13/02/2026 Μάθημα 4ο

1.3 Μεικτές Στρατηγικές

Παράδειγμα:

Δυο παίκτες (1, 2). Ο καθένας επιλέγει heads (h) ή tails (t)
Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα και ποντάρουν από 1€
Αν κάνουν την ίδια επιλογή, ο 1 παίρνει όλα τα χρήματα
Αν κάνουν διαφορετική επιλογή ο 2 παίρνει τα χρήματα
i) Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή
ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

Λύση:

i)

1\2	h_2	t_2
h_1	$(\overset{*}{1},-1)$	$(-1,\overset{*}{1})$
t_1	$(-1,\overset{*}{1})$	$(\overset{*}{1},-1)$

ii) Λύση με ΕΑΚΣ?
Για τον 1: —
Για τον 2: —
Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

Σκέψεις:

- Δεν υπάρχει λύση
- Μήπως μπορούμε να θεωρήσουμε επιπλέον στρατηγικές;

Ίδια για μεικτές στρατηγικές

Έστω ότι ο 1 χρησιμοποιεί την εξής στρατηγική. Ρίχνει ένα νόμισμα. Αν φέρει h θα παίξει t_1. Αυτή τη στρατηγική τη συμβολίζουμε $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Πρέπει να δούμε πως υπολογίζουμε αναμενόμενες πληρωμές κόστους από τέτοιες στρατηγικές.

		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	1\2	h_2	t_2
$\frac{1}{2}$	h_1	$(1^*,-1)$	$(-1,1^*)$
$\frac{1}{2}$	t_1	$(-1,1^*)$	$(1^*,-1^*)$

Έστω ότι ο 1 παίξει $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ και ο 2 παίξει h_2. Η αναμενόμενη πληρωμή του 1 είναι:

$$v_1(p,h_2)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(-1)=0$$

Η αναμενόμενη πληρωμή του 2 είναι:

$$v_2(p,h_2)=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0.$$

Έστω ότι ο 1 παίξει $p=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ και ο 2 παίξει $q=(\frac{1}{3},\frac{3}{3})$
Οι αναμενόμενες πληρωμές είναι:

$$v_1(p,q)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=0.$$

$$v_2(p,q)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\frac{2}{3}(-1)=0.$$

Ορισμός (Μεικτές Στρατηγικές)

Έστω παίκτης i με σύνολο στρατηγικών $S_i=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. Ονομάζουμε μεικτή στρατηγική του i μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο στρατηγικών S_i. Δηλαδή, ένα διάνυσμα $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ με $p_k\geq 0$, $k=1,2,\dots m$, $\sum_{k=1}^{m} p_k=1$ και $p_k=P_r$(ο i να διαλέξει s_k στρατηγ.), $k=1,\dots,m$

Παρατήρηση

Κάθε στρατηγική $s_k\in S_i$ γράφεται σαν μεικτή στρατηγική ως $(0,0,\dots,\underset{k\text{-οστή θέση}}{1},0,\dots 0)$
Τις στρατηγικές $s_k\in S_i$ θα τις ονομάζουμε καθαρές στρατηγικές

Αναμενόμενες Πληρωμές κάτω από μεικτές στρατηγικές

Έστω παίγνιο 2 παικτών, με $S_1=\{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1m}\}$ και $S_2=\{s_{21}, \dots, s_{2n}\}$.

Αν ο 1 ακολουθήσει μεικτή στρατηγική $p=(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m})$ και ο 2 ακολουθήσει την καθαρή στρατηγική s_{2j}, τότε οι αναμενόμενες πληρωμές είναι:

$$V_1(p, s_{2j}) = \sum_{i=1}^{m} p_{1i} \cdot u_1(s_{1i}, s_{2j})$$

$$V_2(p, s_{21}) = \sum_{i=1}^{m} p_{1i} \cdot u_2(s_{1i}, s_{2j})$$

Αν ο 1 παίξει $p=(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m})$ και ο 2 παίξει $q=(q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n})$ τότε οι αναμενόμενες πληρωμές είναι:

$$V_1(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{1i}\, q_{2j}\, u_1(s_{1i}, s_{2j})$$

$$V_2(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{1i}\, q_{2j}\, u_2(s_{1i}, s_{2j})$$

Γιατί να θεωρήσω και μεικτές στρατηγικές;

1) Γιατί μπορεί μια μεικτή στρατηγική να κυριαρχεί μιας καθαρής στρατηγικής.

