

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Εισαγωγή:

Στον μαθ. Προγραμματισμό προσπαθούσαμε να βελτιστοποιήσουμε μια ποσότητα (ανταπόδοση) που εξαρτάται μόνο από δικές μας αποφάσεις.

Στην Θεωρία Παιγνίων υπάρχουν πολλές οντότητες που αποφασίζουν (Παίκτες). Κάθε παίκτης θέλει να βελτιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια. Η ωφέλεια κάθε παίκτη εξαρτάται από τις αποφάσεις όλων των παικτών.

Παραδείγματα:

- 1) Τιμολόγηση αγαθών ή προϊόντων.
- 2) Χρηματοδότηση έρευνας & ανάπτυξης.
- 3) Εκδόσεις (έχουμε 3 υποψήφιους προέδρους $A > B > \Gamma$. Μόνο ένας προτιμάμε Α αλλά οι περισσότεροι προτιμούν μόνο Β ή Γ. Έκτος χωρίζοντας την προτίμηση των υποψηφίων μπορεί να διαλέγουμε να γυμνάσουμε Β για να αποκρίσουμε Γ)

Ερωτήσεις:

- Ποιοι αποφασίζουν; Ποιοι είναι οι **Παίκτες**
- Τι αποφάσεις μπορούν να πάρουν; Ποιες είναι οι **στρατηγικές**
- Ποια είναι η **πληρωμή** κάθε παίκτη ανάλογα με τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν.

(Τα 3 αυτά στοιχεία μας δίνουν την περιγραφή του παιχνιδιού)

- Τι θα κάνουν τελικά οι παίκτες; Ποια είναι η **λύση**; Ποιες στρατηγικές θα ακολουθήσουν;
- Υπάρχει πάντα λύση; Αν ναι είναι **μοναδική**;
- Η λύση του παιχνιδιού είναι **κοινωνικά βέλτιστη**;

(τα 2 τελευταία στοιχεία αφορούν τις ιδιότητες των λύσεων)

• Τι γίνεται όταν οι αποφάσεις παίρνονται σε στάδια;
(στατικά - δυναμικά Παιχνίδια)

• Τι γίνεται όταν δεν γνωρίζει ο ένας παίκτης την πληροφορία των άλλων
(Πλήρους πληροφορίας - Ελλιπούς πληροφορίας)

Ενότητες:

1. Στατικά Παιχνίδια Πλήρους Πληροφορίας
2. Δυναμικά Παιχνίδια Πλήρους Πληροφορίας
3. Στατικά Παιχνίδια Ελλιπούς Πληροφορίας
4. Δυναμικά Παιχνίδια Ελλιπούς Πληροφορίας

Βιβλιογραφία:

- Gibbons: Game Theory for Applied Economics
- Dutta: Strategies and Games.
- Μαχρίπου: Παιχνίδια και αποφάσεις.

Ενότητα 1: Στατικά Παιχνιά Πλήρους Πληροφορίας

Κανονική Μορφή Παιχνιού:

Ένα παιχνίδι σε κανονική μορφή δίνει πληροφορίες για:

- 1) τους Παικτές
- 2) σύνολο στρατηγικών κάθε παίκτη
- 3) Πληρωμές Παικτών για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

(για παιχνίδια δυο παικτών όλα τα παραπάνω δίνονται σε έναν πίνακα)

Παράδειγμα: Δίδυμοι των φυλακισμένων

Υπάρχουν 2 ύποπτοι για άνοση 1 και 2.

Κρατώνται σε διαφορετικά κελιά και δεν μπορούν να επικοινωνήσουν.

Ο καθένας έχει επιλογή να ομολογήσει (ο) ή να μην ομολογήσει (δ.ο)

Αν κανείς δεν ομολογήσει θα φυλακισθεί ο καθένας 1 χρόνο.

Αν ο ένας ομολογήσει και ο άλλος δεν ομολογήσει θα απελευθερωθεί, ο άλλος θα φυλακισθεί για 9 χρόνια.

