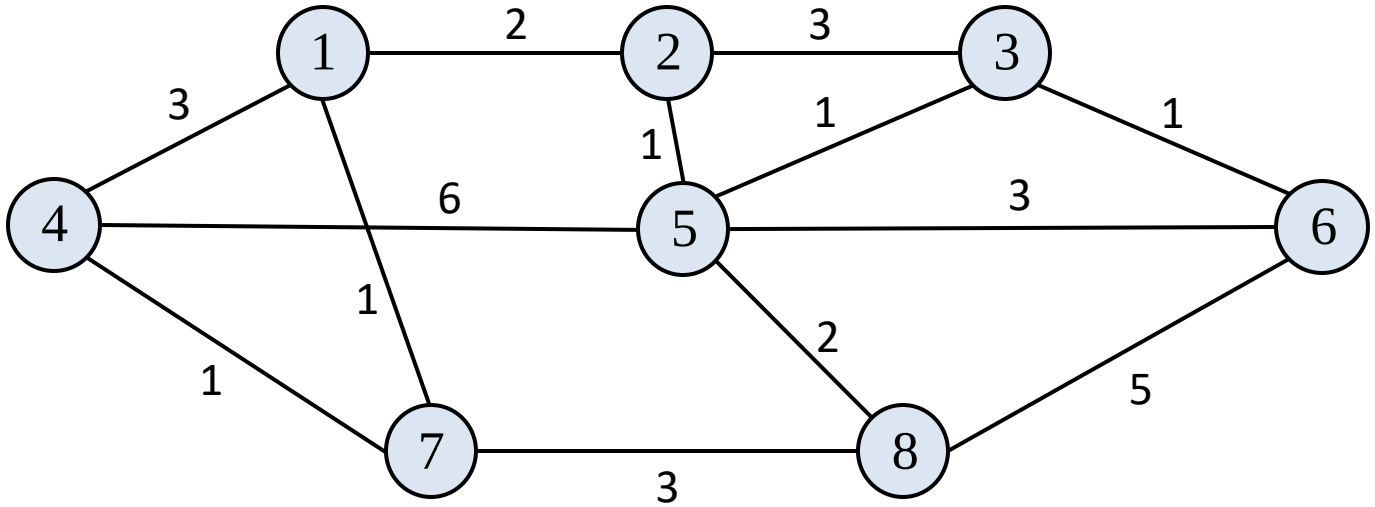
Αποδοτικότητα Mergesort



- Πόσες συγκρίσεις χρειάζονται στη χειρότερη περίπτωση;
  - Σε κάθε επίπεδο γίνονται μεταξύ n/2 και n συγκρίσεις.
  - Υπάρχουν log n επίπεδα
  - Άρα συνολικά έχουμε μεταξύ n/2 log n και n log n συγκρίσεις.
- Δεν υπάρχει «ασυμπτωτικά» πιο αποδοτικός αλγόριθμος ταξινόμησης από τον mergesort στη χειρότερη περίπτωση.

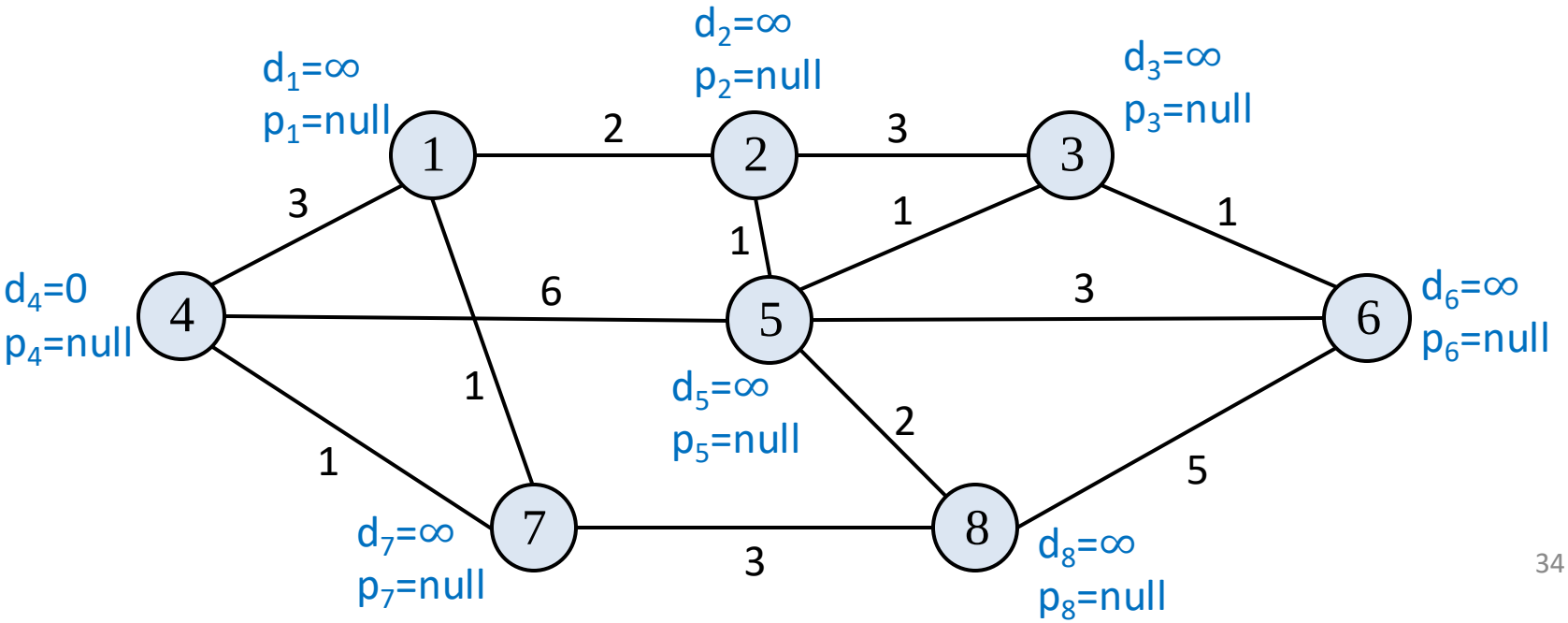
Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

- **Ερώτηση**: Ποιο είναι το συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο 4 στον κόμβο 6 και πόση είναι η απόσταση αυτή;
- **Hint**: Θα βρούμε το συντομότερο από τον κόμβο 4 προς όλους τους κόμβους. Σε κάθε βήμα θα ανανεώνουμε τη μικρότερη απόσταση από τον κόμβο 4 αν βρίσκουμε συντομότερο μονοπάτι, και σημειώνουμε τον προηγούμενο κόμβο στο καινούργιο μονοπάτι.



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

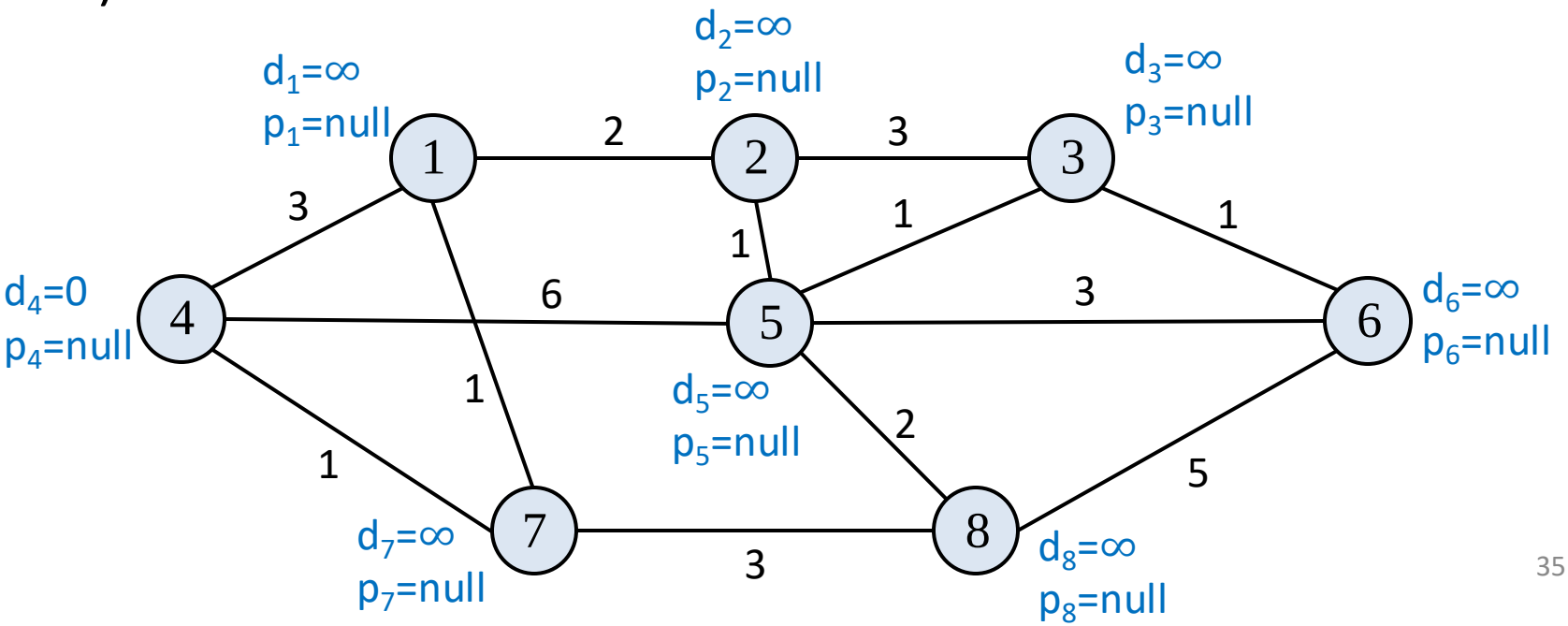
- Κρατάμε δύο μεταβλητές για κάθε κόμβο i:
  - d_i για τη μικρότερη ως τώρα απόσταση από τον κόμβο 4
  - p_i για τον parent στο συντομότερο ως τώρα μονοπάτι από τον κόμβο 4
- Αρχικοποίηση: ο κόμβος 4 έχει απόσταση 0 (από τον εαυτό του) και δεν έχει parent. Για τους υπόλοιπους κόμβους θέτουμε απόσταση ∞ και δεν έχουν parent αρχικά.



