Ανταγωνισμός σε διακρατικό εμπόριο

- Δύο χώρες, $i=1,2$, που η καθεμία έχει
  - κυβέρνηση που αποφασίζει τους δασμούς που θα επιβάλλει στα προϊόντα που εισάγονται
  - μία εταιρεία που παράγει προϊόντα για εγχώρια κατανάλωση και εξαγωγές
  - καταναλωτές που αγοράζουν προϊόντα είτε της δικής τους χώρας είτε εισαγόμενα.
- Η εταιρεία E_i παράγει ποσότητα h_i για τη χώρα της και e_i για εξαγωγή.

  Οπότε, Q_i = συνολική ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στη χώρα i

  $= h_i + e_j$, με $j \neq i$, $i=1,2$.
- Υπάρχει κόστος παραγωγής c ανά μονάδα προϊόντος που παράγουν οι εταιρείες.
- Αν η συνολική ποσότητα προϊόντος που διατίθεται στη χώρα i είναι Q_i, τότε η τιμή ανά μονάδα προϊόντος είναι $P_i(Q_i) = a - Q_i$ και η ωφέλεια των καταναλωτών είναι $\frac{1}{2}Q_i^2$.
- Η κυβέρνηση της χώρας i, K_i, επιβάλλει δασμό t_i ανά μονάδα προϊόντος που εισάγεται.
- Πρώτα, οι κυβερνήσεις αποφασίζουν ταυτόχρονα τους δασμούς t_1 και t_2.
- Έπειτα, οι εταιρείες, αφού παρατηρήσουν τους δασμούς, αποφασίζουν ταυτόχρονα τις ποσότητες που θα φτιάξουν (h_1, e_1) και (h_2, e_2).

Οι πληρωμές των εταιρειών θα είναι

$$u_{E_i}(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) =$$

$$\underbrace{[a-(h_i+e_j)]\cdot h_i}_{\substack{\text{έσοδα εταιρείας}\\ E_i \text{ από προϊόντα}\\ \text{που πωλάει στην}\\ \text{χώρα της}}} + \underbrace{[a-(h_j+e_i)]e_i}_{\substack{\text{έσοδα εταιρείας}\\ E_i \text{ από προϊόντα}\\ \text{που εξάγει}\\ \text{στην χώρα } j}} - \underbrace{c(h_i+e_i)}_{\substack{\text{κόστος}\\ \text{παραγωγής}}} - \underbrace{t_j\cdot e_i}_{\text{δασμοί}},$$

, με $j \neq i$, $i=1,2$

Οι πληρωμές των κυβερνήσεων K_i (των χωρών) θα είναι:

$$u_{K_i}(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(h_i+e_j)^2}_{\substack{\text{ωφέλεια}\\ \text{καταναλωτών}}} + \underbrace{u_{E_i}(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j)}_{\substack{\text{πληρωμή εταιρείας}\\ E_i}} + \underbrace{t_i\cdot e_j}_{\substack{\text{έσοδα από}\\ \text{δασμούς.}}},$$

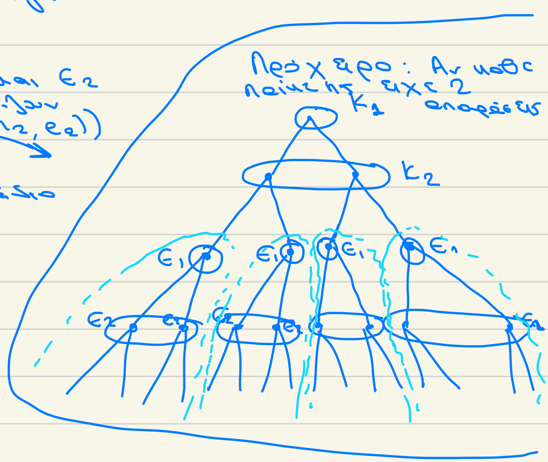
, με $j \neq i$, $i=1,2$,

Να βρεθεί η λύση του παιγνίου.