Αν ομολογήσουν και οι δυο θα φυλακισθούν για 6 χρόνια.

Θέλουμε να περιγράψουμε το παραπάνω σε κανονική μορφή:

Παικτές: 1, 2

Στρατηγικές κάθε Παικτη: ο 1: ο ή δ.ο
 ο 2: ο ή δ.ο

1\2	ο	δ.ο
ο	(-6, -6)	(0, -9)
δ.ο	(-9, 0)	(-1, -1)

Συμβολισμοί:

Έστω παιχνίδι n παικτών: $\{1, 2, \dots, n\}$ σύνολο παικτών.

S_i σύνολο στρατηγικών του παίκτη i , $i=1, 2, \dots, n$

s_i στρατηγική του παίκτη i , $i=1, 2, \dots, n$ $s_i \in S_i$

$(s_1, s_2, \dots, s_n)$ Προφίλ στρατηγικών ή στρατηγική κατάσταση.

$u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ Πληρωμή του παίκτη i αν οι παίκτες ακολουθήσουν το προφίλ στρατηγικών $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $i=1, 2, \dots, n$ (εναλλακτικά: $u_i(\underline{s})$ ή $u_i(s_i, \underline{s}_{-i})$)
↳ τονίζει την στρατηγική του i

Επαναλαμβανόμενο Αφαίρεση Κυριαρχούντων Στρατηγικών (ΕΑΚΣ)

Ορισμός: (αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική)

Έστω ένα παιχνίδι n παικτών σε κανονική μορφή:

$G = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Έστω s_i' ή s_i'' δύο στρατηγικές του παίκτη i
Η s_i' κυριαρχείται αυστηρά ή είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την s_i'' αν
 $u_i(s_i', \underline{s}_{-i}) < u_i(s_i'', \underline{s}_{-i}) \quad \forall \underline{s}_{-i}$

Παράδειγμα: (Το δίδυμο του φιδολοιφένου)

1\2	0	Δ.0
0	(-6, -6)	(0, -9)
Δ.0	(-9, 0)	(-1, -1)

Για τον 1: Η γραμμή 0 είναι πάντα καλύτερη από την Δ.0 είτε και αν κάνει ο άλλος παίκτης.
(-6 > -9 κ' 0 > -1) Άρα Δ.0 είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την 0.

Για τον 2: Η στήλη Δ.0 δίνει πάντα χειρότερη πληρωμή είτε και αν κάνει ο άλλος παίκτης.
(-6 > -9 κ' 0 > -1) Άρα Δ.0 είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την 0.

Επομένως και οι δύο παίκτες φιδολοιφούν

Η λύση είναι η στρατηγική κατάσταση (0, 0) με πληρωμές (-6, -6)

Παράδειγμα:

1/2	left	right
up	(7,2)	(5,3)
down	(6,0)	(3,-1)

Ο 1: Η γραμμή up δίνει πάντα καλύτερη πιθανότητα από την down
Η down κυριαρχείται αυτομικά από την up

Για τον 2: Δεν υπάρχει κάποια σκίνη που να είναι καλύτερη από την άλλη. Οποιοσδήποτε πει ότι ο 1 είναι λογικός και ότι έχει αφαιρέσει την down διαλέγει την right. Η left κυριαρχείται αυτομικά από την right.

Η λύση με ΕΑΚΣ είναι (up, right) με πιθανότητες (5,3)

Παράδειγμα:

1/2	left	middle	right
up	(1,0)	(1,2)	(0,1)
down	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Για τον 1: Δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την up

Για τον 2: Η σκίνη right κυριαρχείται από τη middle. Συνεπώς και τις άλλες δύο άλλα δεν βγάλουμε κάποιο αποτέλεσμα.

Επιστρέφω στον 1: Γνωρίζοντας την προτίμηση του 2 ο 1 προτιμά την up.
Η down κυριαρχείται αυτομικά από την up.

