6/02/2026. Μάθημα 3ο

## Cournot Model of Duopoly (συνέχεια)

Δυο εταιρείες παράγουν ένα προϊόν

$q_i$: Ποσότητα προϊόντος που αποφασίζει η εταιρεία $i$

$Q = q_1 + q_2$

$P(Q) = a - Q$ με $a > 0$

↳ τιμή στην οποία θα πωληθεί το προϊόν.

$C_i(q_i) = c q_i$ κόστος παραγωγής ποσότητας $q_i$

Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από το ΣΣΙ:

- κάθε εταιρεία θα φτιάξει ποσότητα $q_i^* = \frac{a-c}{3}$
- Η συνολική ποσότητα που θα παραχθεί είναι $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2(a-c)}{3}$
- Η τιμή στην οποία θα πουλήσουν είναι $P(Q^*) = a - \frac{2(a-c)}{3} = \frac{a+2c}{3}$
- Η πληρωμή κάθε εταιρείας είναι $u_i(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{9}$

γ) Τι θα γίνει αν οι εταιρείες συνεργαστούν;

Αν συνεργαστούν θεωρούμε ότι θα πάρουν αποφάσεις $(q_1, q_2)$ οι οποίες μεγιστοποιούν τη συνολική πληρωμή

Η συνολική πληρωμή είναι:

$$u(q_1, q_2) = u_1(q_1, q_2) + u_2(q_1, q_2) = q_1[a-(q_1+q_2)] + q_2[a-(q_1+q_2)] - cq_1 - cq_2$$
$$= (q_1+q_2)[a-(q_1+q_2)] - c(q_1+q_2)$$

Παρατηρούμε ότι η $u$ εξαρτάται από τις $q_1, q_2$ μέσω του αθροίσματος $q_1+q_2=Q$

Άρα $u(Q)=Q(\alpha-Q)-cQ$

Τελικά, θέλουν να βρουν το $\tilde{Q}$ που μεγιστοποιεί την $u(Q)$:

$$u'(Q)=\alpha-Q-Q-c=\alpha-c-2Q$$
$$u''(Q)=-2<0 \Longrightarrow \text{Η } u(Q) \text{ κοίλη}$$

F.O.C. $u'(\tilde{Q})=0 \Leftrightarrow \alpha-c-2\tilde{Q}=0 \Leftrightarrow \tilde{Q}=\frac{\alpha-c}{2}$

Άρα $\tilde{q}_i=\frac{\alpha-c}{4}$

## Χαρακτηριστικά συστήματος όταν συνεργάζονται

- Κάθε εταιρεία παράγει ποσότητα $\tilde{q}_i=\frac{\alpha-c}{4}<\frac{\alpha-c}{3}=q_i^*$
- Η συνολική ποσότητα που φτιάχνουν είναι $\tilde{Q}=\frac{\alpha-c}{2}<\frac{2(\alpha-c)}{3}=Q^*$
- Η τιμή ανά μονάδα προϊόντος είναι
$$P(\tilde{Q})=\alpha-\tilde{Q}=\alpha-\frac{\alpha-c}{2}=\frac{\alpha+c}{2}>\frac{\alpha+2c}{2}=P(Q^*)$$

- Το κέρδος για κάθε εταιρεία είναι:

$$\frac{u(\tilde{Q})}{2}=\frac{(\alpha-c)^2}{8}>\frac{(\alpha-c)^2}{9}=u_i(q_1^*,q_2^*)$$

# Το Πρόβλημα των δημόσιων αγαθών

Διαισθητικά περιμένουμε ότι στην περίπτωση που κάθε άτομο ενεργεί μόνος του (ανταγωνίζοντας τους υπόλοιπους) καταναλώνει περισσότερο από όταν συνεργάζονται όλα τα άτομα της κοινωνίας

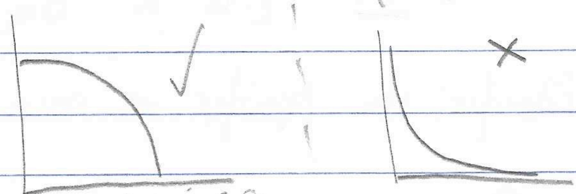
Υπάρχει η πεποίθηση ότι όταν ο καθένας αποφασίζει την ποσότητα που θα καταναλώσει από ένα δημόσιο αγαθό, με γνώμονα το ατομικό του συμφέρον, τότε θα υπερκαταναλώσει
Για να το ελέγξουμε χρησιμοποιούμε το παρακάτω μοντέλο

- Έστω χωριό με $n$ κτηνοτρόφους
- Οι κτηνοτρόφοι αφήνουν τις κατσίκες να βοσκίσουν στο χωράφι
- $g_i$ = # κατσικιών κτηνοτρόφου $i$ (απόφαση, $g_i \in \mathbb{R}^+$)
- $G = g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n$ συνολικό

Θα έχουμε $v(G)$: ωφέλεια που έχει ο κτηνοτρόφος από τη βοσκή μιας κατσίκας.

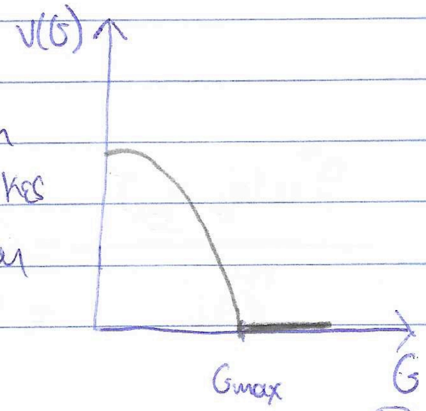
Η $v(G)$ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

Πιθανά Σενάρια




για μικρά G δεν περιμένουμε μεγάλη αλλαγή στην ωφέλεια

- $v(G) > 0$ για $G < G_{max}$
- $v(G) = 0$ για $G \geq G_{max}$
- $v'(G) < 0$ γιατί όσο μεγαλώνει ο πληθυσμός τόσο μικρότερο το ποσοστό γης που αντιστοιχεί στην κάθε μία.
- $v''(G) < 0$ γιατί η μείωση είναι μεγαλύτερη όταν υπάρχουν ήδη πολλές κατσίκες
- $C$ = κόστος που έχει μια κατσίκα για τον αγρότη



Οι κτηνοτρόφοι αποφασίζουν ταυτόχρονα πόσες κατσίκες θα πάρουν:
Θεωρούμε 2 σενάρια:
(1) Ανταγωνισμός
(2) Συνεργασία

Όταν έχουμε Ανταγωνισμό (1)

Περιγραφή Παιχνιδιού: Έχουμε n παίκτες (κτηνοτρόφοι), με σύνολο στρατηγικών $S_i = \{q_i : q_i \in [0, G_{max}]\}$ και συναρτήσεις πληρωμής ως εξής:

$$u_i(q_i, \underline{q_{-i}}) = q_i v(q_1 + q_2 + \dots + q_n) - c q_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\underline{q_{-i}} \to (q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$
αποφάσεις υπολοίπων παικτών

Θέλουμε να βρούμε Σ.Σ.Ι $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$
Χρησιμοποιούμε τον ορισμό: $(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow q_i^* \in BR_i(\underline{q_{-i}^*})\ \forall i$

Υπολογισμός Βέλτιστων Απαντήσεων:

$$BR_i(\underline{q_{-i}^*}) = \{q_i : q_i = \arg\max_{q_i} u_i(q_i, \underline{q_{-i}})$$

Θέλουμε να βρούμε σε ποια $q_i$ μεγιστοποιείται η $u_i(q_i, \underline{q_{-i}}) = q_i v(q_1 + \dots + q_n) - c q_i$

$$\frac{\partial u(q_i, \underline{q_{-i}})}{\partial q_i} = \underbrace{v(q_1 + \dots + q_n) + q_i v'(q_1 + \dots + q_n) \cdot 1}_{q_i' v(\dots) + q_i \cdot v'(h(q_i))} - c$$

$$q_i' v(\dots) + q_i \cdot v'(h(q_i)) = q_i'(v(\dots)) + q_i v'(\dots) \cdot h'(q_i)$$

$$\frac{\partial^2 u(q_i, \underline{q_{-i}})}{\partial^2 q_i} = v'(q_1 + \dots + q_n) \cdot 1 + v'(q_1 + \dots + q_n) + q_i \cdot v''(q_1 + \dots + q_n) \cdot 1$$

$$= 2\underbrace{v'(q_1 + \dots + q_n)}_{<0} + q_i \underbrace{v''(q_1 + \dots + q_n)}_{<0} < 0$$