<u>Λύση</u>

Οι K_1 και K_2 αποφασίζουν (t_1,t_2) → Οι E_1 και E_2 αποφασίζουν $((h_1,e_1),(h_2,e_2))$ →

1^o στάδιο 2^o στάδιο



Θα ασχοληθούμε πρώτα με το παίγνιο του $2^{ου}$ σταδίου, μεταξύ των E_1 και E_2

Θα υποθέσουμε ότι οι κυβερνήσεις έχουν αποφασίσει (t_1,t_2) και θα βρούμε τη λύση του παιγνίου μεταξύ των εταιρειών.

$$((h_1^*,e_1^*),(h_2^*,e_2^*)) \text{ ΣΙΙ} \iff \begin{cases} (h_1^*,e_1^*) \in BR_{E_1}((h_2^*,e_2^*)) \\ (h_2^*,e_2^*) \in BR_{E_2}((h_1^*,e_1^*)) \end{cases}$$

Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση της εταιρείας E_i στη στρατηγική (h_j,e_j) της E_j, $BR_{E_i}((h_j,e_j))$, $j\neq i$, $i=1,2$.

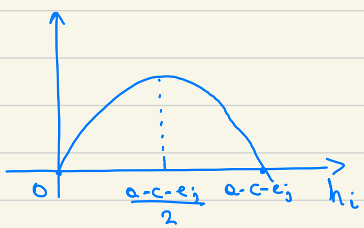
Θα μεγιστοποιήσουμε ως προς (h_i,e_i) την

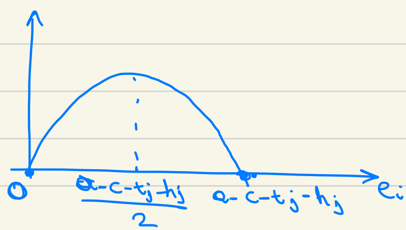
$$u_{E_i}(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) = [a-(h_i+e_j)]h_i + [a-(h_j+e_i)]e_i - c(h_i+e_i) - t_j e_i ,$$

$$\underbrace{(a-c-e_j-h_i)h_i}_{\text{συνάρτηση μόνο του } h_i} + \underbrace{(a-c-t_j-h_j-e_i)e_i}_{\text{συνάρτηση μόνο του } e_i}$$

Αρκεί να λύσουμε τα

$$\max_{h_i\geq 0} (a-c-e_j-h_i)h_i \quad \text{και} \quad \max_{e_i\geq 0} (a-c-t_j-h_j-e_i)e_i$$





$$h_i^* = \begin{cases} \frac{a-c-e_j}{2} & , \text{αν } a-c\geq e_j \\ 0 & , \text{αν } a-c< e_j \end{cases} \qquad e_i^* = \begin{cases} \frac{a-c-t_j-h_j}{2} & , \text{αν } a-c-t_j\geq h_j \\ 0 & , \text{αν } a-c-t_j< h_j \end{cases}$$

Άρα $BR_{E_i}((h_j, e_j)) = \Big(\overbrace{\frac{a-c-e_j}{2}}^{h_i^*}, \overbrace{\frac{a-c-t_j-h_j}{2}}^{e_i^*} \Big)$, $j \neq i$, $i = 1,2$