Επιστρέφω στον 2: Πλέον η left κυριαρχείται από τη middle.
Η λύση με ΕΑΚΣ είναι (up, middle) με πιθανότητες (1,2)

Παράδειγμα:

1 \ 2	L	M	R
up	(0,1)	(4,0)	(5,3)
middle	(4,0)	(0,4)	(5,3)
down	(3,5)	(3,5)	(6,6)

Για τον 1: -

Για τον 2: -

Δεν έχουμε πάντα
λύση με ΕΑΗΣ

Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας (SSI)

(Nash Equilibrium)

Ορισμός: (Βέλτιστη Ανάκριση - Σύνολο Βέλτιστων απαντήσεων)

Έστω $\underline{s}_{-i}^*$ στρατηγική όλων των παικτών εκτός του i

Μια στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι βέλτιστη ανάκριση στην $\underline{s}_{-i}^*$ αν:

$$u_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

Εν στρατηγική που του δίνει την
μεγιστή πιθανή δόξα ως στρατηγική
των άλλων παικτών.

Αντίστροφα η στρατηγική s_i^* είναι βέλτιστη ανάκριση του i στην $\underline{s}_{-i}^*$ αν,
δεδομένου ότι οι άλλοι θα ακολουθήσουν την $\underline{s}_{-i}^*$, η πιθανότητα του i
μεγιστοποιείται όταν ακολουθεί την s_i^*

Το σύνολο βέλτιστων απαντήσεων του i στην $\underline{s}_{-i}^*$ είναι το

$$BR_i(\underline{s}_{-i}^*) = \{s_i \in S_i : s_i = \arg \max u_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*)\}$$

Παράδειγμα: (0 παίκτης των φίλων)

Ένα ζευγάρι θέλει να αποφασίσει που θα πάει το βράδυ: Θέατρο ή Εστιατόριο.

- Η σύζυγος (παίκτης I) προτιμά να πάει Θέατρο,
- Ο παίκτης II προτιμά να πάει εστιατόριο

Αποφασίζουν που θα πάνε ταυτόχρονα χωρίς ο ένας να γνωρίζει την απόφαση του άλλου. Ο καθένας παίρνει:

- 0 μονάδες αν πάει κάπου μόνος
- 1 μονάδα αν πάει κάπου που δεν θέλει αλλά είναι μαζί με τον άλλο.
- 3 μονάδες αν πάει κάπου που θέλει και είναι μαζί με τον άλλο

Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή και να βρεθούν οι βέλτιστες απαντήσεις.

1/2	Θ	Ε
Θ	(3, 1)	(0, 0)
Ε	(0, 0)	(1, 3)

Παρατηρούμε ότι με ΕΑΚ.Σ δεν βρίσκουμε κάποια λύση.

$$BR_1(\theta) = \{\theta\}$$

$$BR_1(\epsilon) = \{\epsilon\}$$

απάντηση του 1
απάντηση σε στρατηγική του 2.

$$BR_2(\theta) = \{\theta\}$$

$$BR_2(\epsilon) = \{\epsilon\}$$

Ορισμός: (Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας)

Ένα προφίλ στρατηγικών $\underline{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ είναι Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας (Σ.Σ.Ι) αν για κάθε παίκτη ισχύει:

$$u_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$$

Ανταδίδει για κάθε παίκτη i η s_i^* να είναι βέλτιστη απάντηση συν $\underline{s}_{-i}^*$

Διασπαστικά: ένα προφίλ στρατηγικών $\underline{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ είναι Σ.Σ.Ι. όταν
ισχύει το εξής: αν κάποιος προτίει σε όλους να ακολουθήσουν την
 $\underline{s}^*$ και ο καθένας πιστεύει ότι οι άλλοι θα την ακολουθήσουν, τότε ούτε
αυτός θα μετακινηθεί

to be continued....