Πρόβλημα 1

(α)

1\2	t_1	t_2
s_1	$(3^*, 2^*)$	$(0, 1)$
s_2	$(1, 1)$	$(2^*, 3^*)$

Υπάρχουν 2 ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές:

(s_1, t_1) με πληρωμές $(3, 2)$

(s_2, t_2) » » $(2, 3)$

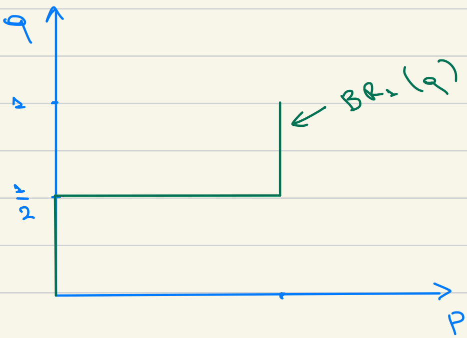
(β) Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του 1 στη στρατηγική $q = (q, 1-q)$ του παίκτη 2, $BR_1(q)$.

$$v_1(s_1, q) = 3q + 0(1-q) = 3q$$
$$v_1(s_2, q) = 1q + 2(1-q) = 2 - q$$

- Αν $v_1(s_1, q) > v_1(s_2, q) \Leftrightarrow 3q > 2-q \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$,
  τότε $BR_1(q) = \{s_1\} = \{(1, 0)\}$.
- Αν $v_1(s_1, q) < v_1(s_2, q) \Leftrightarrow 3q < 2-q \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$,
  τότε $BR_1(q) = \{s_2\} = \{(0, 1)\}$.
- Αν $v_1(s_1, q) = v_1(s_2, q) \Leftrightarrow 3q = 2-q \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$,
  τότε $BR_1(q) = \{(p, 1-p), p \in [0, 1]\}$.

Άρα,

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{(1, 0)\}, & \text{αν } q > \frac{1}{2} \\ \{(0, 1)\}, & \text{αν } q < \frac{1}{2} \\ \{(p, 1-p), p \in [0, 1]\}, & \text{αν } q = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του 2 στη στρατηγική $\underline{p}=(p,1-p)$ του παίκτη 1, $BR_2(p)$.

$v_2(\underline{p},t_1) = 2p + 1(1-p) = p+1$

$v_2(\underline{p},t_2) = 1p + 3(1-p) = 3-2p$

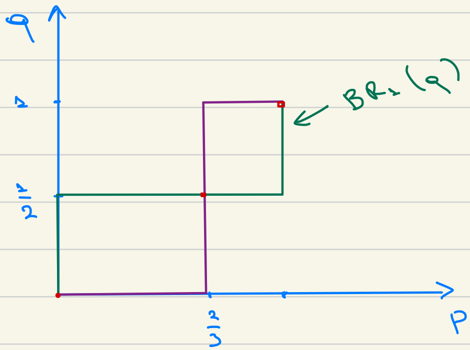
· Αν $v_2(\underline{p},t_1) > v_2(\underline{p},t_2) \iff p+1 > 3-2p \iff p > \frac{2}{3}$, τότε $BR_2(p) = \{(1,0)\}$.

· Αν $v_2(\underline{p},t_1) < v_2(\underline{p},t_2) \iff p+1 < 3-2p \iff p < \frac{2}{3}$, τότε $BR_2(p) = \{(0,1)\}$.

· Αν $v_2(\underline{p},t_1) = v_2(\underline{p},t_2) \iff p+1 = 3-2p \iff p = \frac{2}{3}$, τότε $BR_2(p) = \{(q,1-q), q\in[0,1]\}$.

Άρα,

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{αν } p > \frac{2}{3} \\ \{(0,1)\}, & \text{αν } p < \frac{2}{3} \\ \{(q,1-q), q\in[0,1]\}, & \text{αν } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$



Υπάρχουν 3 ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές:

- $((1,0),(1,0))$ με πληρωμές $(3,2)$
- $((0,1),(0,1))$ με πληρωμές $(2,3)$
- $((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ με πληρωμές $(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$

Πρόβλημα 2

Έχουμε ένα δυναμικό παίγνιο 2 σταδίων τέλειας και πλήρους πληροφόρησης.

Στο 1º στάδιο, ο παίκτης 1 αποφασίζει το χρηματικό ποσό που θα προσφέρει.

Στο 2º στάδιο, ο παίκτης 2 αποφασίζει το χρηματικό ποσό που θα προσφέρει, γνωρίζοντας την απόφαση του παίκτη 1 στο στάδιο 1.

