Διάλεξη 05

Παρασκευή, 27 Φεβρουαρίου 2026 5:40 μμ

Συνέχεια από προηγούμενο μάθημα

1 \ 2	υ	δ.υ
υ	(b, b)	$(0^*, d^*)$
δυ	$(d^*, 0^*)$	(α, α)

$d > b > 0$

$\alpha < 0$

Υπολογίζουμε τη βέλτιστη απάντηση του 1 στη στρατηγική $\underline{q} = (q, 1-q)$ του 2, $BR_1(q)$

$$V_1(\upsilon, q) = q \cdot b + (1-q) \cdot 0 = qb$$

$$V_1(\delta.\upsilon, q) = q \cdot d + (1-q) \cdot \alpha$$

με οποιαδήποτε άλλη μεικτή στρατηγική ο 1 παίρνει πληρωμή αναμεσα σε αυτές τις δυο.

- Αν $V_1(\upsilon, q) > V_1(\delta.\upsilon, q) \iff q \cdot b > q \cdot d + (1-q)\alpha$

$$\iff qb > qd + \alpha - q\alpha$$

$$\iff -\alpha > q(d - b - \alpha)$$

$$\iff q < \frac{-\alpha}{d-b-\alpha}$$

Τότε $BR_1(q) = \{(\upsilon)\} = \{(1, 0)\}$

- Αν $V_1(\upsilon, q) < V_1(\delta.\upsilon, q) \iff q \cdot b < q \cdot d + (1-q)\alpha$

$$\iff q > \frac{-\alpha}{d-b-\alpha}$$

Τότε $BR_1(q) = \{(\delta.\upsilon)\} = \{(0, 1)\}$

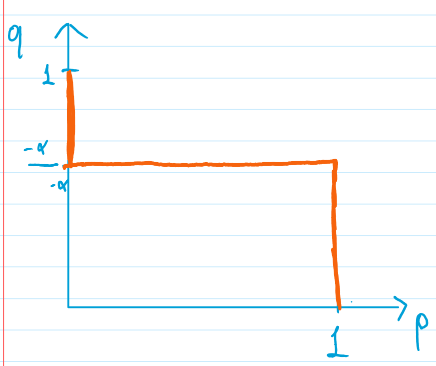
- Αν $V_1(\upsilon, q) = V_1(\delta.\upsilon, q) \iff qb = q \cdot d + (1-q)\alpha$

$$\iff q = \frac{-\alpha}{d-b-\alpha}$$

Τότε $BR_1(q) = \{(p, 1-p),\ p \in [0, 1]\}$

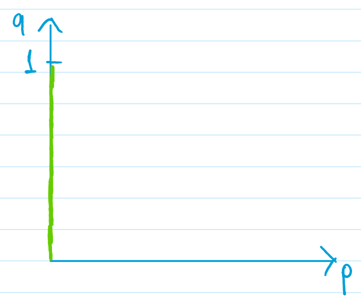
Συνοψίζουμε:

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & q < \frac{-\alpha}{d-b-\alpha} \\ \{(0,1)\}, & q > \frac{-\alpha}{d-b-\alpha} \\ \{(p, 1-p), p \in [0,1]\}, & q = \frac{-\alpha}{d-b-\alpha} \end{cases}$$

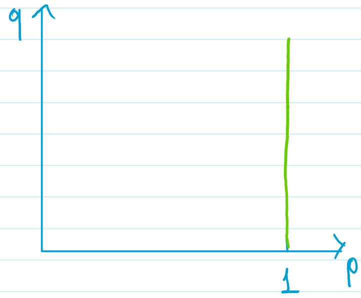


Προσοχή: Ελέγχω αν $0 \le \frac{-\alpha}{d-b-\alpha} \le 1$

- Αν η σταθερά $\frac{-\alpha}{d-b-\alpha} < 0$ θα είχαμε:



• Αν η σταθερά $\frac{-a}{d-b-a} > 1$ θα είχαμε:



Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του 2 στην στρατηγική $(p, 1-p)$ του 1, $BR_2(p)$

$$V_2(p, u) = p\cdot b + (1-p)\cdot 0 = pb$$

$$V_2(p, \delta.u) = p\cdot d + (1-p)\cdot a$$

• Αν $V_2(p, u) > V_2(p, \delta.u) \iff pb > pd + (1-p)a$

$$\iff pb > pd + \alpha - p\alpha$$

$$\iff p < \frac{-a}{d-b-\alpha}$$

Τότε $BR_2(p) = \{u\} = \{(1,0)\}$

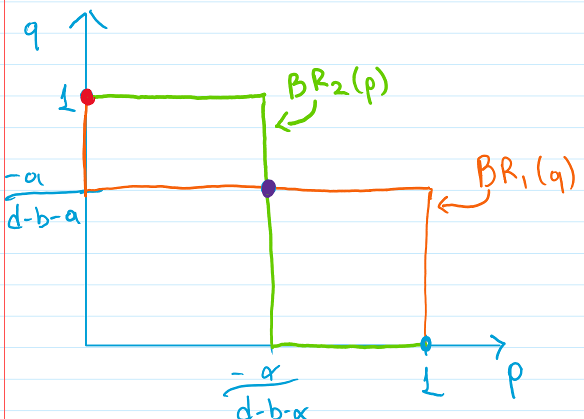
• Αν $V_2(p, u) < V_2(p, \delta.u) \iff p > \frac{-a}{d-b-\alpha}$

Τότε $BR_2(p) = \{\delta.u\} = \{(0,1)\}$

• Αν $V_2(p, u) = V_2(p, \delta.u) \iff p = \frac{-a}{d-b-\alpha}$

Συνοψίζοντας:

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & p < \frac{-a}{d-b-\alpha} \\ \{(0,1)\}, & p > \frac{-a}{d-b-\alpha} \\ \{(q, 1-q);\, q \in [0,1]\}, & p = \frac{-a}{d-b-\alpha} \end{cases}$$



Έχουμε 3 Σ.Σ.Ι

• $(\underset{\uparrow\, 0}{p}, 1-p), (\underset{\uparrow\, 1}{q}, 1-q) = ((0,1), (1,0))$ πληρωμές $(d, 0)$

• $(\underset{\uparrow\, 1}{p}, 1-p), (\underset{\uparrow\, 0}{q}, 1-q) = ((1,0), (0,1))$ πληρωμές $(0, d)$

• $(\underset{\uparrow\, -\frac{\alpha}{d-b-\alpha}}{p}, 1-p), (\underset{\uparrow\, -\frac{\alpha}{d-b-\alpha}}{q}, 1-q) = \left(\left(\frac{-a}{d-b-\alpha}, \frac{d-b}{d-b-\alpha}\right), \left(\frac{-\alpha}{d-b-\alpha}, \frac{d-b}{d-b-\alpha}\right)\right)$

πληρωμές: (σημειώνω στο περιθ. του πίνακα τις μ.σ και υπολογίζω)

για τον 1: $\left(-\frac{\alpha}{d-b-\alpha}\right)^2 \cdot b + \frac{-a}{d-b-\alpha}\cdot\frac{d-b}{d-b-a}\cdot 0 + \frac{d-b}{d-b-\alpha}\cdot\frac{-a}{d-b-\alpha}\cdot d + \left(\frac{d-b}{d-b-\alpha}\right)^2\cdot a =$

για τον 1: $\left(-\frac{\alpha}{d-b-\alpha}\right)^2 \cdot b + \frac{-a}{d-b-\alpha} \cdot \frac{d-b}{d-b-a} \cdot 0 + \frac{d-b}{d-b-\alpha} \cdot \frac{-a}{d-b-\alpha} \cdot d + \left(\frac{d-b}{d-b-\alpha}\right)^2 \cdot a =$

$$= \frac{a^2 b - d^2 a + b \cdot a \cdot d + d^2 a - 2b\alpha d + b^2 \alpha}{(d-b-\alpha)^2} = \frac{-ab(-a \cancel{+} d - b)}{(d-\alpha-b)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-ab}{d-b-\alpha}$$

ομοίως για τον 2: $\ldots = \frac{-ab}{d-b-\alpha}$

Ενότητα 2 – Δυναμικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης

Δυναμικά Παίγνια: Οι αποφάσεις λαμβάνονται σε στάδια.

