Συνέχεια από προηγούμενο:

(q_1^*, q_2^*) είναι Σ.Σ.Ι $\iff \begin{cases} q_1^* \in BR_1(q_2^*) \\ q_2^*(H) \in BR_2(q_1^*, H) \\ q_2^*(L) \in BR_2(q_1^*, L) \end{cases} \iff \begin{cases} q_1^* = \dfrac{a-c-q_2^*(H)\theta - q_2^*(L)(1-\theta)}{2} \\ q_2^*(H) = \dfrac{a-c_H-q_1^*}{2} \\ q_2^*(L) = \dfrac{a-c_L-q_1^*}{2} \end{cases} \iff$

SOS

$q_2^*(H)$ να είναι βέλτιστη απάντηση του 2 δεδομένου ότι ο 1 είναι H και παίζει q_1^*

$$\iff \begin{cases} q_1^* = \dfrac{a-c-\frac{a-c_H-q_1^*}{2} - \frac{a-c_L-q_1^*}{2}}{2} \\ q_2^*(H) = \dfrac{a-c_H-q_1^*}{2} \\ q_2^*(L) = \dfrac{a-c_L-q_1^*}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} q_1^* = \dfrac{a-2c+\theta c_H+(1-\theta)c_H}{3} \\ q_2^*(H) = \dfrac{a-2c_H-c}{3} + \dfrac{1-\theta}{6}(c_H-c_L) \\ q_2^*(L) = \dfrac{a-2c_L+c}{3} - \dfrac{\theta}{6}(c_H-c_L) \end{cases}$$

3.2 Περιγραφή Στατικού Μπεϋζιανού Παιγνίου σε Κανονική Μορφή

Ορισμός: Η κανονική μορφή ενός στατικού μπεϋζιανού παιγνίου περιέχει:

1) τα σύνολα αποφάσεων των παικτών. $A_1, A_2, \dots, A_n$ $\left(\begin{matrix} A_1 = \{q_1 : q_1 \in [0,1]\} \\ A_2 = \{q_2 : q_2 \in [0,1]\} \end{matrix}\right)$ δυνατές τιμές αποφάσεων

2) τα σύνολα με τους δυνατούς τύπους κάθε παίκτη $T_1, T_2, \dots, T_n$ $(T_2 = \{H, L\})$
(Ο πραγματικός τύπος ενός παίκτη είναι γνωστός σε αυτόν αλλά όχι στους υπόλοιπους παίκτες).

3) τις πεποιθήσεις κάθε παίκτη για τους τύπους των υπόλοιπων παικτών. $P_1, P_2, \dots, P_n$ όπου:
$P_i(t_{-i}\,;t_i) = P$(που δίνει ο παίκτης i στο ενδεχόμενο οι άλλοι παίκτες να είναι τύπων t_{-i} δεδομένου ότι αυτός είναι τύπου t_i), $t_{-i} = (t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$
- Συνήθως $P_i(t_{-i}\,;t_i) = P_i(t_{-i})$ δηλαδή η πεποίθηση δεν εξαρτάται από τον τύπο του παίκτη i $(P_1(H)=\theta,\ P_1(L)=1-\theta)$
- Αν το t_{-i} παίρνει τιμές σε διάστημα, η πεποίθηση δίνεται από σ.π.π. $f_i(t_{-i})$

4) τις συναρτήσεις πληρωμών των παικτών: $u_1, u_2, \dots, u_n$ με:
$u_i(a_1, a_2, \dots, a_n\,; t_i)$: πληρωμή του παίκτη i όταν είναι τύπου t_i και οι παίκτες παίξουν $(a_1, \dots, a_n)$

Συμβολίζουμε το παίγνιο ως: $\boxed{G = \{A_1, A_2, \dots, A_n,\ T_1, T_2, \dots, T_n,\ P_1, P_2, \dots, P_n,\ u_1, u_2, \dots, u_n\}}$

3.3 Σύνολα Στρατηγικών και Μπεϋζιανό Σ.Σ.Ι.

