

## Διάλεξη 2<sup>η</sup>

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow s_i \in BR_i(s_{-i}), \quad \forall i$$

Παράδειγμα (0 πόλεμος των ψήφων)

| 1 \ 2 | 0      | ε      |
|-------|--------|--------|
| 0     | (3, 1) | (0, 0) |
| ε     | (0, 0) | (1, 3) |

α' τρόπος : Τελευτούμε ένα-ένα αν είναι ΣΣΙ

|        |   |                                                                    |
|--------|---|--------------------------------------------------------------------|
| (0, 0) | ✓ | $BR_1(0) = 0, BR_2(0) = 0$                                         |
| (0, ε) | ✗ | για $BR_1(\varepsilon) = \varepsilon$                              |
| (ε, 0) | ✗ | για $BR_2(0) = 0$                                                  |
| (ε, ε) | ✓ | $BR_1(\varepsilon) = \varepsilon, BR_2(\varepsilon) = \varepsilon$ |

Υπάρχουν 2 ΣΣΙ :

|        |    |           |        |
|--------|----|-----------|--------|
| (0, 0) | με | αληθευτές | (3, 1) |
| (ε, ε) | ⇒  | ⇒         | (1, 3) |

Αρα :

- 1) Μπορεί το ΣΣΙ να μην είναι μοναδικό
- 2) Μπορεί να υπάρχουν ΣΣΙ με διαφορετικούς αληθευτές
- 3) Μπορεί να μην υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ, οπότε να υπάρχει ΣΣΙ.

## 6' ζέσος

| 1 \ 2 | 0      | ε      |
|-------|--------|--------|
| 0     | (3, 1) | (0, 0) |
| ε     | (0, 0) | (1, 3) |

Υπάρχουν 2 ΖΣΣ

• Το (0, 0) με πληρωμές (3, 1)

• Το (ε, ε)  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  (1, 3)

## Παράδειγμα (Το διάνημα των φυλακισμένων)

| 1 \ 2 | o        | So       |
|-------|----------|----------|
| o     | (-6, -6) | (0, -9)  |
| So    | (-9, 0)  | (-1, -1) |

Το ΖΣΣ είναι το (0, 0) με πληρωμές (-6, -6).

## Παράδειγμα (The odd couple)

Υπάρχουν 2 συζευγμένοι: Η Felix (1) και ο Oscar (2).  
Κάθε ένας μπορεί να επιλέξει 3, 6 ή 9 ώρες  
για την καθυστέρηση του συντρόφου.

Αν επιλέξουν συνολικά

πλην 12 ώρες, το σπίτι είναι καθαρό.

9 ώρες, το σπίτι είναι υπαίθετο

το πολύ 6 ώρες, το σπίτι είναι βρόμικο.

Οι μονάδες υπέρτατος που λαμβάνει η Felix ανάλογα με την κατάσταση του Γουλιέλμου είναι

10, αν είναι υακρό  
2, " " υποκρό  
-10, " " θρόμικος.

Οι μονάδες υπέρτατος που λαμβάνει ο Oscar ανάλογα με την κατάσταση του Γουλιέλμου είναι

5, αν είναι υακρό  
2, " " υποκρό  
-5, " " θρόμικος.

Η πληρωμή ενός παίκτη καθορίζεται με τις μονάδες υπέρτατος που λαμβάνει για την κατάσταση του Γουλιέλμου μείον τόσες μονάδες υπέρτατος όσες οι ύπες που επιβραβεύει την κατάσταση.

1) Να διατυπωθεί το παιχνίδι σε κανονική μορφή

2) Να επιβραβεύει αν υπάρχει λύση σε ΕΑΚΣ

3) " " " " " " ΣΣΣ.

Λύση

| 1 \ 2 | 3           | 6          | 9         |
|-------|-------------|------------|-----------|
| 3     | $(-13, -8)$ | $(-1, -4)$ | $(7, -4)$ |
| 6     | $(-4, -1)$  | $(4, -1)$  | $(4, -4)$ |
| 9     | $(1, 2)$    | $(1, -1)$  | $(1, -4)$ |

2) Για τον Ι: -

Για τον ΙΙ: -

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

3)

| 1 \ 2 | 3            | 6            | 9           |
|-------|--------------|--------------|-------------|
| 3     | $(-13, -8)$  | $(-1, -4)^*$ | $(7, -4)^*$ |
| 6     | $(-4, -1)^*$ | $(4, -1)^*$  | $(4, -4)$   |
| 9     | $(1, 2)^*$   | $(1, -1)$    | $(1, -4)$   |

Υπάρχουν 3 ΣΣΣ:

- το  $(3, 9)$  με πληρωμές  $(7, -4)$
- το  $(6, 6)$  " "  $(4, -1)$
- το  $(9, 3)$  " "  $(1, 2)$

### Παρέδειγμα (Bertrand Price Competition)

Θεωρούμε 2 εταιρίες: 1 και 2

Κάθε εταιρία επιλέγει τιμή για το προϊόν της: 12, 10 ή 8 Ευρώ.