Παίγνια πλήρους (complete) πληροφόρησης: Κάθε παίκτης γνωρίζει τις πληρωμές όλων των παικτών κάτω από οποιαδήποτε στρατηγική

Παίγνια τέλειας (perfect) πληροφόρησης: Την στιγμή που ο παίκτης παίρνει μια απόφαση γνωρίζει τι έχουν επιλέξει πριν από αυτόν οι υπόλοιποι παίκτες.

2.1 Δυναμικά Παίγνια Πλήρους και τέλειας Πληροφόρησης

Backward induction – Αναδρομική Επίλυση

Παράδειγμα:

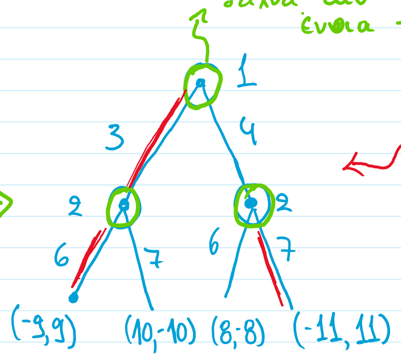
Θεωρούμε παίγνιο 2 παικτών: 1, 2. Ο 1 επιλέγει έναν αριθμό μεταξύ των 3 ή 4. Ο 2, αφού δει τι επέλεξε ο 1, επιλέγει 6 ή 7. Αν το άθροισμα είναι περιττό, ο 1 δίνει στον 2 τόσα χρήματα όσο το άθροισμα. Αν το άθροισμα είναι άρτιο ο 2 δίνει στον 1 τόσα χρήματα όσο το άθροισμα.

Λύση:

Το παιχνίδι γίνεται σε στάδια $\Longrightarrow$ δυναμικό
Ο 2 ξέρει τι διάλεξε ο 1 πριν $\Longrightarrow$ τέλειας πληρ
} Έχουμε δυναμικό παίγνιο τέλεια πληροφόρησης.

Μπορούμε να γράψουμε το παίγνιο με την εξής μορφή:

δείχνει την έννοια της πληροφόρησης



σε αυτό το στάδιο ο 2 έχει άλλη πληρ. για κάθε κλάδο. Άρα 2 κυκλάκια.

← εκτεταμένη μορφή
↳ την προτιμάμε για δυναμικά παίγνια.

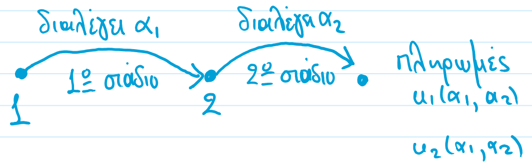
Κοιτάω την εκτεταμένη μορφή από κάτω προς τα πάνω:

Κάθε φορά οποιος αποφασίζει διαλέγει στρατηγική που μεγιστοποιεί την πληρωμή του

Ο 1 θα διαλέξει 3 και ο 2 θα διαλέξει 6. Οι πληρωμές είναι $(-9, 9)$

Γενικά: Θεωρούμε το εξής παίγνιο 2 παικτών: 1 κ' 2.