Ορισμός: Στο στατικό Μπεϋζιανό Παίγνιο $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n, T_1, T_2, \dots, T_n, P_1, P_2, \dots, P_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ μια στρατηγική του παίκτη i είναι μια συνάρτηση:

$S_i(t_i) :=$ η απόφαση που παίρνει ο παίκτης i αν είναι t_i

Ορισμός: Στο Στατικό Μπεϋζιανό Παίγνιο $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n, T_1, T_2, \dots, T_n, P_1, P_2, \dots, P_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ το προφίλ στρατηγικών $(S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*)$ είναι Μπεϋζιανό Σ.Σ.Ι. αν:

$$S_i^*(t_i) \in BR_i(S_{-i}^*\,; t_i) \quad \forall i,\ \forall t_i \in T_i$$

Πρέπει να ξέρουμε να διατυπώνουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή, να περιγράφουμε ακριβώς τις στρατηγικές και να μπορούμε να περιγράψουμε τα Σ.Σ.Ι χωρίς απαραίτητα να λύνουμε το σύστημα που προκύπτει.

3.4 Δημοπρασία

Δυο παίκτες παίρνουν μέρος στην δημοπρασία ενός αντικειμένου.

Ο παίκτης i έχει ωφέλεια v_i (μον. ωφέλειας) αν πάρει το αντικείμενο. Αν τελικά το αγοράσει σε τιμή b_i, τελικά η πληρωμή του θα είναι $v_i - b_i$, $i=1,2,\dots$

Ο παίκτης i γνωρίζει την ωφέλεια του αλλά όχι του αντιπάλου. Κάθε παίκτης θεωρεί ότι η ωφέλεια του αντιπάλου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$ (Μπεϋζιανό Παίγνιο)

ελλιπούς πληροφόρησης

Οι δυο παίκτες αποφασίζουν ταυτόχρονα την τιμή που θα προσφέρουν. Παίρνει το αντικείμενο αυτός που έχει κάνει τη μεγαλύτερη προσφορά.

Αν κάνουν ίδια προσφορά, κάθε παίκτης παίρνει το αντικείμενο με πιθ. $\frac{1}{2}$

i) Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή

ii) Να διατυπωθούν τα σύνολα στρατηγικών.

iii) Να δώσετε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ένα προφίλ στρατηγικών Σ.Σ.Ι

Λύση

ο καθένας αποφασίζει μια φορά

i) Είναι στατικό Μπεϋζιανό παίγνιο 2 παικτών με:

1) Σύνολα Αποφάσεων:

- $A_1 = \{ b_1 : b_1 \in [0,+\infty) \}$
- $A_2 = \{ b_2 : b_2 \in [0,+\infty) \}$.

2) Σύνολα δυνατών τύπων:

- $T_1 = \{ v_1 : v_1 \in [0,1] \}$
- $T_2 = \{ v_2 : v_2 \in [0,1] \}$

3) Πεποιθήσεις κάθε παίκτη:

- $f_1(v_2) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad \forall v_2 \in [0,1]$, $\quad v_2 \sim \text{Uniform}[0,1]$

τι πιστεύει ο $1^{ος}$ παίκτης ότι είναι ο $2^{ος}$

- $f_2(v_1) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad \forall v_1 \in [0,1]$, $\quad v_1 \sim \text{Uniform}[0,1]$.

4) Πληρωμές:

$$u_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & b_1 = b_2 \\ 0, & b_1 < b_2 \end{cases}$$

πληρωμή για συγκεκριμένες αποφάσεις αν γνωρίζω συγκεκριμένο $v_1 \Rightarrow$ δεν έχω $E[\cdot]$ ή πιθανότητες.

$$u_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & b_2 > b_1 \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & b_2 = b_1 \\ 0, & b_2 < b_1 \end{cases}$$

ii) • Στρατηγική του παίκτη 1: $b_1(v_1)$ = προσφορά που θα κάνει ο 1 αν είναι τύπου v_1

συνάρτηση $b_1 : T_1 \to A_1$

• Στρατηγική του παίκτη 2: $b_2(v_2)$ = προσφορά που θα κάνει ο 2 αν είναι τύπου v_2