Παράδειγμα:

1\2	L	M_2	R
U	(1,0)	(4,2)	(3,1)
M_1	(2,1)	(2,0)	(2,1)
D	(4,2)	(1,4)	(3,1)
p	$(\frac{5}{2},1)$	$(\frac{5}{2},3)$	(3,1)

Δεν υπάρχουν κυριαρχούμενες.

Θεωρούμε τη μεικτή στρατηγική του 1, $p=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

Τώρα:

Για τον 1: η p κυριαρχεί της M_1

Για τον 2: η M_2 κυριαρχεί των L κ' R

Για τον 1: η U κυριαρχεί των U, D, p

Άρα έχουμε λύση με ΕΑΚΣ (u, M_2) με πληρωμές $(4,2)$

2) Μπορεί να έχουμε Σ.Σ.Ι σε μεικτές, ενώ δεν έχουμε σε καθαρές.

Παράδειγμα:

Ψάχνουμε Σ.Σ.Ι σε μεικτές

		q	$1-q$
	1\2	h_2	t_2
p	h_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$
$1-p$	t_1	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του 1 απέναντι στη στρατηγική $\underline{q}=(q, 1-q)$ του 2, $BR_1(q)$

↳ η $\underline{q}$ περιγράφεται από την πιθανότητα q

$$BR_1(q) = \{\underline{p}^*:\ \underline{p}^* = \arg\max V_1(\underline{p}, \underline{q})\}$$

Υπολογίζω πρώτα αν. πληρωμή αν ο 1 ~~παίζει~~ διαλέγει h_1 και 2 παίζει με στρατηγική $\underline{q}$

$$V_1(h_1, \underline{q}) = q\cdot 1 + (1-q)(-1) = 2q-1$$

$$V_2(h_1, \underline{q}) = q(-1) + (1-q)\cdot 1 = 1-2q$$

Υπολογίζω αν. πληρωμή αν ο 1 παίζει με $\underline{p}=(p, 1-p)$ ~~q~~

$$V_1(\underline{p}, \underline{q}) = p\cdot q\, 1 + p(1-p)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)\cdot 1$$

$$= p\cdot V_1(h_1, \underline{q}) + (1-p)V_1(t_1, \underline{q})$$

Άρα $\underbrace{\max_{p \text{ μεικτές}} V_1(\underline{p}, \underline{q})}_{\text{μέγιστη αναμενόμενη πληρωμή κάτω από μεικτές του 1}} = \max\{\underbrace{V_1(h_1, \underline{q}),\ V_1(t_1, \underline{q})}_{\text{μέγιστη αναμενόμενη πληρωμή κάτω από καθαρές του 1.}}\}$

• Αν $v_1(h_1, q) > v_1(t_1, q) \iff 2q-1 > 1-2q$

$$\iff 2q-1 > 1-2q$$
$$\iff 4q > 2$$
$$\iff q > \frac{1}{2}$$

Τότε $BR_1(q) = \{h_1\} = \{(1,0)\}$

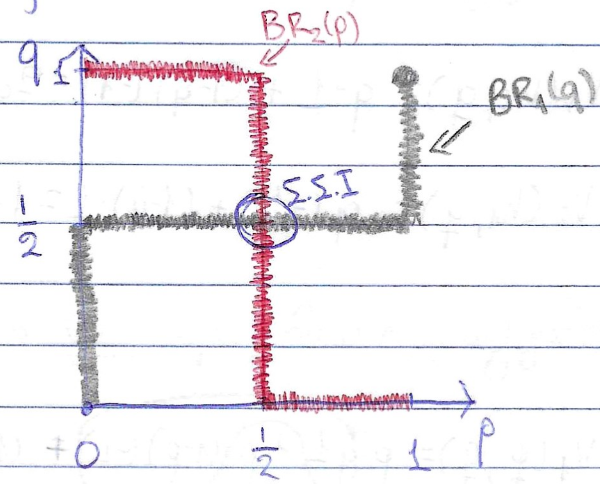
• Αν $v_1(h_1, q) < v_1(t_1, q) \iff 2q-1 < 1-2q$
$$\iff q < \frac{1}{2}$$

Τότε $BR_1(q) = \{t_1\} = \{(0,1)\}$.