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

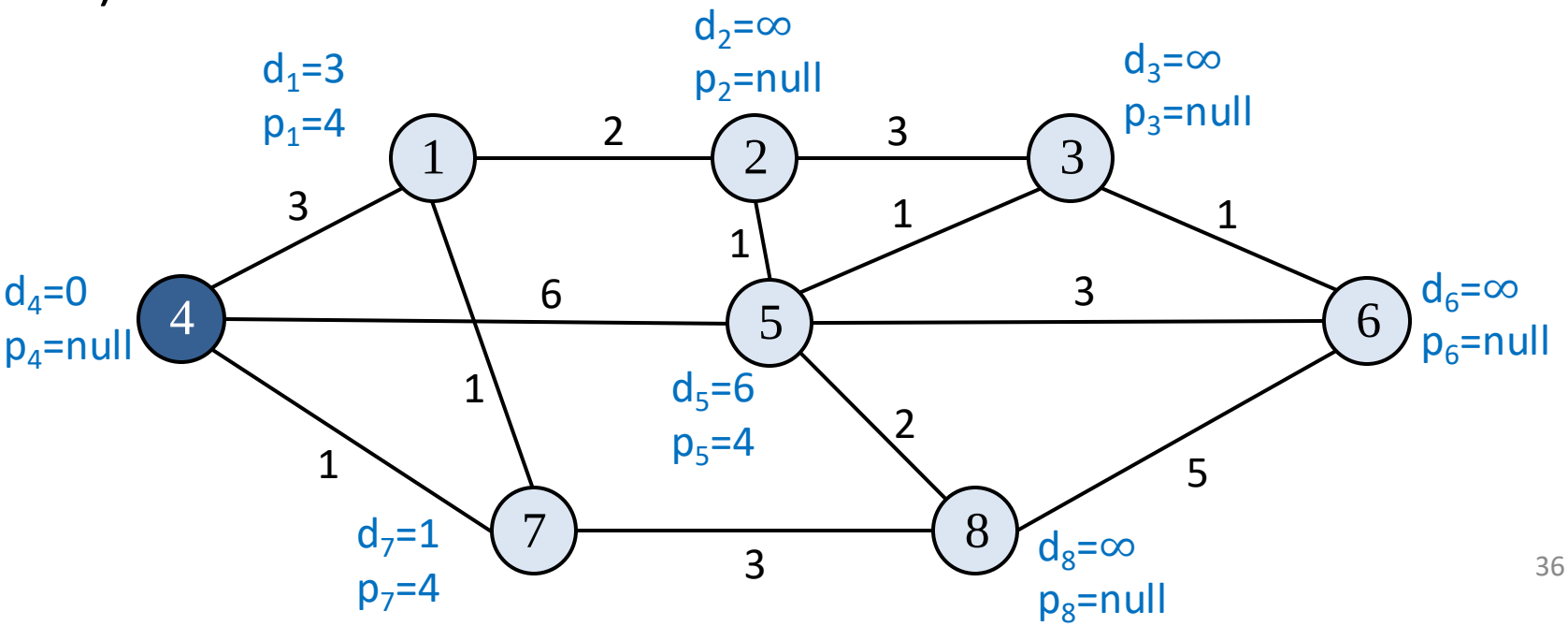
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

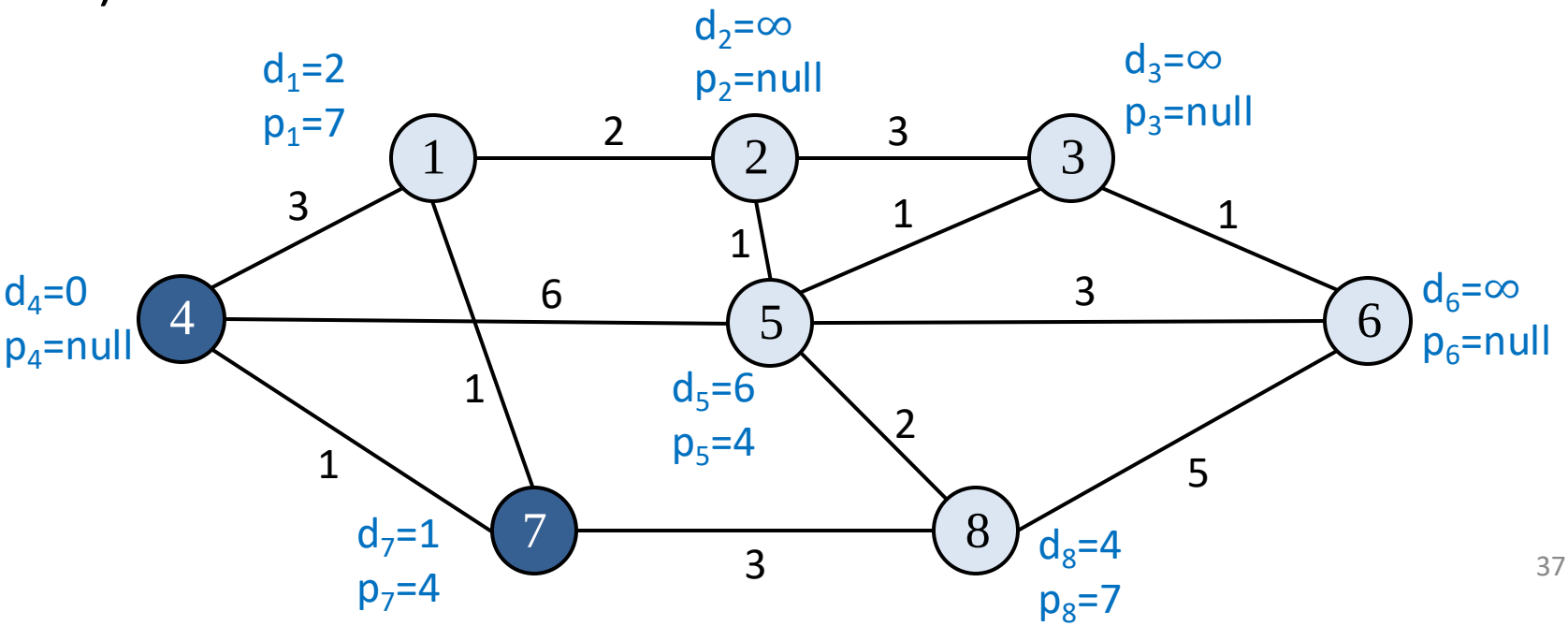
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

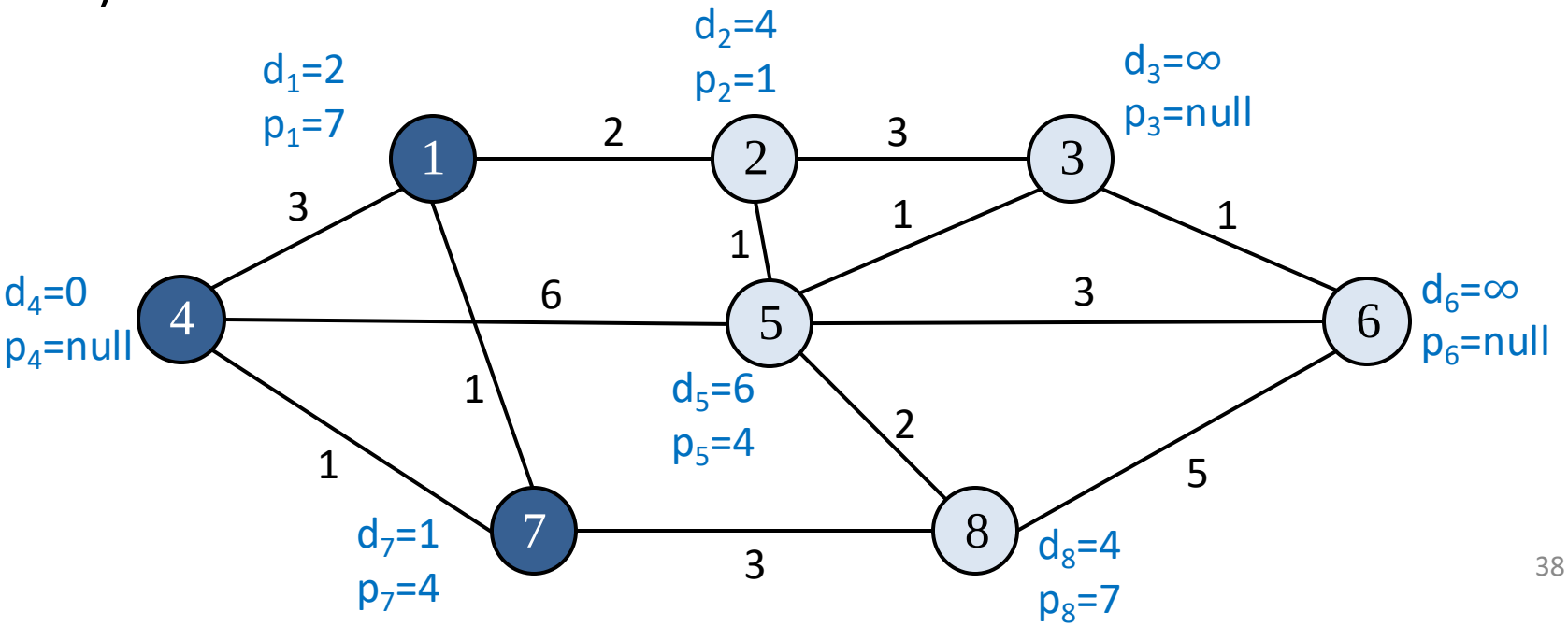
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

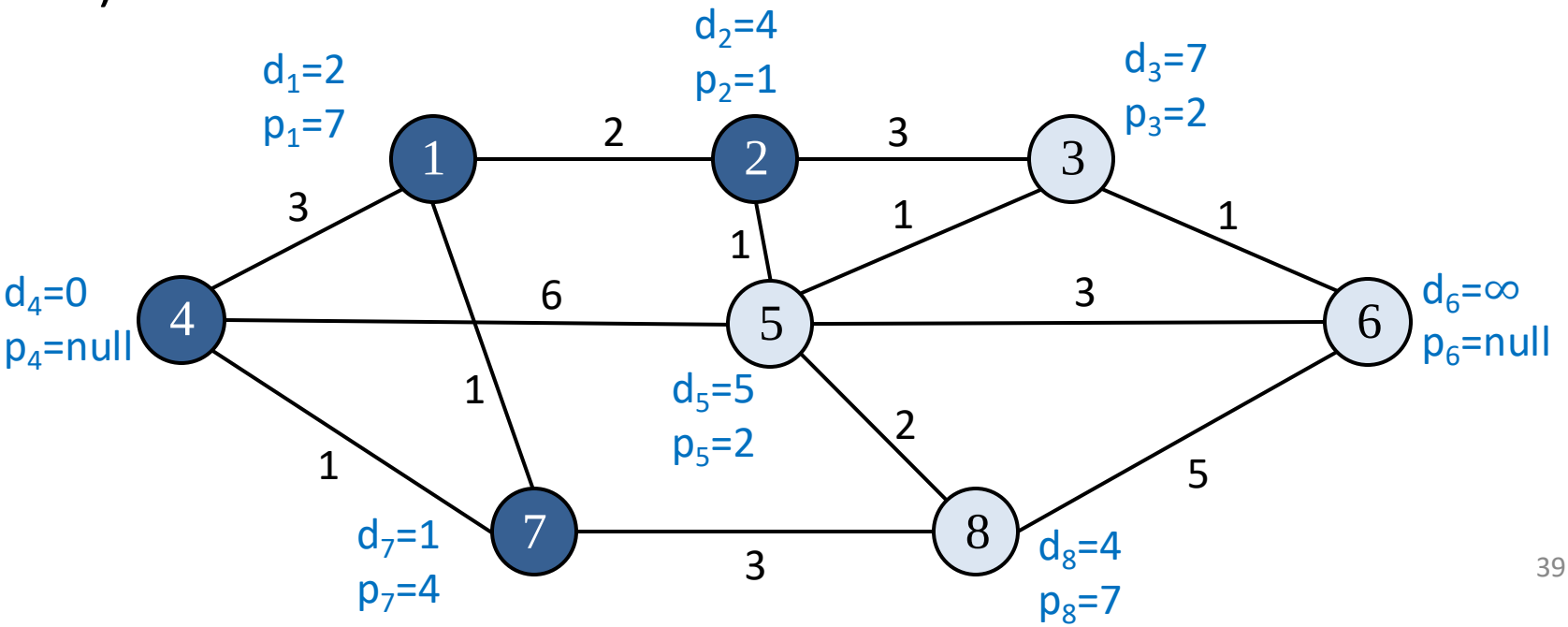
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

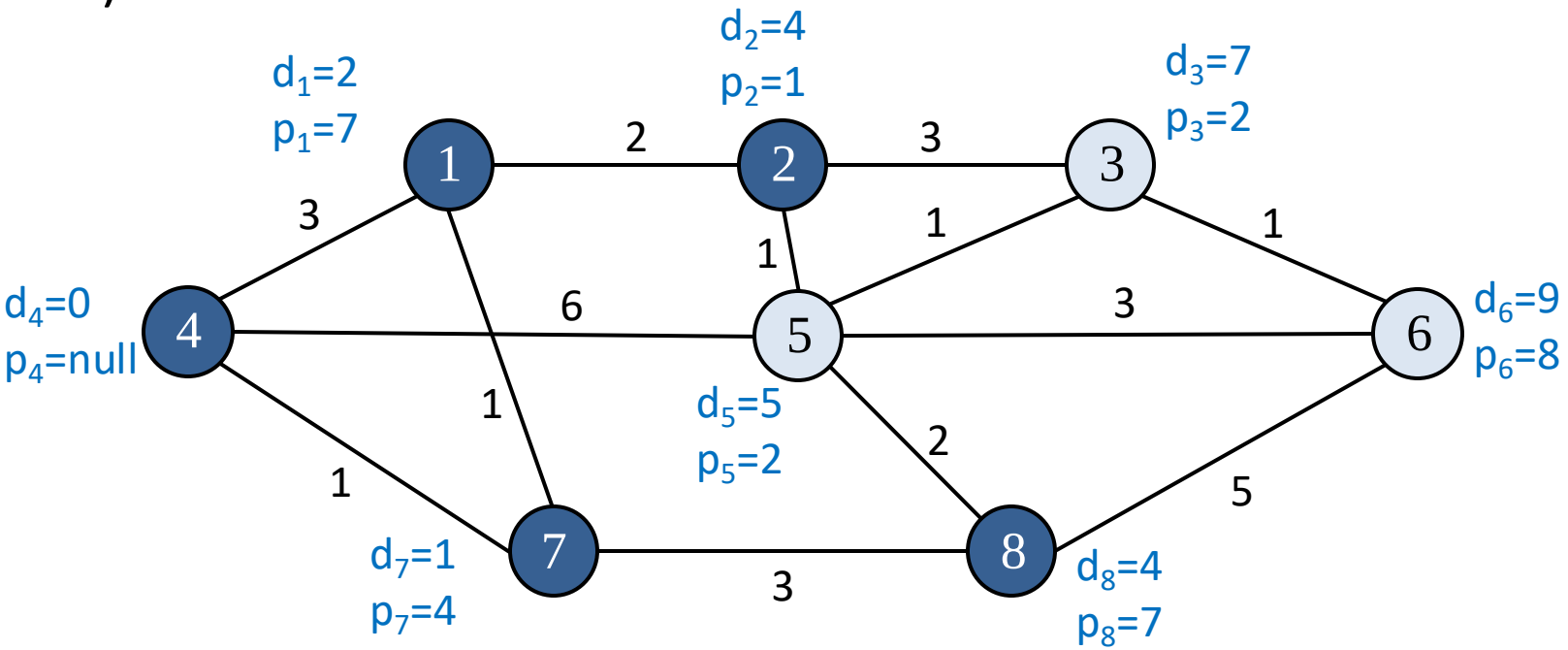
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

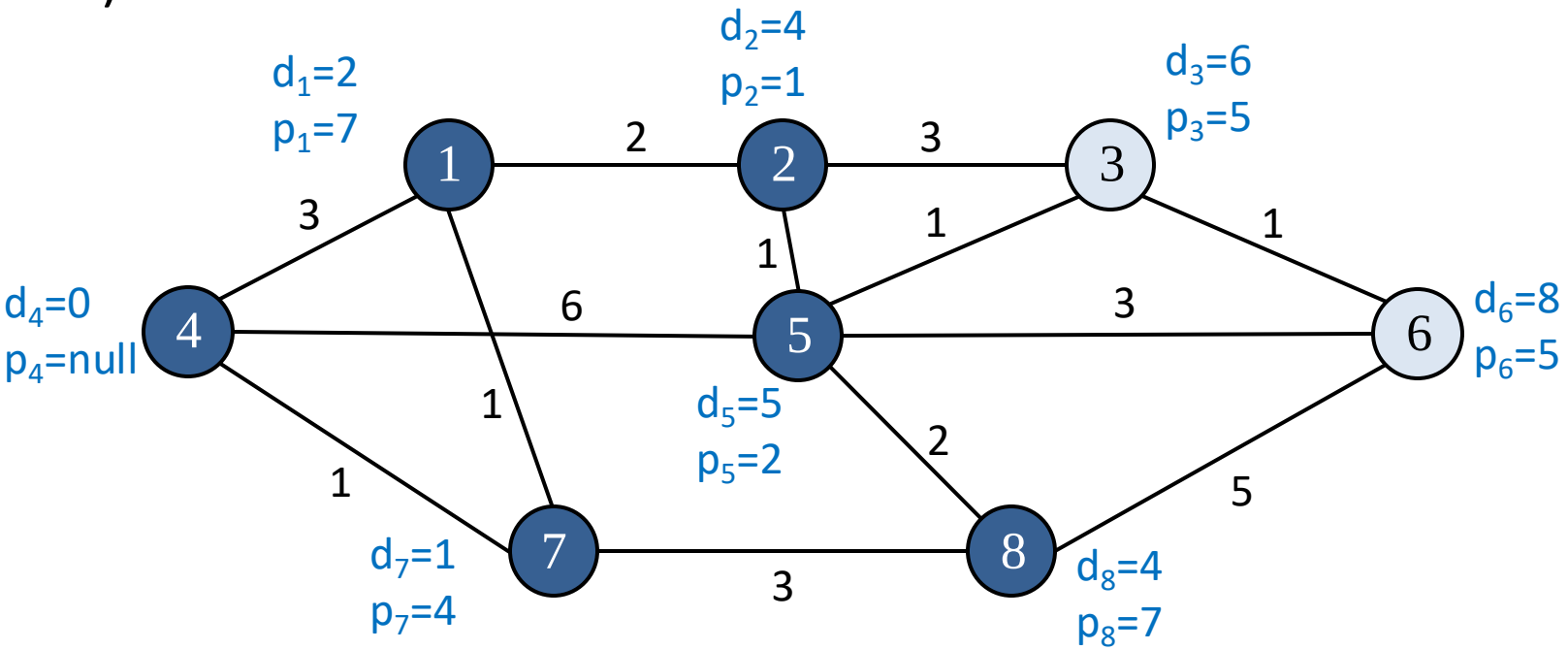
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

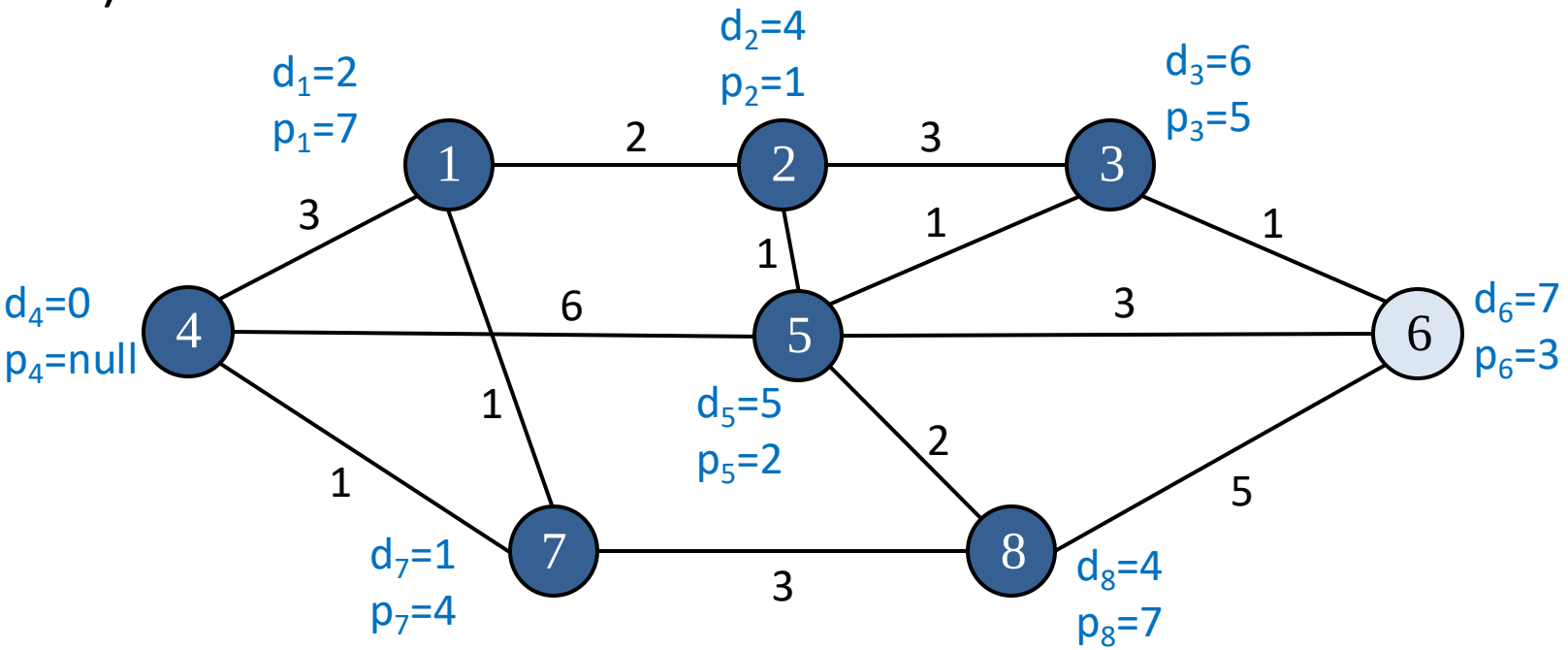
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