- Ο 1 επιλέγει στρατηγική α_1 από το σύνολο A_1
- Ο 2 πρώτα παρατηρεί την επιλογή του 1 και έπειτα επιλέγει α_2 από το σύνολο A_2
- Οι πληρωμές αν επιλέξουν α_1 και α_2 είναι $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$ και $u_2(\alpha_1, \alpha_2)$



Το παίγνιο λύνεται **αναδρομικά**:

- Πρώτα για δεδομένο α_1 λύνουμε το $\max_{\alpha_2 \in A_2} u_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Δηλαδή βρίσκουμε την απόφαση του 2 στην α_1 του 1 και τη συμβολίζουμε με $R_2(\alpha_1)$ (1 πρόβλημα $\forall \alpha_1 \in A_1$)

- Ο παίκτης 1 καταλαβαίνει ότι αν αυτός ακολουθήσει την α_1, ο 2 θα παίξει $R_2(\alpha_1)$
  Άρα ο 1 λύνει το $\max_{\alpha_1 \in A_1} u_1(\alpha_1, R_2(\alpha_1))$

Stackelberg model of Duopoly

(επιλέγω ποσότητες όπως στο Cournot αλλά εδώ ξέρω τι επιλέχθηκε στο προηγ. στάδιο)

Δυο εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν

q_i: ποσότητα που παράγει η εταιρεία i, $i=1,2$

$Q = q_1 + q_2$ η συνολική ποσότητα του προϊόντος που θα παραχθεί

$P(Q) = \alpha - Q$, $\alpha > 0$: η τιμή του προϊόντος αν παραχθεί Q

} Ίδια με Cournot

$Q = q_1 + q_2$ η συνολική ποσότητα του προϊόντος που θα παραχθεί

$P(Q) = \alpha - Q$, $\alpha > 0$: η τιμή του προϊόντος αν παραχθεί Q

$C_i(q_i)$: κόστος παραγωγής ποσότητας q_i από την εταιρεία $i = 1, 2$

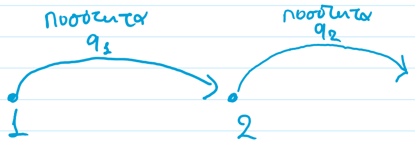
$C_i(q_i) = c \cdot q_i$, $c < \alpha$

Ίδια με Cournot

Η εταιρεία 1 αποφασίζει πρώτη τη ποσότητα που θα παράξει, q_1

Η εταιρεία 2 αφού παρατηρήσει την ποσότητα που φτιάχνει η 1 αποφασίζει την ποσότητα που θα φτιάξει αυτή, q_2

Να βρεθούν οι ποσότητες που θα φτιάξουν οι 2 εταιρείες.

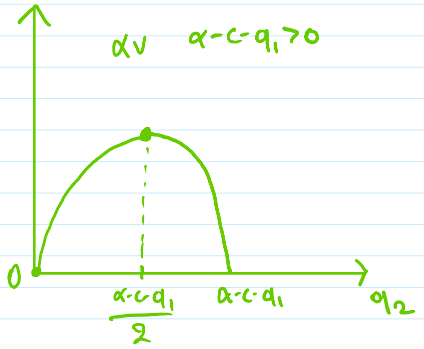


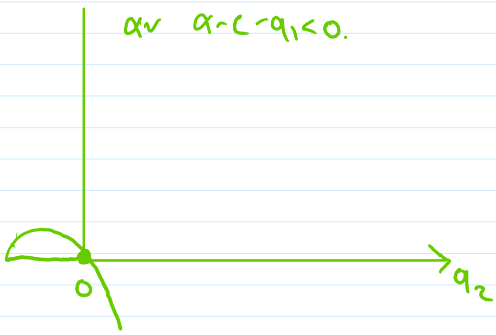
$$u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - c q_i$$
$$= q_i [\alpha - q_1 - q_2] - c \cdot q_i$$
$$= q_i(\alpha - c - q_1 - q_2), \quad i = 1, 2$$

Λύση

Μελετάμε το στάδιο 2:

Ο παίκτης 2 λύνει το $\max\limits_{q_2 \geq 0} u_2(q_1, q_2) = \max\limits_{q_2 \geq 0} \underbrace{q_2(\alpha - c - q_1 - q_2)}_{\text{πολυώνυμο 2ου βαθμού με ρίζες 0 και } \alpha - c - q_1}$





$$R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{\alpha - c - q_1}{2}, & q_1 \leq \alpha - c \\ 0, & q_1 > \alpha - c \end{cases}$$