συνάρτηση $b_2 : T_2 \to A_2$

iii) Το (b_1^*, b_2^*) (Μπεϋζιανό) Σ.Σ.Ι $\Longleftrightarrow \begin{cases} b_1^*(v_1) \in BR_1(b_2^*; v_1), & \forall v_1 \in T_1 \\ b_2^*(v_2) \in BR_2(b_1^*; v_2), & \forall v_2 \in T_2 \end{cases}$

συνάρτηση $b_1^*(v_1)$ — συνάρτηση $b_2^*(v_2)$

(Στο συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε βρούμε εύκολα λύση αν υποθέσουμε ότι η απόφαση καθε παίκτη είναι γραμμική συνάρτηση ως προς v_i)

3.5 Διπλή Δημοπρασία

Ένας αγοραστής (παίκτης 2 - δείκτης b) και ένας πωλητής (παίκτης 1 - δείκτης s) αποφασίζουν ταυτόχρονα την τιμή ενός προϊόντος.

Για τον πωλητή, η τιμή p_s που αποφασίζει είναι η ελάχιστη τιμή στην οποία είναι διατεθειμένος να πωλήσει

Για τον αγοραστή, η τιμή p_b που αποφασίζει είναι η υψηλότερη τιμή στην οποία είναι διατεθειμένος να αγοράσει.

Αν $p_s \le p_b$, τότε θα γίνει η αγοραπωλησία σε τιμή $p = \frac{p_s + p_b}{2}$

Αν $p_s > p_b$, δεν υπάρχει αγοραπωλησία

Η ωφέλεια του πωλητή από την κατοχή του προϊόντος είναι v_s και η ωφέλεια του αγοραστή για την κατοχή του προϊόντος είναι v_b. Κάθε παίκτης δεν γνωρίζει την ωφέλεια του αντιπάλου και θεωρεί ότι ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$

Αν η αγοραπωλησία γίνει, ο πωλητής θα έχει πληρωμή $p - v_s$ και ο αγοραστής θα έχει πληρωμή $v_b - p$
Αν η αγοραπωλησία δεν γίνει θα έχουν πληρωμές 0.

i) Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή

ii) Να διατυπωθούν τα σύνολα στρατηγικών.

iii) Να δώσετε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ένα προφίλ στρατηγικών Σ.Σ.Ι

Λύση

i) Έχουμε στατικό Μπεϋζιανό Παίγνιο 2 παικτών με:

1) Σύνολα Αποφάσεων: $A_s = \{p_s : p_s \in [0, +\infty)\}$ $\quad A_b = \{p_b : p_b \in [0, +\infty)\}$.

2) Δυνατοί Τύποι: $T_s = \{v_s : v_s \in [0,1]\}$, $T_b = \{v_b : v_b \in [0,1]\}$.

3) Πεποιθήσεις: $f_s(v_b) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad \forall v_b \in [0,1]$, $f_b(v_s) = 1 \quad \forall v_s \in [0,1]$

4) Πληρωμές: $u_s(p_s, p_b; v_s) = \begin{cases} \frac{p_s + p_b}{2} - v_s, & p_s \le p_b \\ 0, & p_s > p_b \end{cases}$

$$u_b(p_s, p_b; v_b) = \begin{cases} v_b - \frac{p_s + p_b}{2}, & p_s \le p_b \\ 0, & p_s > p_b \end{cases}$$

ii) Στρατηγικές του πωλητή: $\underbrace{P_s(v_s)}_{\text{συνάρτηση}}$ = προσφορά του πωλητή αν είναι τύπου v_s.

Στρατηγικές του αγοραστή: $\underbrace{P_b(V_b)}_{\text{συνάρτηση.}}$ = προσφορά του αγοραστή αν είναι τύπου V_b.

iii) (p_s^*, p_b^*) Μπεϋζιανό Σ.Σ.Ι $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} p_s^*(V_s) \in BR_1(p_b^*; V_s) \quad \forall V_s \in T_s \\ p_b^*(V_b) \in BR_2(p_s^*; V_b) \quad \forall V_b \in T_b \end{array} \right\}$. (δες βιβλίο Gibbons).