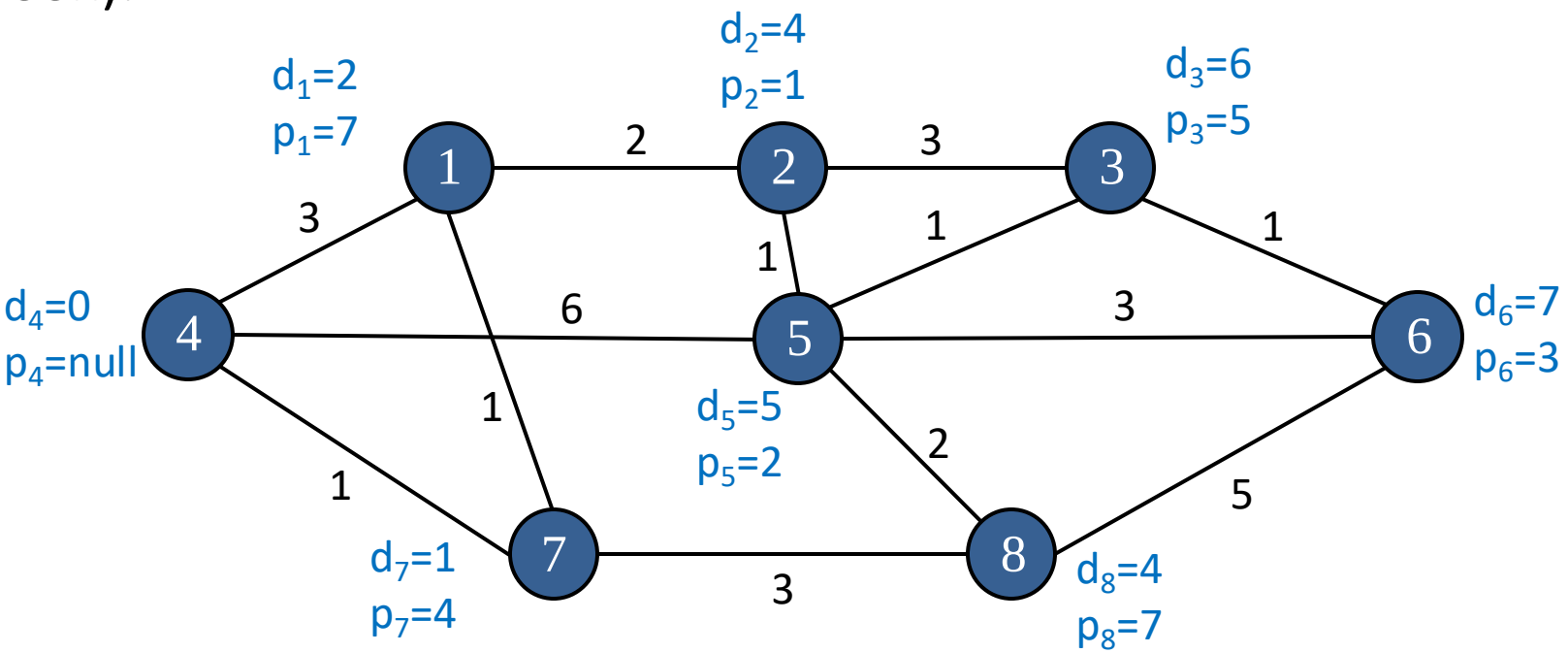
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Βήμα Αλγορίθμου:

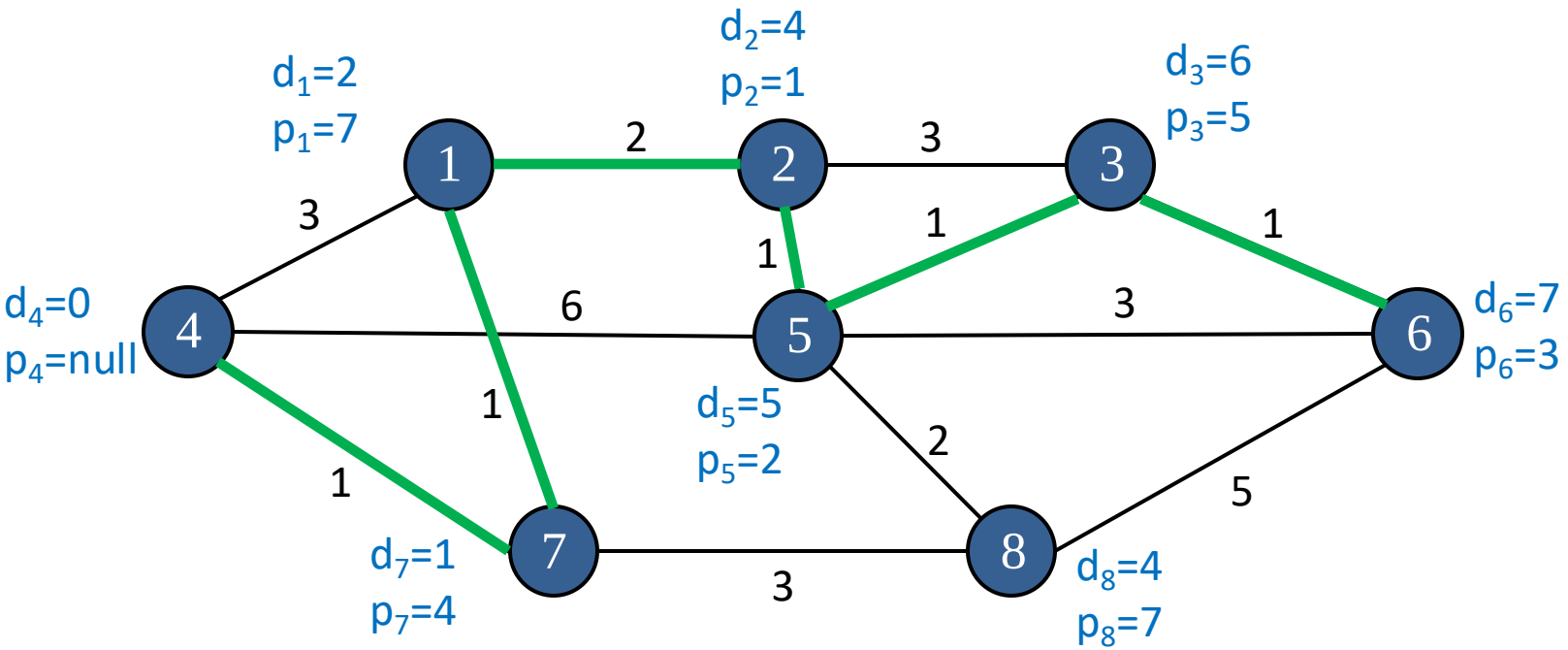
- Έστω i ο κόμβος με το μικρότερο d_i που δεν τον έχουμε κοιτάξει.
- Κάνε update τους γείτονες (που δεν έχεις κοιτάξει) του όταν μέσω του i είναι καλύτερο το μονοπάτι από αυτό που έχουν ως τώρα.
- Θεώρησε ότι έχεις κοιτάξει τον i για τα επόμενα βήματα (mark I as seen).



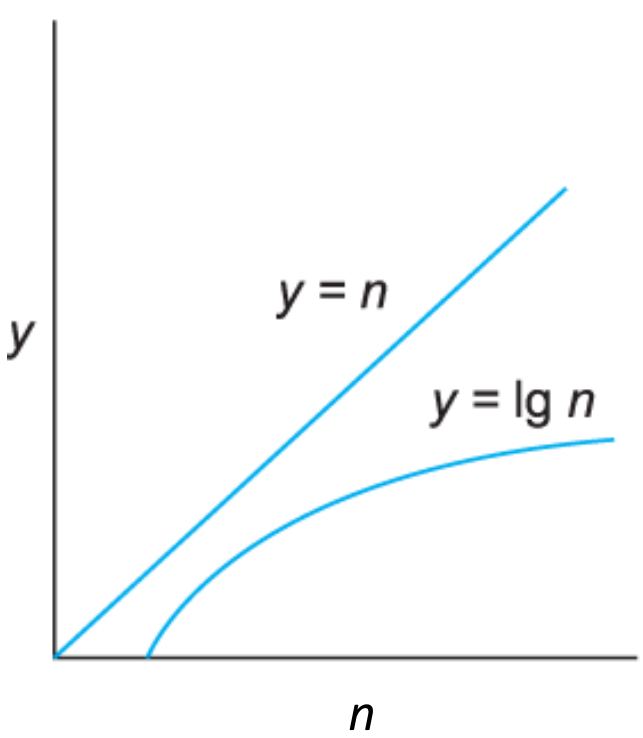
Συντομότερο Μονοπάτι (Shortest Path) Dijkstra's Algorithm

Ποιο είναι το συντομότερο μονοπάτι από το 4 στο 6;

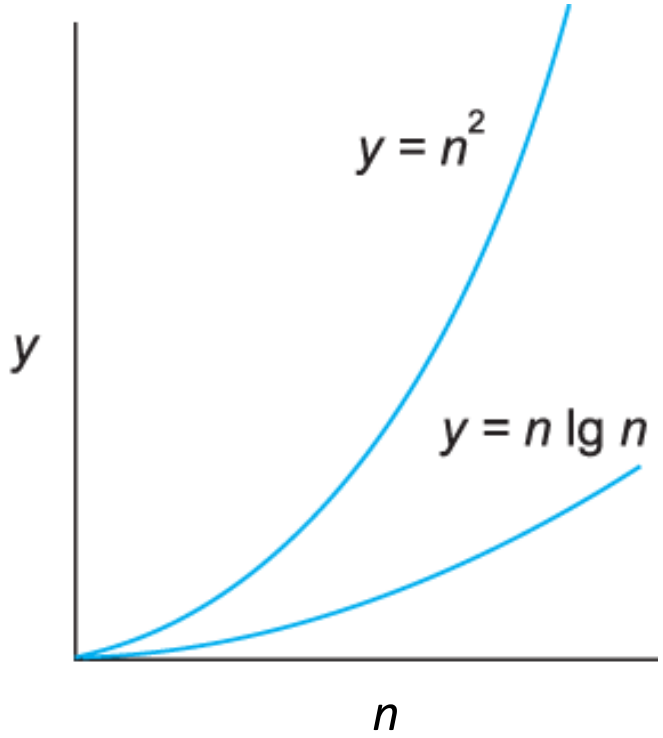
Απάντηση: Το βρίσκουμε κάνοντας backtrack με τους parents.