Μελετάμε το στάδιο 1:

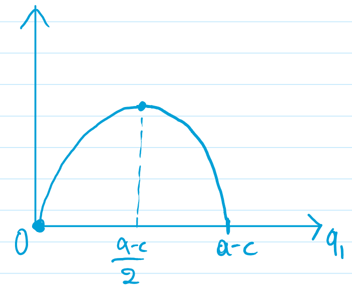
Ο 1 λύνει το πρόβλημα $\max\limits_{q_1 \geq 0} u_1(q_1, R_2(q_1))$ όπου $u_1(q_1, R_2(q_1)) = \begin{cases} u_1(q_1, \frac{\alpha - c - q_1}{2}), & q_1 \leq \alpha - c \\ u_1(q_1, 0), & q_1 > \alpha - c \end{cases}$

$$\Longrightarrow u_1(q_1, R_2(q_1)) = \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1 - \frac{\alpha - c - q_1}{2}), & q_1 \leq \alpha - c \\ q_1(\alpha - c - q_1 - 0), & q_1 > \alpha - c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\frac{q_1(\alpha - c - q_1)}{2}}_{\geq 0}, & 0 \leq q_1 \leq \alpha - c \\ \underbrace{q_1(\alpha - c - q_1)}_{< 0}, & 0 > q_1 > \alpha - c \end{cases}$$

< 0 ⟶ σίγουρα δεν μεγιστοποιείται εδώ

Άρα το πρόβλημα είναι $\max\limits_{0\le q_1\le a-c} \dfrac{q_1(a-c-q_1)}{2}$



$$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

$$q_2^* = R_2(q_1^*) = \frac{a-c-q_1^*}{2} = \frac{a-c}{4}$$

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{3(a-c)}{4}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-c}{2}\left[a-c-\frac{3(a-c)}{4}\right] = \frac{(a-c)^2}{8}$$

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-c}{4}\left[a-c-\frac{3(a-c)}{4}\right] = \frac{(a-c)^2}{16}$$

	Cournot	vs	Stackelberg
q_1^*	$\frac{a-c}{3}$	$<$	$\frac{a-c}{2}$
q_2^*	$\frac{a-c}{3}$	$>$	$\frac{a-c}{4}$
Q^*	$\frac{2(a-c)}{3}$	$<$	$\frac{3(a-c)}{4}$
$P(Q^*)$	$\frac{a+2c}{3}$	$>$	$\frac{a+3c}{4}$
$u_1(q_1^*, q_2^*)$	$\frac{(a-c)^2}{9}$	$<$	$\frac{(a-c)^2}{8}$
$u_2(q_1^*, q_2^*)$	$\frac{(a-c)^2}{9}$	$>$	$\frac{(a-c)^2}{16}$

Leontief's Model

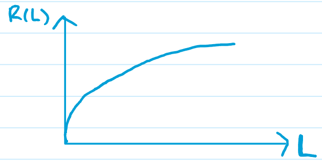
Θεωρούμε μια εταιρεία (παίκτης II) και μια ένωση εργατών (παίκτης I) από την οποία η εταιρεία προσλαμβάνει υπαλλήλους.

w: μισθός εργάτη

L: # εργατών που προσλαμβάνει η εταιρεία

$R(L)$: έσοδα εταιρείας αν έχει L εργάτες, $R(L)\uparrow$ και κοίλη ως προς L με:

$$R'(0) = \infty, \quad \lim_{L\to\infty} R'(L) = 0$$



Πρώτα η ένωση επιλέγει μισθό w.
Έπειτα η εταιρεία επιλέγει τον αριθμό εργατών L γνωρίζοντας το w.

Αν ο μισθός είναι w και το πλήθος εργατών είναι L η ένωση κερδίζει $u_1(w,L)\uparrow_w$ κ $\uparrow_L$
και η εταιρεία κερδίζει $u_2(w,L) = R(L)\uparrow_L$