Η αγορά αποτελείται από 1000 πελάτες.

Αν οι εταιρίες αποφασίσουν διαφορετικές τιμές, τότε οι πελάτες θα αγοράσουν από αυτή με τη μικρότερη τιμή.

Αν επιλέξουν ίδιες τιμές, οι πελάτες θα μοιραστούν.

Η πληρωμή κάθε εταιρίας είναι το έσοδο από την πώληση του προϊόντος.

α) Να διατυπωθεί το παιχνίδι σε κανονική μορφή.

β) Να επιλέξετε αν υπάρχει λίκνο με ΕΑΤΣ

γ) " " " " ΣΣΣ.

α)

|     |  | πληρωμές σε χιλ. € |         |         |
|-----|--|--------------------|---------|---------|
| 1/2 |  | 8                  | 10      | 12      |
| 8   |  | (4, 4)             | (8, 0)  | (8, 0)  |
| 10  |  | (0, 8)             | (5, 5)  | (10, 0) |
| 12  |  | (0, 8)             | (0, 10) | (6, 6)  |

8)

| 1/2 | 8                 | 10                 | 12                 |
|-----|-------------------|--------------------|--------------------|
| 8   | (4, 4)            | <del>(8, 0)</del>  | <del>(8, 0)</del>  |
| 10  | <del>(0, 8)</del> | <del>(5, 5)</del>  | <del>(10, 0)</del> |
| 12  | <del>(0, 8)</del> | <del>(0, 10)</del> | <del>(6, 6)</del>  |

Για τον I: Η 12 υπερβαίνει αυστηρά από την 8

Για τον II: Η 10 υπερβαίνει από την 8  
 Η 12 >> >> 8

Για τον I: Η 10 υπερβαίνει από την 8

Η λύση με ΕΑΚΣ είναι (8, 8) με πληρωμές (4, 4)

g)

| 1/2 | 8                 | 10                 | 12                 |
|-----|-------------------|--------------------|--------------------|
| 8   | <del>(4, 4)</del> | <del>(8, 0)</del>  | <del>(8, 0)</del>  |
| 10  | <del>(0, 8)</del> | <del>(5, 5)</del>  | <del>(10, 0)</del> |
| 12  | <del>(0, 8)</del> | <del>(0, 10)</del> | <del>(6, 6)</del>  |

Υπάρχει ένα ΣΣΙ, το (8, 8) με πληρωμές (4, 4)

## Σχέση λίκου με ΕΑΚΣ και ΣΣΙ

$$\underline{S}^* \text{ λίκου με ΕΑΚΣ} \Rightarrow \underline{S}^* \Sigma \Sigma \text{I}$$

$$\underline{S}^* \Sigma \Sigma \text{I} \Rightarrow \underline{S}^* \text{ λίκου με ΕΑΚΣ}$$

## Εφαρμογές

### Cournot model of Duopoly

Δύο εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν

$q_i$ : ποσότητα προϊόντος να παράγεται από την εταιρεία  $i$ ,  $i=1,2$ .

$$Q = q_1 + q_2$$

$P(Q)$ : τιμή προϊόντος αν η ποσότητα να θα παραχθεί είναι  $Q$ .

$$P(Q) = a - Q, \text{ με } a > 0$$

$C_i(q_i)$ : κόστος παραγωγής για την εταιρεία  $i$  της ποσότητας  $q_i$ ,  $i=1,2$ .

$$C_i(q_i) = c \cdot q_i, \text{ με } 0 < c < a$$

Οι εταιρείες αποφασίζουν τις ποσότητες να θα παράγουν ταυτόχρονα και η μεθυσία αποφασίζει με βάση τη μεγιστοποίηση του καθαρού κέρδους της.

α) Να διασυνδέσει το παιχνίδι σε κανονική μορφή.