Γραφήματα των μαθηματικών παραστάσεων n, logn, nlogn και n^2



α. *n* και lg *n*



β. n^2 και $n \lg n$

logn: υπο-γραμμική συνάρτηση (sub-linear)
n^2: υπερ-γραμμική συνάρτηση (super-linear)

Χρόνος εκτέλεσης αλγορίθμων

μέγεθος εισόδου

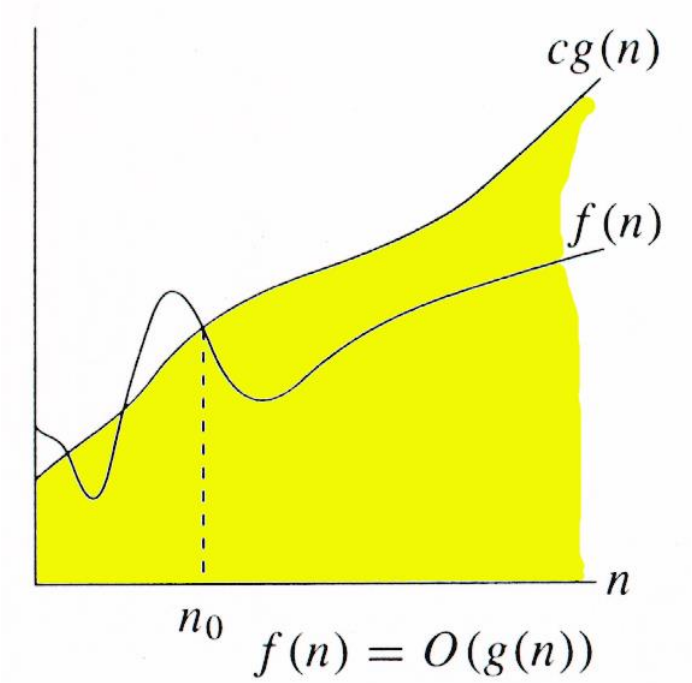
πολυπλοκότητα αλγορίθμου

n	$\log_2 n$	n	n^2	2^n
10	**3x10^{-9}**	**10^{-8}**	**10^{-7}**	**10^{-6}** sec
100	**7x10^{-9}**	**10^{-7}**	0.00001	4x10^{11} αιώνες
1000	**10^{-8}**	**10^{-6}**	0.001	*
10000	**1.3x10^{-8}**	**10^{-5}**	0.1	*
100000	**1.7x10^{-8}**	**0.0001**	10	*
1000000	**2x10^{-8}**	**0.001**	0.27 ώρες	*

1 βήμα = 1 nsec

Ασυμπτωτικός συμβολισμός O

- ΑΝΩ ΟΡΙΟ στην αύξηση μιας συνάρτησης.
- Έστω f(n) και g(n) συναρτήσεις, ώστε f,g : $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
- f(n) = O(g(n)) : Η f(n) δεν αυξάνεται πιο γρήγορα από την g(n)
- Ένα (σταθερό) πολλαπλάσιο της g(n) είναι άνω όριο στην f(n) για αρκετά μεγάλα n

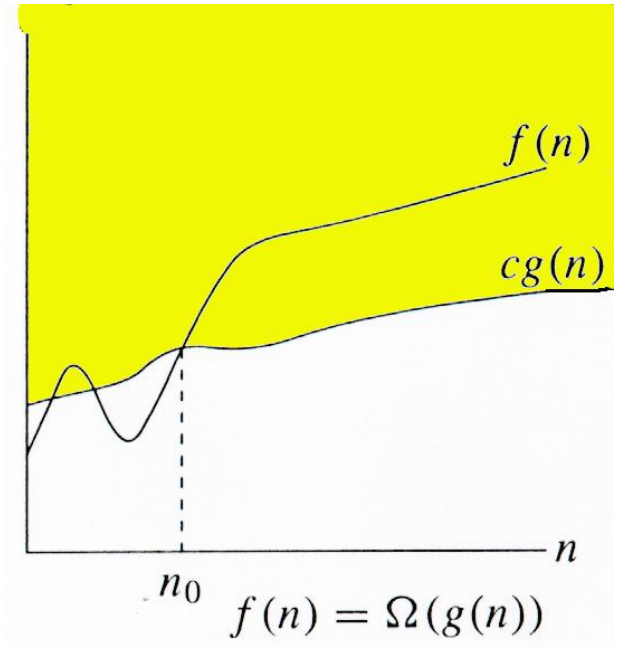


Πχ. 2n+1 = O(n)

$$\exists c > 0, n_o > 0, \text{ τέτοια ώστε } f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n > n_o$$

Ασυμπτωτικός συμβολισμός Ω

- ΚΑΤΩ ΟΡΙΟ στην αύξηση της συνάρτησης
- Έστω f(n) και g(n) συναρτήσεις, ώστε f,g : $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
- f(n) = Ω(g(n)) : Η f(n) δεν αυξάνεται πιο αργά από την g(n)
- Ένα (σταθερό) πολλαπλάσιο της g(n) είναι κάτω όριο στην f(n) για αρκετά μεγάλα n

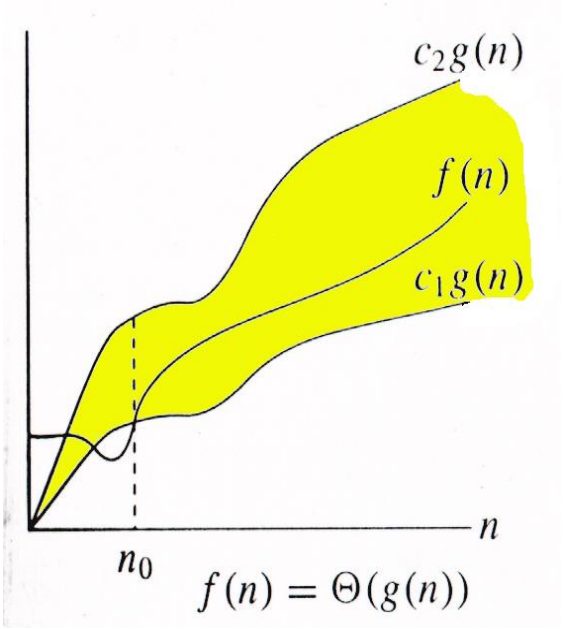


Πχ. n/2 - 1 = Ω(n)

$$\exists c > 0, n_o > 0, \text{ τέτοια ώστε } f(n) \geq c \cdot g(n), \forall n > n_o$$

Ασυμπτωτικός συμβολισμός Θ

- ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΟ στην αύξηση της συνάρτησης
- f(n) = Θ(g(n)) : Η f(n) δεν αυξάνεται ούτε πιο γρήγορα ούτε πιο αργά από την g(n)
- (σταθερά) πολλαπλάσια της g(n) είναι άνω και κάτω όρια στην f(n) για αρκετά μεγάλα n

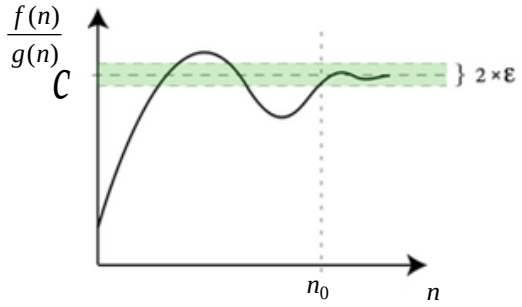


$$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=O(g(n)) \text{ και } f(n)=\Omega(g(n))$$

$\exists c_1, c_2 > 0, n_o > 0,$ τέτοια ώστε $c_2 \cdot g(n) \geq f(n) \geq c_1 \cdot g(n), \forall n > n_o$

Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί με χρήση ορίου

1) If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$, then $f(n) = \Theta(g(n))$



2) If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, then $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) \neq \Theta(g(n))$

3) If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, then $g(n) = O(f(n))$ and $g(n) \neq \Theta(f(n))$

Ασυμπτωτικοί συμβολισμοί

Τι τα θέλουμε όλα αυτά?

- Για να συγκρίνουμε αλγορίθμους
- Για να ξέρουμε αν ο αλγόριθμός μας αξίζει να υλοποιηθεί και να δοκιμαστεί
- Να ξέρουμε αν είναι γρήγορος (πολυωνυμικός = $O(n^k)$)

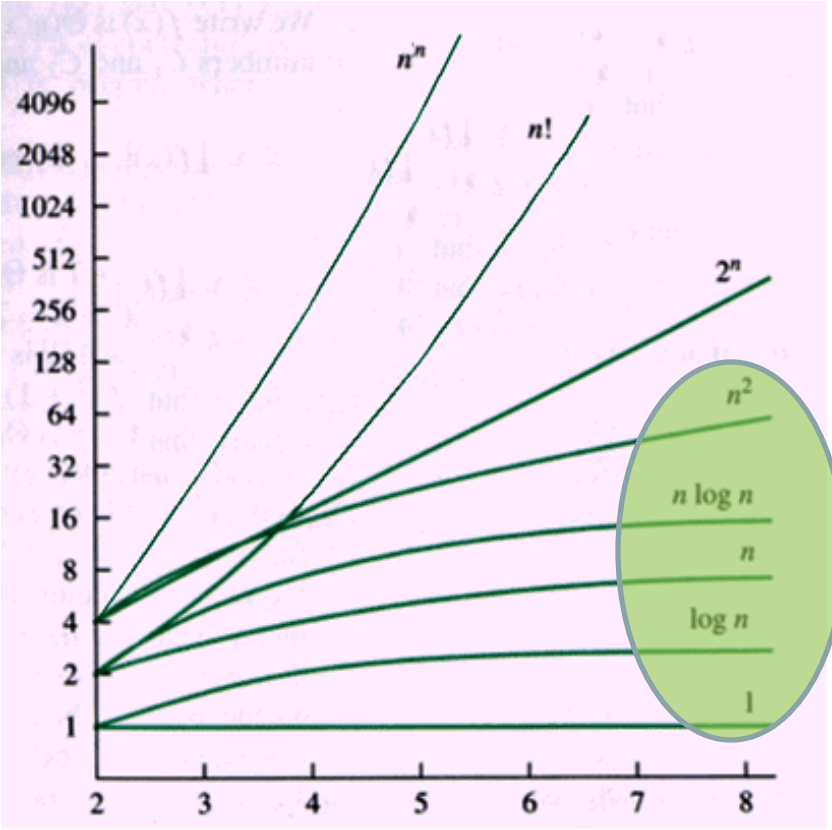
Ο υπολογισμός είναι απλός τελικά:

- Μετράμε τα βήματα του αλγορίθμου
- Πετάμε τις σταθερές
- Από τα πολυώνυμα κρατάμε μόνο τον όρο με το μεγαλύτερο βαθμό

Με λίγη εξάσκηση και κατανόηση, δεν χρειάζονται πράξεις, γίνεται αυτόματα...