Άρα $\frac{\partial^2 u_i(q_i, \underline{q_{-i}})}{\partial^2 q_i}$ κοίλη ως προς $q_i$

FOC: $\frac{\partial u_i(q_i^*, \underline{q_{-i}})}{\partial q_i} = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{v(q_1 + \ldots + \underset{\substack{\uparrow \\ q_i^*}}{\ldots} + q_n)}_{\substack{\| \\ q_i^* + q_1 + q_2 + \ldots + q_{i-1} + q_{i+1} + \ldots + q_n \\ \| \\ q_i^* + G_{-i}}} + q_i^* v'(q_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ q_i^*}}{\ldots} + q_n) - c = 0$$

Δεν μπορώ να λύσω απευθείας ως προς $q_i$

$$\Leftrightarrow v(q_i^* + G_{-i}) + q_i^* v'(q_i^* + G_{-i}) - c = 0$$

Άρα οι βέλτιστες απαντήσεις $\boxed{BR_i(\underline{q_{-i}}) = \{q_i^* : v(q_i^* + G_{-i}) + q_i^* v'(q_i^* + G_{-i}) - c = 0\}}$

Υπολογισμός Σ.Σ.Ι:

Ένα προφίλ στρατηγικών $(q_1^*, q_2^*, \ldots q_n^*)$ είναι ΣΣΙ αν $q_i^* \in BR_i(\underline{q_{-i}^*})$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Άρα για κάθε παίκτη πρέπει να ισχύει:

$$v(\underbrace{q_i^* + G_{-i}^*}_{G = q_1^* + \ldots + q_n^*}) + q_i^* v'(q_i^* + G_{-i}^*) - c = 0 \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow v(G^*) + q_i^* v'(G^*) - c = 0 \quad \forall i \quad (1)$$

Προσθέτοντας $\forall i$ την (1) έχουμε:

$$n v(G^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i^*}_{G^*} v'(G) - nc = 0$$

$$\Leftrightarrow n v(G^*) + G^* v'(G^*) - nc = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0}$$

# Όταν έχουμε Συνεργασία (2)

Θα βρούμε $\tilde{G}$ που μεγιστοποιεί τη συνολική πληρωμή τους $u(q_1,q_2,\dots,q_n)$

$$u(q_1,\dots,q_n)=\sum_{i=1}^{n}u_i(q_i,\underline{q_{-i}})=\sum_{i=1}^{n}\left[q_i v(q_1+\dots+q_n)-cq_i\right]$$

$$=\underbrace{(q_1+\dots+q_n)}_{G}\,v(q_1+q_2+\dots+q_n)-c(q_1+q_2+\dots+q_n)$$

$$\Rightarrow \quad u(G)=Gv(G)-cG$$

Έχουμε $u'(G)=v(G)+Gv'(G)-c$

$$u''(G)=v'(G)+v'(G)+Gv''(G)$$
$$=2\underbrace{v'(G)}_{<0}+G\underbrace{v''(G)}_{<0}<0 \Rightarrow u(G) \text{ κοίλη ως προς } G$$

F.O.C: $u'(\tilde{G})=0$

$$\Leftrightarrow \boxed{v(\tilde{G})+\tilde{G}v'(\tilde{G})-c=0}$$

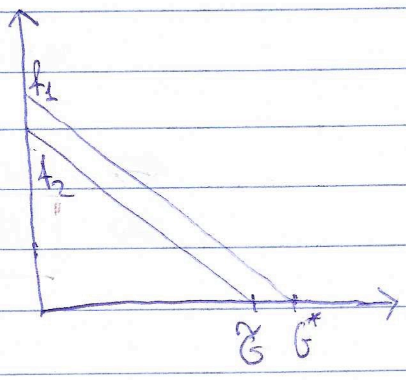
Σύγκριση:

$v(G^*)+\frac{1}{n}G^*v'(G^*)-c=0 \qquad f_1(G)=v(G)+\frac{1}{n}Gv'(G)-c \qquad f_1(G^*)=0$

$v(\tilde{G})+\tilde{G}v'(\tilde{G})-c=0 \qquad f_2(G)=v(G)+Gv'(G)-c \qquad f_2(\tilde{G})=0$

$f_1(G)>f_2(G)$ και $f_1(G), f_2(G)$ φθίνουσες

Άρα $\boxed{G^*>\tilde{G}}$




Δηλαδή όταν ο καθένας κοιτάει το ατομικό του συμφέρον χρησιμοποιεί το δημόσιο αγαθό περισσότερο από ότι είναι κοινωνικά βέλτιστο.

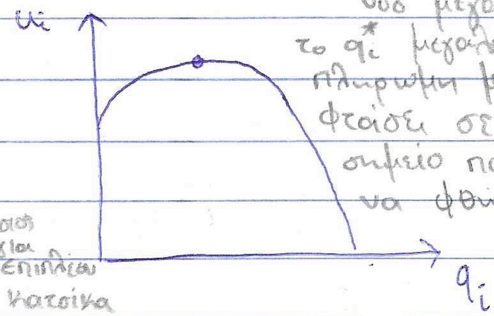
# Απο πού προκύπτει η διαφορα;

## Στο Σ.Σ.Ι (όταν φέρονται ατομικιστικά):

Ο καθένας θέλει να μεγιστοποιήσει τη δική του συνάρτηση πληρωμής γάχνωντας $q_i^*$ τ.ω:

marginal-οριακή πληρωμή
ρυθμός μεταβολής

$$\frac{\partial u_i(q_i^*, q_{-i})}{\partial q_i} = 0$$




Όσο μεγαλώνει το $q_i^*$ μεγαλώνει η πληρωμή μέχρι να φτάσει σε ενα σημείο που αρχίζει να φθίνει.

||

(αν αυξήσω κατά μια κατσίκα) $\Rightarrow \underbrace{v(q_i^* + G_{-i})}_{\substack{\text{ωφέλος απο βοσκή} \\ \text{επιπλέον κατσίκας} \\ >0}} + \underbrace{q_i v^{*\prime}(q_i^* + G_{-i})}_{\substack{\text{μείωση στο ωφέλος} \\ \text{των δικών του κατσικιών} \\ \text{επειδή τις αυξησε} \\ <0}} - c$

κόστος για επιπλέον κατσίκα

Ο κτηνοτρόφος θέλει να αυξήσει το $q_i$ μέχρι ο ρυθμός μεταβολής της πληρωμής να γίνει 0

## Για το κοινωνικό βέλτιστο (όταν συνεργάζονται):

Οι παίκτες θέλουν να μεγιστοποιήσουν την συνολική πληρωμή γάχνωντας $\tilde{G}^*$ τ.ω:

ρυθμός μεταβολής συνολικής πληρ.
marginal οριακή συνολική πληρωμή

$$\frac{\partial u(\tilde{G}^*)}{\partial G} = 0$$

||

(αν αυξήσουμε κατα 1 κατσίκα το G) $\underbrace{v(\tilde{G})}_{\substack{\text{ωφέλος} \\ \text{απο βοσκή} \\ \text{1 κατσίκας}}} + \underbrace{\tilde{G} v'(\tilde{G})}_{\substack{\text{συνολική μείωση} \\ \text{στο ωφέλος για} \\ \text{όλες τις κατσίκες}}} - c$

Πιθανοί Τρόποι να κάνουμε ατομιστές να συμπεριφερθουν κοινωνικά καλύτερα.

1) Επιβολή Ποινής απο ενα $q_i$ και μετά
2) Καθορισμός Ορίου για $q_i$
3) Βραβείο για όσους αποφασίζουν $q_i$ εντος κάποιων ορίων.