Εύρεση ΣΣΙ

$((h_1^*, e_1^*), (h_2^*, e_2^*))$ ΣΣΙ $\iff \begin{cases} (h_1^*, e_1^*) \in BR_{E_1}((h_2^*, e_2^*)) \\ (h_2^*, e_2^*) \in BR_{E_2}((h_1^*, e_1^*)) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} h_1^* = \frac{a-c-e_2^*}{2} \\ e_1^* = \frac{a-c-t_2-h_2^*}{2} \\ h_2^* = \frac{a-c-e_1^*}{2} \\ e_2^* = \frac{a-c-t_1-h_1^*}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} h_1^* = \frac{a-c-\frac{a-c-t_1-h_1^*}{2}}{2} \\ e_1^* = \frac{a-c-t_2-h_2^*}{2} \\ h_2^* = \frac{a-c-\frac{a-c-t_2-h_2^*}{2}}{2} \\ e_2^* = \frac{a-c-t_1-h_1^*}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} h_1^* = \frac{a-c+t_1}{3} \\ h_2^* = \frac{a-c+t_2}{3} \\ e_1^* = \frac{a-c-2t_2}{3} \\ e_2^* = \frac{a-c-2t_1}{3} \end{cases}$$

Άρα, στο ΣΣΙ, η εταιρεία E_i επιλέγει

$h_i^* = \frac{a-c+t_i}{3}$, $e_i^* = \frac{a-c-2t_j}{3}$, με $j \neq i$, $i = 1,2$.

και η πληρωμή της εταιρείας E_i κάτω από το ΣΣΙ είναι:

$u_{\epsilon_i}(t_i, t_j, h_i^*, e_i^*, h_j^*, e_j^*) =$

$(a - c - e_j^* - h_i^*)h_i^* + (a - c - t_j - h_j^* - e_i^*)e_i^* =$

$$= \left(a - c - \frac{a-c-2t_i}{3} - \frac{a-c+t_i}{3}\right) \cdot \frac{a-c+t_i}{3} +$$

$$\left(a - c - t_j - \frac{a-c+t_j}{3} - \frac{a-c-2t_j}{3}\right) \cdot \frac{a-c-2t_j}{3} =$$

$$\left(\frac{a-c+t_i}{3}\right)^2 + \left(\frac{a-c-2t_j}{3}\right)^2 , \quad j \neq i , \quad i = 1, 2.$$

Τώρα λύνουμε το παίγνιο του 1ου σταδίου μεταξύ των K_1 και K_2

Η πληρωμή της κυβέρνησης K_i είναι

$u_{K_i}(t_i, t_j, h_i^*, e_i^*, h_j^*, e_j^*) =$

$$\frac{1}{2} \underbrace{Q_i^2}_{h_i^* + e_j^*} + u_{\epsilon_i}(t_i, t_j, h_i^*, e_i^*, h_j^*, e_j^*) + t_i e_j^* =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a-c+t_i}{3} + \frac{a-c-2t_i}{3}\right)^2 + \left(\frac{a-c+t_i}{3}\right)^2 + \left(\frac{a-c-2t_j}{3}\right)^2 +$$

$$t_i \cdot \frac{a-c-2t_i}{3} =$$

$$\frac{[2(a-c) - t_i]^2}{18} + \frac{(a-c+t_i)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_j)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_i)t_i}{3}$$

$$\equiv u_{K_i}(t_i, t_j)$$

$$(t_1^*, t_2^*) \text{ ΣΣΙ } \iff \begin{cases} t_1^* \in BR_{K_1}(t_2^*) \\ t_2^* \in BR_{K_2}(t_1^*) \end{cases}$$

<u>Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση της K_i στη στρατηγική t_j της K_j $(BR_{K_i}(t_j))$</u>

Η K_i λύνει το

$$\max_{t_i \geq 0} u_{K_i}(t_i, t_j)$$

με $u_{K_i}(t_i, t_j) =$

$$\frac{[2(a-c)-t_i]^2}{18} + \frac{(a-c+t_i)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_j)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_i)t_i}{3}$$

$$\frac{\partial u_{K_i}(t_i,t_j)}{\partial t_i} = \frac{-2[2(a-c)-t_i]}{18} + \frac{2(a-c+t_i)}{9} + \frac{-2t_i+a-c-2t_i}{3}$$

$$= \frac{-4(a-c)+2t_i+4(a-c)+4t_i-24t_i+6(a-c)}{18}$$

$$= \frac{6(a-c)-18t_i}{18}$$

$$\frac{\partial^2 u_{K_i}(t_i,t_j)}{\partial t_i^2} = \frac{-18}{18} = -1 < 0 \Rightarrow u_{K_i} \text{ κοίλη ως προς } t_i$$