Πολυωνυμική πολυπλοκότητα

- Αλγόριθμοι με πολυωνυμική πολυπλοκότητα $O(n^k)$:
  Γρήγοροι/αποτελεσματικοί/αποδοτικοί αλγόριθμοι



Περί πολυπλοκότητας…

Time complexity function	Size n					
	10	20	30	40	50	60
n	.00001 second	.00002 second	.00003 second	.00004 second	.00005 second	.00006 second
n^2	.0001 second	.0004 second	.0009 second	.0016 second	.0025 second	.0036 second
n^3	.001 second	.008 second	.027 second	.064 second	.125 second	.216 second
n^5	.1 second	3.2 seconds	24.3 seconds	1.7 minutes	5.2 minutes	13.0 minutes
2^n	.001 second	1.0 second	17.9 minutes	12.7 days	35.7 years	366 centuries
3^n	.059 second	58 minutes	6.5 years	3855 centuries	2×10^8 centuries	1.3×10^{13} centuries

Διάταξη πολυπλοκότητας

- $O(1)$ – **constant**
- $O(\log n)$ – **logarithmic**
- $O(\log^k n)$ **– poly-logarithmic**
- $O(n^{1/2})$
- $O(n)$ – **linear**
- $O(n \log n)$
- $O(n^2)$ – **quadratic**
- $O(n^3)$ - **cubic**
- $O(n^k)$ – **polynomial**
- $O(2^n)$ – **exponential**
- $O(a^n)$
- $O(n!)$
- $O(n^n)$

Παραδείγματα πολυπλοκότητας αλγορίθμων

1. Εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων a και b, διάστασης n το καθένα
   - O(n). Κάθε όρος του a πολλαπλασιάζεται με έναν μόνο όρο του b.
2. Δίνεται σύνολο S n θετικών ακεραίων και ένας ακέραιος M. **Υπάρχει υποσύνολο A του S, με k στοιχεία και άθροισμα στοιχείων = M;**
   - Βρίσκουμε όλα τα υποσύνολα k στοιχείων του S και για καθένα, προσθέτουμε τα στοιχεία του και ελέγχουμε αν το άθροισμα ισούται με M
   - Το πλήθος των υποσυνόλων που πρέπει να ελέγξουμε είναι όλοι οι συνδυασμοί των n ανά k που είναι $n!/(n-k)!k! \leq n^k / k! = O(n^k)$.
3. Δίνεται σύνολο S, n θετικών ακεραίων και ένας ακέραιος M. **Υπάρχει υποσύνολο A του S με άθροισμα στοιχείων = M;**
   - Βρίσκουμε όλα τα υποσύνολα του S και για κάθε ένα προσθέτουμε τα στοιχεία του και ελέγχουμε αν το άθροισμα ισούται με M.
   - Πρέπει να ελέγξουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα του S, που είναι 2^n και για κάθε ένα να προσθέσουμε τα στοιχεία του, άρα πολυπλοκότητα $\Omega(2^n)$.

Θεωρία Παιγνίων

- Είναι η επιστήμη που μελετά ανταγωνιστικά περιβάλλοντα, π.χ. διαμοιρασμός πόρων, όπου οι οντότητες που συμμετέχουν μπορούν να δρουν στρατηγικά.
- Η συμπεριφορά ενός συστήματος εξαρτάται από την αλληλεπίδραση αυτών των οντοτήτων.
- **Γιατί ενδιαφέρει την πληροφορική;**
  - Αλγοριθμική θεωρία παιγνίων: η τομή της θεωρίας παιγνίων με την πληροφορική, π.χ. πολυπλοκότητα εύρεσης της βέλτιστης στρατηγικής.
  - Τέτοιου είδους συστήματα αποτελούν μέρος της τεχνολογικής υποδομής και εμφανίζονται και στην πληροφορική, π.χ. διαμοιρασμός πόρων στο Internet.

Παράδειγμα1: Prisoner's Dilemma

- Δύο ύποπτοι ανακρίνονται σε ξεχωριστά δωμάτια για ένα έγκλημα που έχουν διαπράξει
- Αν δεν ομολογήσουν (defect: D), η αστυνομία έχει κάποια στοιχεία για να τους καταδικάσει για ένα πλημμέλημα, δηλαδή 1 χρόνο φυλακή ο καθένας
- Αν ομολογήσουν και οι 2 (confess: C), πάνε φυλακή για 3 χρόνια ο καθένας
- Αν ομολογήσει μόνο ο ένας από τους 2, τότε αυτός αφήνεται ελεύθερος, και ο άλλος πάει φυλακή 5 χρόνια
- Οι 2 ύποπτοι δεν μπορούν να επικοινωνήσουν κατά τη διάρκεια της ανάκρισης και ενδιαφέρονται μόνο για τη δική τους ποινή

Παράδειγμα 1: Prisoner's Dilemma

Prisoner 1 \ Prisoner 2	D	C
D	1, 1	0, 5
C	5, 0	3, 3

Οι 2 ύποπτοι δεν μπορούν να επικοινωνήσουν κατά τη διάρκεια της ανάκρισης και ενδιαφέρονται μόνο για τη δική τους ποινή.

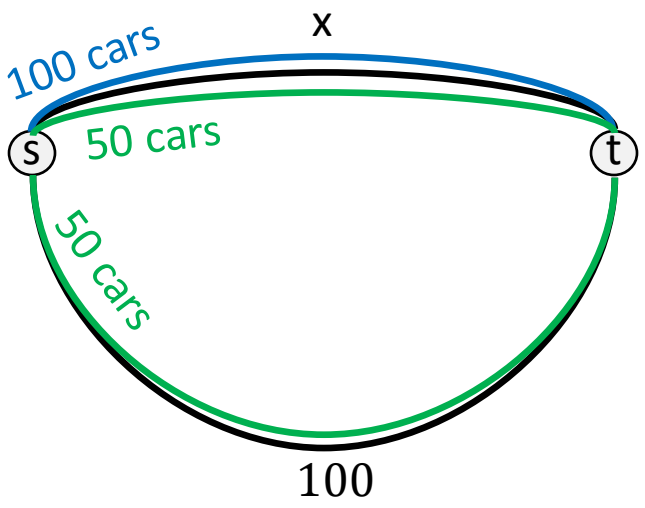
Ο ύποπτος 1 προτιμάει να ομολογήσει (C) σε κάθε περίπτωση, δηλαδή **ό,τι** και να επιλέξει ο άλλος. Το ίδιο και ο ύποπτος 2.

Το στρατηγικό προφίλ (C,C) λέγεται **σημείο ισορροπίας κατά Nash (Nash equilibrium)**.

Παράδειγμα 2: Congestion Games

- 100 αυτοκίνητα θέλουν να πάνε από το s στο t.
- Υπάρχουν δύο επιλογές:
  - Ένας σύντομος αλλά στενός δρόμος, όπου ο χρόνος για να τον διανύσει κάποιος εξαρτάται από την κίνηση: αν υπάρχουν x αυτοκίνητα χρειάζεται χρόνο x λεπτά.
  - Ένας φαρδύς περιφερειακός αυτοκινητόδρομος που δεν πιάνει κίνηση, αλλά είναι πολύ πιο μακρύς: για να τον διανύσει κάποιος χρειάζεται χρόνο 100 λεπτά.
- Ποιον δρόμο θα διαλέγατε για να πάτε πιο γρήγορα;

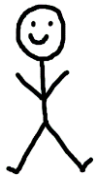
Input: 100 cars



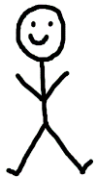
Αθροιστική καθυστέρηση:
100*100 = 10000
(Nash equilibrium)

Αθροιστική καθυστέρηση:
50*50+50*100=7500
(βέλτιστη λύση)

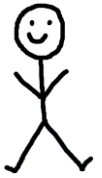
Παράδειγμα 3: Δημοπρασίες (Auctions)