β) Να βρούμε ΣΣΙ και τις αλληλεπίδρασεις κάτω από το ΣΣΙ.

γ) Να βρούμε τι στρατηγικές θα επιλέξουν αν συνεχεύσουν και οι αλληλεπίδρασεις θα έχουν

a) Akteure : 1 und 2 (o. die Spieler)

Strategien :  $S_1 = \{q_1 : q_1 \in [0, +\infty)\}$

$S_2 = \{q_2 : q_2 \in [0, +\infty)\}$

Nutzen :

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 \cdot \underbrace{P(q_1 + q_2)}_{a - (q_1 + q_2)} - c \cdot q_1 =$$

$$q_1 [a - (q_1 + q_2)] - c q_1 =$$

$$q_1 a - q_1^2 - q_1 q_2 - c q_1 =$$

$$-q_1^2 + (a - c - q_2) q_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2 \cdot [a - (q_1 + q_2)] - c q_2$$

$$= -q_2^2 + (a - c - q_1) \cdot q_2$$

$$(b) (q_1^*, q_2^*) \text{ SSI} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* \in BR_1(q_2^*) \\ q_2^* \in BR_2(q_1^*) \end{cases}$$

Für ein Bestgk  $\text{SSI}$ , da Bestgk nur aus  
zu Bestgkes anerkennen

Ynachweis  $BR_1(q_2)$

$$BR_1(q_2) = \{q_1^* : q_1^* = \underset{q_1}{\operatorname{argmax}} u_1(q_1, q_2)\}$$

↑

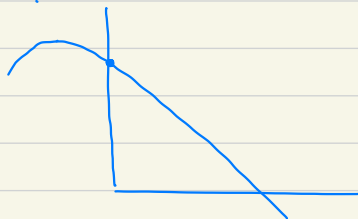
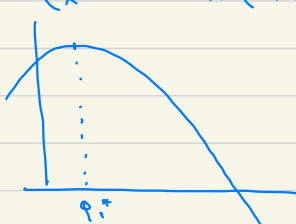
n. Bf. über n. Strategie zu 1. max. maximieren  
von  $u_1(q_1, q_2)$  vs. nach  $q_1$

$$u_1(q_1, q_2) = -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1$$

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = -2q_1 + a - c - q_2$$

$$\frac{\partial^2 u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -2 < 0 \Rightarrow u_1(q_1, q_2) \text{ maximizes w.r.t } q_1$$

Υαίρεται 2 περιπτώσεις:



$$\frac{\partial u_1(q_1^*, q_2)}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow -2q_1^* + a - c - q_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$q_1^* = \frac{a - c - q_2}{2}$$

$$q_1^* \geq 0$$

$$q_1^* \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a - c - q_2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a - c - q_2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$q_2 \leq a - c$$

$$q_1^* < 0 \Leftrightarrow q_2 > a - c$$

$$BR_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a - c - q_2}{2} & , \text{ if } q_2 \leq a - c \\ 0 & , \text{ if } q_2 > a - c \end{cases}$$

### Υπολογισμός $BR_2(q_1)$

Λόγω συμμετρίας,

$$BR_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c-q_1}{2}, & q_1 \leq a-c \\ 0, & q_1 > a-c \end{cases}$$

### Υπολογισμός $\Sigma\Sigma I$

$$(q_1^*, q_2^*) \Sigma\Sigma I \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* \in BR_1(q_2^*) \\ q_2^* \in BR_2(q_1^*) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-c-q_2^*}{2} \\ q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* = \frac{a-c - \frac{a-c-q_1^*}{2}}{2} \\ q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2q_1^* = \frac{2(a-c) - (a-c) + q_1^*}{2} \\ q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4q_1^* = a-c + q_1^* \\ q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^* = \frac{a-c}{3} \\ q_2^* = \frac{a-c - \frac{a-c}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-c}{3} \\ q_2^* = \frac{a-c}{3} \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } \Sigma\Sigma I : (q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3} \right)$$

H nánpuyun zu 1 0a eva

$$\begin{aligned}u_1(q_1^*, q_2^*) &= q_1^* [a - (q_1^* + q_2^*)] - cq_1^* \\&= q_1^* [a - c - (q_1^* + q_2^*)] \\&= \frac{a-c}{3} \left[ a-c - \frac{2(a-c)}{3} \right] \\&= \frac{a-c}{3} \frac{a-c}{3} \\&= \frac{(a-c)^2}{9}\end{aligned}$$

Arigwaxe

$$u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{9}$$