• Αν $v_1(h_1, q) = v_1(t_1, q) \iff 2q-1 = 1-2q$
$$\iff q = \frac{1}{2}$$

Τότε $BR_1(q) = \{(p, 1-p),\ p \in [0,1]\}$.

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & q > \frac{1}{2} \\ \{(0,1)\}, & q < \frac{1}{2} \\ \{(p, 1-p) ; p \in [0,1]\}, & q = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του 2 στη στρατηγική $p = (p, 1-p)$, $BR_2(p) = \{q^* : q^* = \arg\max\ v_2(p, q)\}$

$v_2(p, h_2) = p \cdot (-1) + (1-p) \cdot 1 = 1-2p$.

$v_2(p, t_2) = p \cdot 1 + (1-p)(-1) = 2p-1$

• Αν $v_2(\underset{\sim}{p}, h_2) > v_2(\underset{\sim}{p}, t_2) \Leftrightarrow 1-2p > 2p-1$
$\Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$

Τότε $BR_2(p) = \{h_2\} = \{(1,0)\}$

• Αν $v_1(\underset{\sim}{p}, h_2) < v_2(\underset{\sim}{p}, t_2) \Leftrightarrow 1-2p < 2p-1$
$\Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$

Τότε $BR_2(p) = \{t_2\} = \{(0,1)\}$

• Αν $v_2(\underset{\sim}{p}, h_2) = v_2(\underset{\sim}{p}, t_2) \Leftrightarrow 1-2p = 2p-1$
$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

Τότε $BR_2(p) = \{(q, 1-q) \ , \ q \in [0,1]\}$

Άρα:

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & p < \frac{1}{2} \\ \{(0,1)\}, & p > \frac{1}{2} \\ \{(q, 1-q) : q \in [0,1]\}, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

δες προηγ. σχήμα

τομή 2 γραφημάτων

$$\Sigma.\Sigma.I: \ ((\underset{p^*}{\tfrac{1}{2}}, \underset{1-p^*}{\tfrac{1}{2}}), (\underset{q^*}{\tfrac{1}{2}}, \underset{1-q^*}{\tfrac{1}{2}}))$$ με πληρωμές:

για τον 1: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$

για τον 2: 0

πληρωμές $(0,0)$

Παράδειγμα:

Δυο οδηγοί οδηγούν αντίθετα και κοντράρονται για τον έλεγχο του δρόμου. Ο καθένας έχει δυο επιλογές (υποχωρεί ή δεν υποχωρεί). Οι οδηγοί αποφασίζουν ταυτόχρονα.
Αν και οι δυο δεν υποχωρήσουν η πληρωμή του καθενός είναι $a<0$.
Αν υποχωρήσει μόνο ο ένας, τότε αυτός που υποχώρησε έχει πληρωμή 0 ενώ ο άλλος έχει πληρωμή $d>0$
Αν και οι δυο υποχωρήσουν έχει ο καθένας πληρωμή $b>0$ με $d>b>0$
α) Να γράψετε το παίγνιο σε κανονική μορφή
β) Να βρείτε αν έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές
γ) » » » » » » μεικτές »

(α)

1\2	υ	δ.υ
υ	(b, b)	$(\overset{*}{0}, \overset{*}{d})$
δ.υ	$(\overset{*}{d}, \overset{*}{0})$	(a, a) ↳αρνητικό

β) ΣΣΙ σε καθαρές:
Υπάρχουν 2 Σ.Σ.Ι (υ, δυ) με πληρ (0, d)
(δυ, υ) με πληρ (d, 0)