v_1=100 €



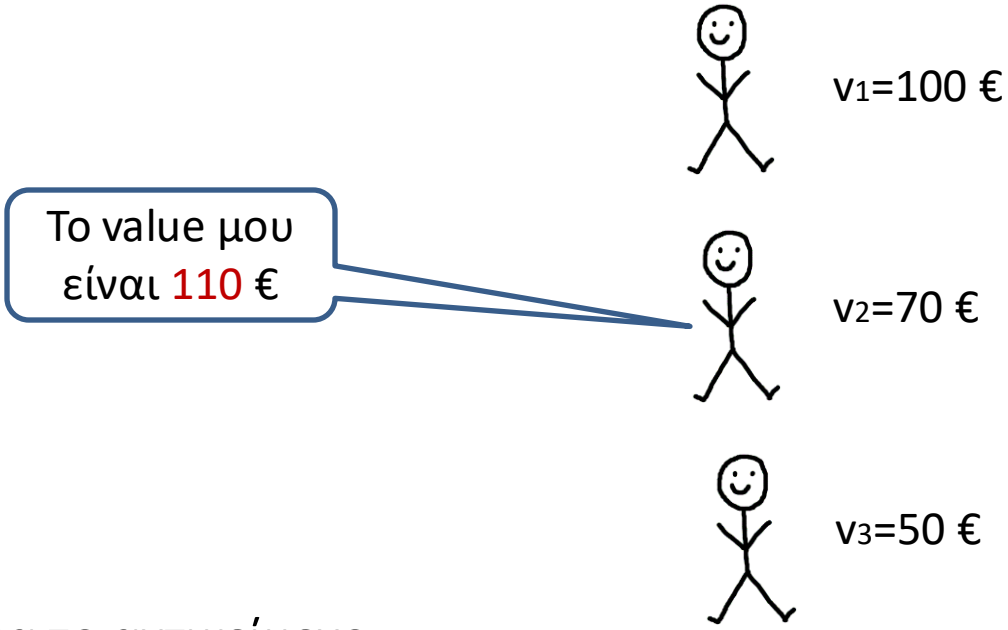
v_2=70 €



v_3=50 €

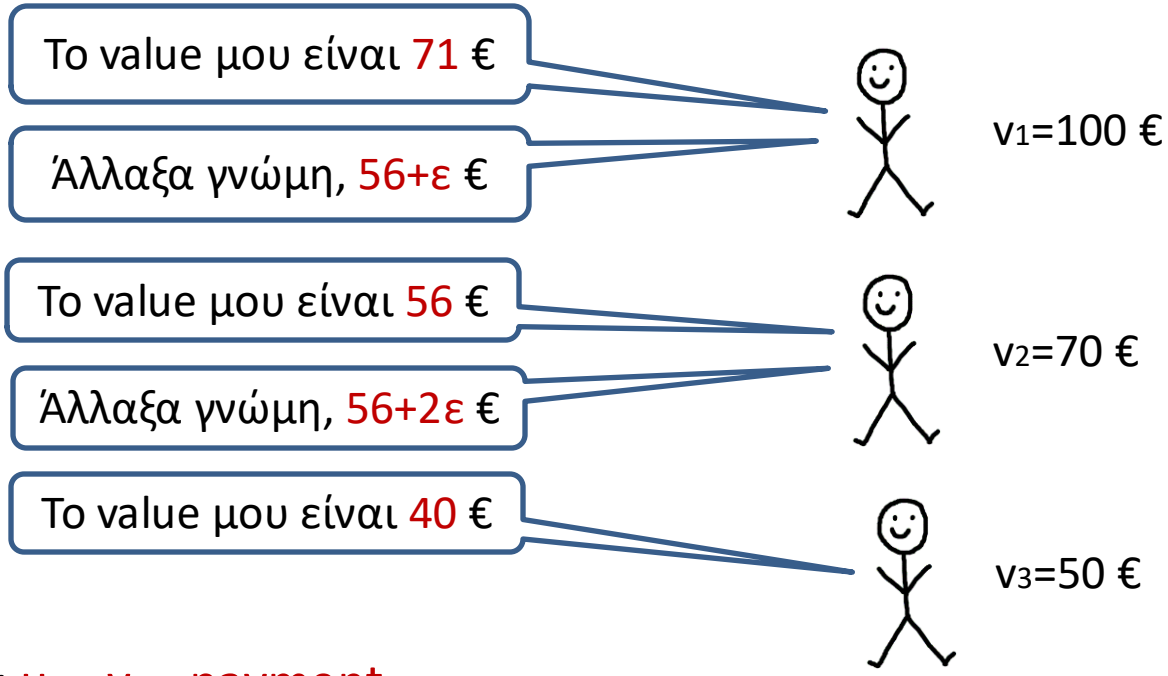
- v_i : αξία (value) του agent i για το αντικείμενο
- **Στόχος: Να δώσουμε το αντικείμενο στον agent με το μεγαλύτερο value.**
- Πρόβλημα: Δεν γνωρίζουμε τα values!
- Μπορούμε να ρωτήσουμε τα values

Παράδειγμα 3: Δημοπρασίες (Auctions)



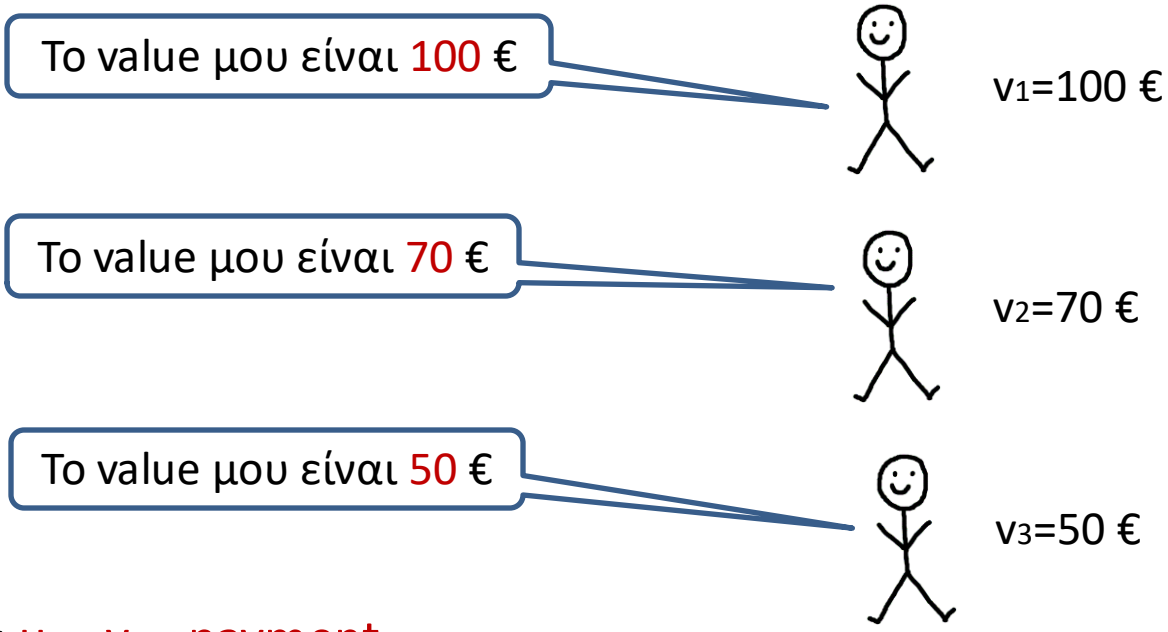
- v_i : αξία (value) του agent i για το αντικείμενο
- **Στόχος: Να δώσουμε το αντικείμενο στον agent με το μεγαλύτερο value.**
- Πρόβλημα: Δεν γνωρίζουμε τα values!
- Μπορούμε να ρωτήσουμε τα values
  - Αλλά μπορεί να μας πουν ψέματα. Ποιος;
  - Μπορούμε να ζητήσουμε να πληρώσουν. Πόσο;
  - Χρησιμότητα (utility): $u_i = v_i - payment_i$

Παράδειγμα 3: First Price Auction



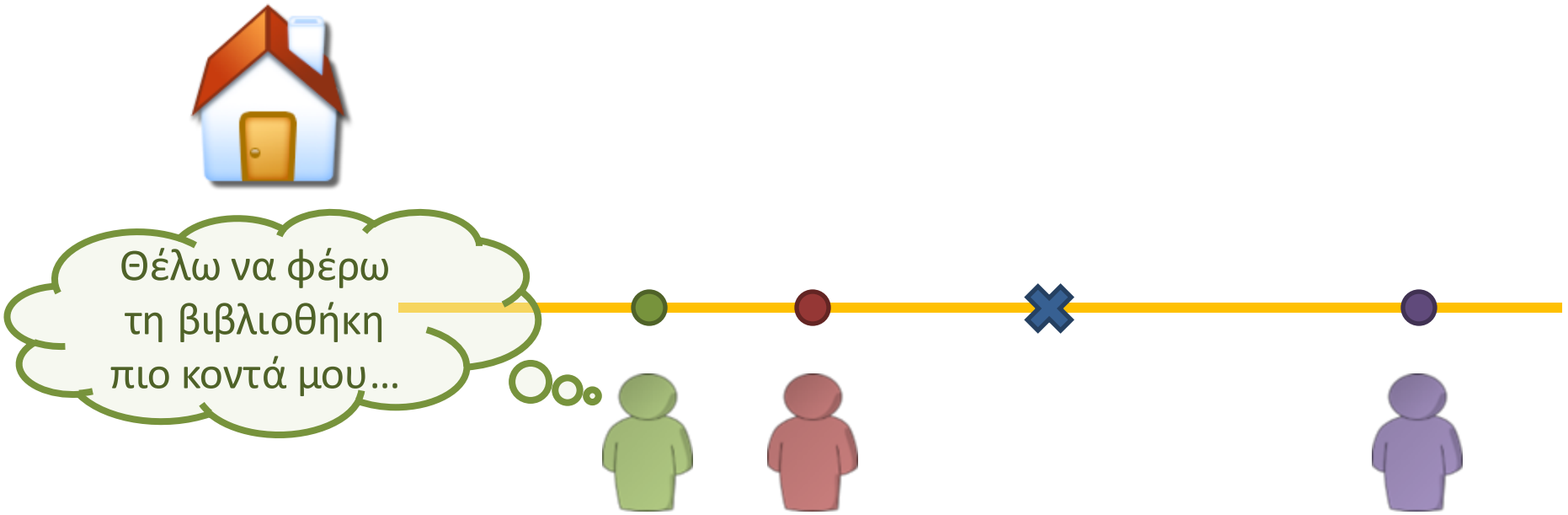
- Χρησιμότητα (utility): $u_i = v_i - payment_i$
- Να πληρώσει (αυτός που δήλωσε το μεγαλύτερο) το ποσό που δήλωσε
- Αν καταλήξουν σε σημείο ισορροπίας, όντως θα δώσουμε το αντικείμενο σε αυτόν με το μεγαλύτερο value.
- **Μπορούμε όμως να τους «αναγκάσουμε» να πουν την αλήθεια;;;**