F.O.C : $\dfrac{\partial u_{K_i}(t_i^*,t_j)}{\partial t_i} = 0 \iff$

$$\frac{6(a-c)-18t_i^*}{18} = 0 \iff$$

$$t_i^* = \frac{a-c}{3}$$

Άρα $BR_{K_i}(t_j) = \frac{a-c}{3}$, $i=1,2$. ανεξάρτητο του t_j!

Βρίσκω ΣΣΙ στο παίγνιο του $1^{ου}$ σταδίου:

$$(t_1^*, t_2^*) \text{ ΣΣΙ} \iff \begin{Bmatrix} t_1^* \in BR_{K_1}(t_2^*) \\ t_2^* \in BR_{K_2}(t_1^*) \end{Bmatrix} \iff$$

$$\begin{Bmatrix} t_1^* = \frac{a-c}{3} \\ t_2^* = \frac{a-c}{3} \end{Bmatrix}$$

Άρα, $t_i^* = \frac{a-c}{3}$, $i=1,2$.

Οπότε, στο $2^ο$ στάδιο, οι εταιρείες θα παράξουν:

$$h_i^* = \frac{a-c+t_i^*}{3}, \quad e_i^* = \frac{a-c-2t_j^*}{3}, \text{ με } j \neq i,\ i=1,2. \iff$$

$$h_i^* = \frac{a-c+\frac{a-c}{3}}{3}, \quad e_i^* = \frac{a-c-2\frac{a-c}{3}}{3}, \quad i=1,2 \iff$$

$$h_i^* = \frac{4(a-c)}{9}, \quad e_i^* = \frac{a-c}{9}$$

Κάθε κυβέρνηση θα επιβάλει δασμούς $\frac{a-c}{3}$.

Κάθε εταιρεία θα παράγει ποσότητα $\frac{4(a-c)}{9}$ για εγχώρια κατανάλωση και $\frac{a-c}{9}$ για εξαγωγές.

2.4. Επαναλαμβανόμενα παίγνια

Παράδειγμα (ένα στάδιο)

Παίγνιο 2 παικτών

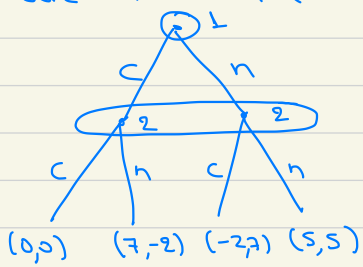
Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα (c) ή (n)

Σε κανονική μορφή το παίγνιο γράφεται ως

1\2	(c)	(n)
(c)	(0,0)	(7,−2)
(n)	(−2,7)	(5,5)

ΣΣΙ: (c, c) με πληρωμές (0,0)

Σε εκτεταμένη μορφή:



Δε λύνεται με αναδρομή, ούτε υπάρχει υποπαίγνιο

Παράδειγμα (2 στάδια)

Παιχνίδι 2 παικτών παίζεται 2 φορές.

2 στάδια.

1ο στάδιο: Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα (c) ή (n)

Πληρωμές 1ου σταδίου:

1\2	(c)	(n)
(c)	(0,0)	(7,−2)
(n)	(−2,7)	(5,5)

2ο στάδιο: Αποκαλύπτονται οι πληρωμές του 1ου σταδίου.

Ξανα επιλέγουν (c) ή (n) ταυτόχρονα.

Οι πληρωμές του 2ου σταδίου είναι ίδιες με του 1ου σταδίου. Η συνολική πληρωμή είναι το άθροισμα των πληρωμών.

Εκτεταμένη μορφή: