ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ — ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ — SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY — ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ — DEPARTMENT OF INFORMATICS

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

Εργασίες για το σπίτι (δεν βαθμολογούνται)

Ερώτηση 1.

Δείξτε ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1\,.$$

Απάντηση (με μαθηματική επαγωγή):
Βάση επαγωγής: Για $n = 0$, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$. Επομένως η παραπάνω πρόταση ισχύει για $n = 0$.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή έστω ότι ισχύει $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ (**επαγωγική υπόθεση**). Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι ισχύει $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$.
Πράγματι, για $n = k + 1$,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1\,,$$

όπου η 2η ισότητα ισχύει εξαιτίας της επαγωγικής υπόθεσης. $\square$

Ερώτηση 2.

Δείξτε ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

Απάντηση (με μαθηματική επαγωγή):
Βάση επαγωγής: Για $n = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Επομένως η παραπάνω

πρόταση ισχύει για $n = 1$.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή έστω ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{2^k}$ (**επαγωγική υπόθεση**). Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$.
Πράγματι, για $n = k+1$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\,,$$

όπου η 2η ισότητα ισχύει εξαιτίας της επαγωγικής υπόθεσης. □

Ερώτηση 3.

Δείξτε ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}\,.$$

Απάντηση: Γράφουμε το $\sum_{i=1}^{n} i$ βάζοντας τους όρους ανάποδα ως εξής: $\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1$. Προσθέτουμε τον κάθε όρο στη σειρά με τον αντίστοιχο όρο στην αρχική έκφραση και έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 \quad + \ldots + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + \quad 2 \quad + 1$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + (4+(n-3)) + \ldots + ((n-1)+2) + (n+1) = n\cdot(n+1)$$

Διαιρώντας με το 2 τα δύο μέλη έχουμε $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$. □

Απάντηση (με μαθηματική επαγωγή):
Βάση επαγωγής: Για $n = 1$, $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{(1+1)\cdot 1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$. Επομένως η παραπάνω πρόταση ισχύει για $n = 1$.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή έστω ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{(k+1)\cdot k}{2}$ (**επαγωγική υπόθεση**). Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}$.
Πράγματι, για $n = k+1$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{(k+1)\cdot k}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)\cdot k}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\,,$$

όπου η 2η ισότητα ισχύει εξαιτίας της επαγωγικής υπόθεσης. □

Ερώτηση 4.

Δείξτε ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\sum_{i=a}^{b} i = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2}\,.$$