Παράδειγμα 3: Second Price Auction



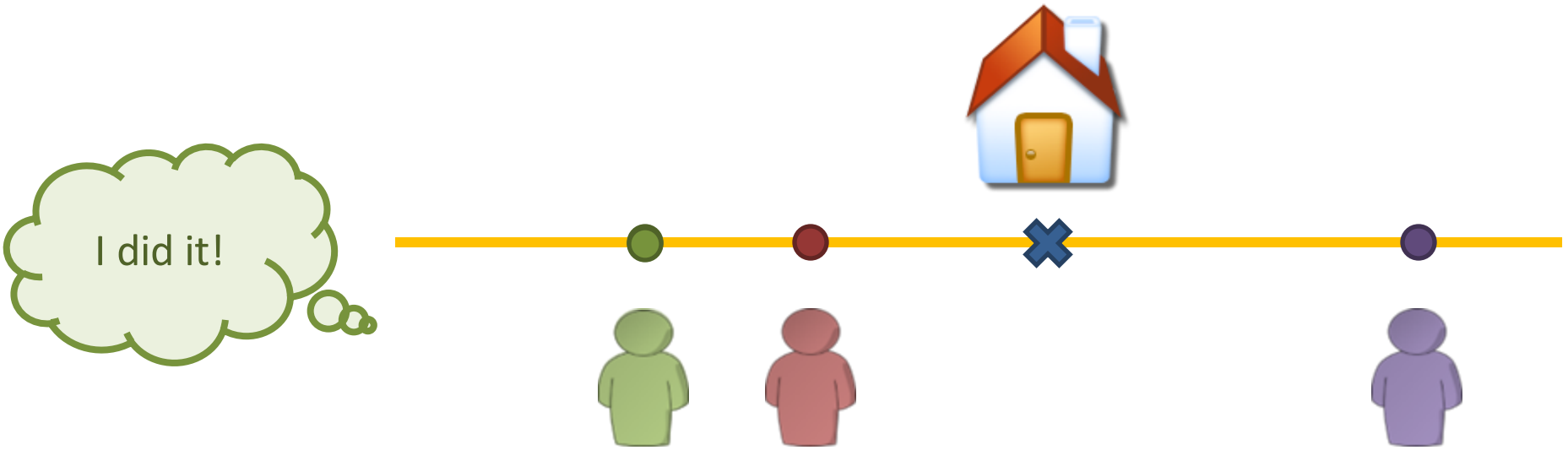
- Χρησιμότητα (utility): $u_i = v_i - payment_i$
- Να πληρώσει (αυτός που δήλωσε το μεγαλύτερο) τη 2η μεγαλύτερη δήλωση!
- **Δεν μπορούν να αυξήσουν το utility τους λέγοντας ψέματα!**
- Αυτός ο μηχανισμός είναι **truthful**!
- Vickrey auction (William Vickrey - Nobel Οικονομικών 1996).
  - Generalization to many items: VCG (Vickrey-Clarke-Groves)

Παράδειγμα 4: Facility location



Θέλουμε να χτίσουμε μία δημοτική βιβλιοθήκη σε μία θέση πάνω στη γραμμή.
Κάθε κάτοικος έχει μία προσωπική προτίμηση για την τοποθεσία της.
Στόχος: Να επιλέξουμε μία τοποθεσία όπου να ικανοποιεί τους κατοίκους,
π.χ. ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης από όλες τις προτιμήσεις.
Πρόβλημα: Δεν γνωρίζουμε τις προτιμήσεις τους! Μπορούμε να τις ρωτήσουμε.
Βρες τη βέλτιστη τοποθεσία **με βάση τις απαντήσεις τους**: στη μέση των δύο άκρων.

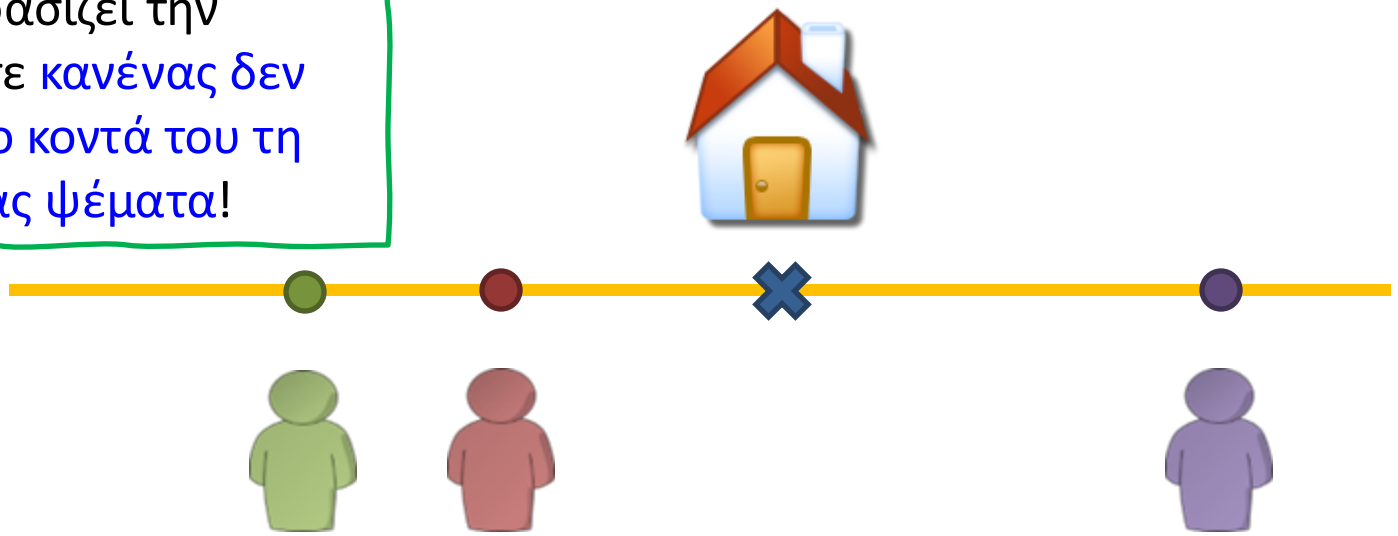
Παράδειγμα 4: Facility location



Θέλουμε να χτίσουμε μία δημοτική βιβλιοθήκη σε μία θέση πάνω στη γραμμή.
Κάθε κάτοικος έχει μία προσωπική προτίμηση για την τοποθεσία της.
Στόχος: Να επιλέξουμε μία τοποθεσία όπου να ικανοποιεί τους κατοίκους,
π.χ. ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης από όλες τις προτιμήσεις.
Πρόβλημα: Δεν γνωρίζουμε τις προτιμήσεις τους! Μπορούμε να τις ρωτήσουμε.
Βρες τη βέλτιστη τοποθεσία **με βάση τις απαντήσεις τους**: στη μέση των δύο άκρων.

Παράδειγμα 4: Facility location

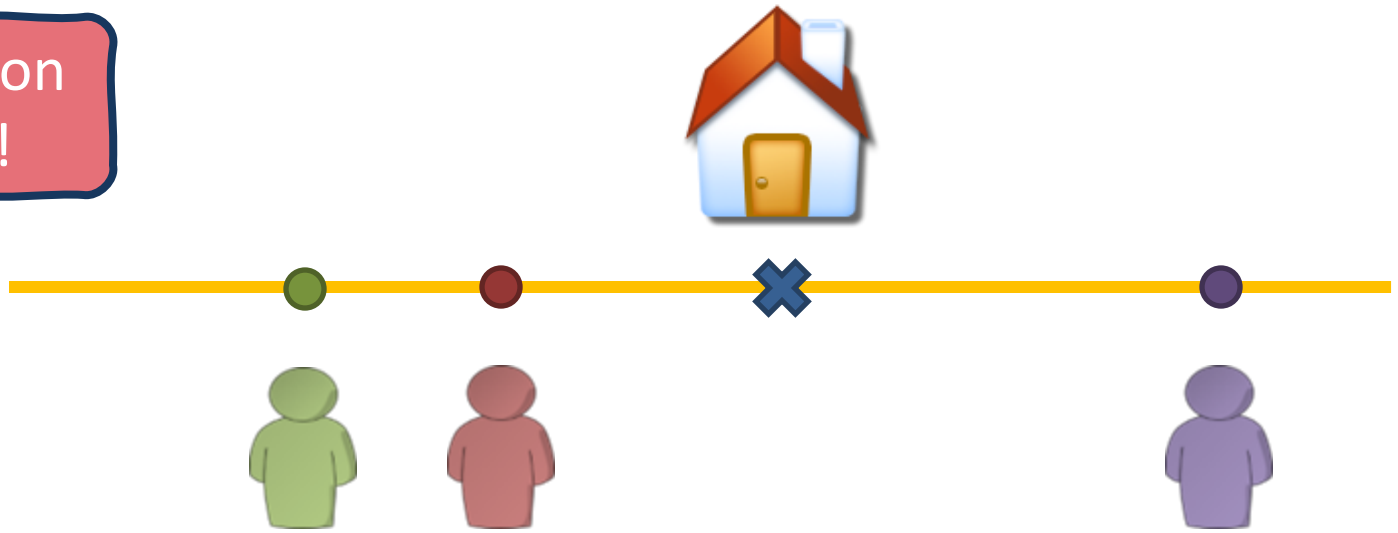
Βρες φιλαλήθη/truthful μηχανισμό: ο μηχανισμός αποφασίζει την τοποθεσία έτσι ώστε κανένας δεν μπορεί να φέρει πιο κοντά του τη βιβλιοθήκη λέγοντας ψέματα!



Θέλουμε να χτίσουμε μία δημοτική βιβλιοθήκη σε μία θέση πάνω στη γραμμή.
Κάθε κάτοικος έχει μία προσωπική προτίμηση για την τοποθεσία της.
Στόχος: Να επιλέξουμε μία τοποθεσία όπου να ικανοποιεί τους κατοίκους,
π.χ. ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης από όλες τις προτιμήσεις.
Πρόβλημα: Δεν γνωρίζουμε τις προτιμήσεις τους! Μπορούμε να τις ρωτήσουμε.
Βρες τη βέλτιστη τοποθεσία **με βάση τις απαντήσεις τους**: στη μέση των δύο άκρων.
Οι κάτοικοι μπορεί να μας πουν ψέματα!!!

Παράδειγμα 4: Facility location

2 approximation mechanism!



Στόχος: να ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης από όλες τις προτιμήσεις με φιλαλήθη τρόπο.

Καλύτερος φιλαλήθης μηχανισμός: διάλεξε τη θέση του median
(Υπάρχουν και άλλοι ισοδύναμοι, όπως διάλεξε **την πιο δεξιά θέση**)

Για όποιον/α ενδιαφέρεται να το ψάξει περισσότερο

- Ποιους άλλους αλγόριθμους ταξινόμησης γνωρίζουμε;
- Να βρείτε κι άλλα προβλήματα που χρησιμοποιούν την τεχνική διαίρει και βασίλευε. Ποια είναι η πολυπλοκότητά τους.
- Τι είναι οι άπληστοι (greedy) αλγόριθμοι;
- Τι είναι ο δυναμικός προγραμματισμός; Υπάρχει πιο αποδοτικός αλγόριθμος για το πρόβλημα 3 της διαφάνειας 55;
- Τι είναι ο γραμμικός προγραμματισμός;
- Τι σημαίνει P vs NP;
- Αναζητήστε εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων

Χρήσιμο link: https://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem

Τέλος Κεφαλαίου 5

- Μιλήσαμε για αλγορίθμους: έννοιες, βασικοί αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα

- Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με δομές δεδομένων και πώς χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό αποδοτικών αλγορίθμων.