Μελετάμε πρώτα το 2º στάδιο.

Ο παίκτης 2 λύνει το

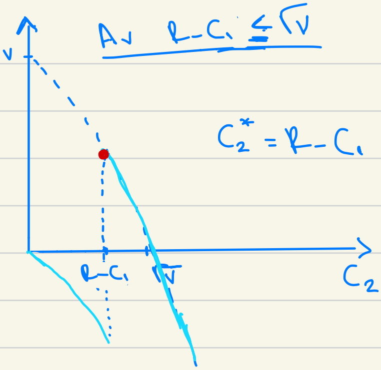
$$\max_{C_2 \geq 0} u_2(C_1, C_2)$$

με
$$u_2(C_1, C_2) = \begin{cases} V - C_2^2 & , \text{αν } C_1 + C_2 \geq R \\ 0 - C_2^2 & , \text{αν } C_1 + C_2 < R \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $u_2(C_1, C_2)$ ως προς C_2 είναι :

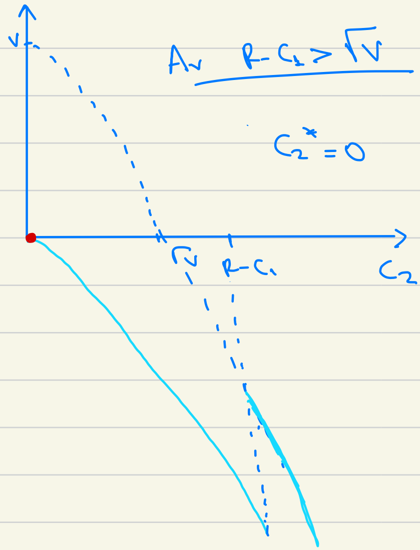
Αν $R - c_1 \leq \sqrt{v}$

$c_2^* = R - c_1$



Αν $R - c_1 > \sqrt{v}$

$c_2^* = 0$



Άρα $R_2(c_1) = \begin{cases} R - c_1, & \text{αν } c_1 \geq R - \sqrt{v} \\ 0, & \text{αν } c_1 < R - \sqrt{v} \end{cases}$

Μελετάμε το στάδιο 1.

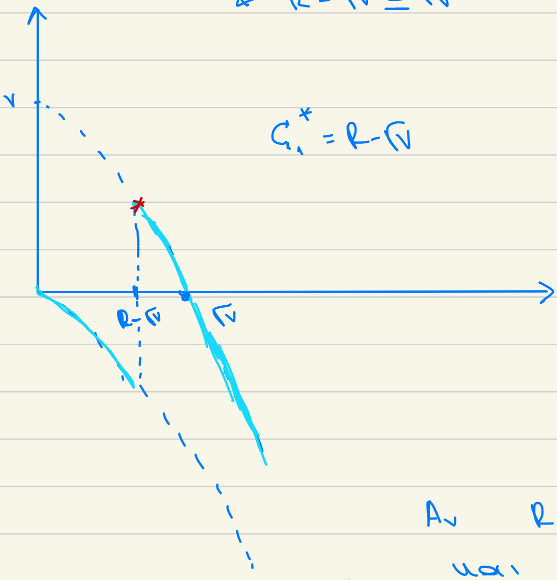
Ο παίκτης 1 λύνει το

$\max\limits_{c_1 \geq 0} u_1(c_1, R_2(c_1))$, όπου

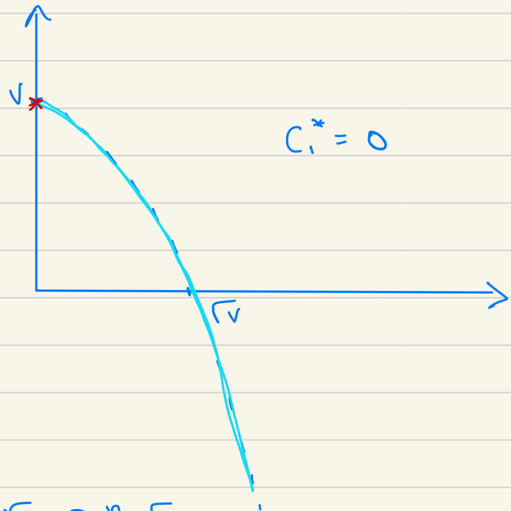
$$u_1(c_1, R_2(c_1)) = \begin{cases} V - c_1^2, & \text{αν } c_1 \geq R - \sqrt{V} \\ 0 - c_1^2, & \text{αν } c_1 < R - \sqrt{V} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $u_1(C_1, R_2(C_1))$ είναι

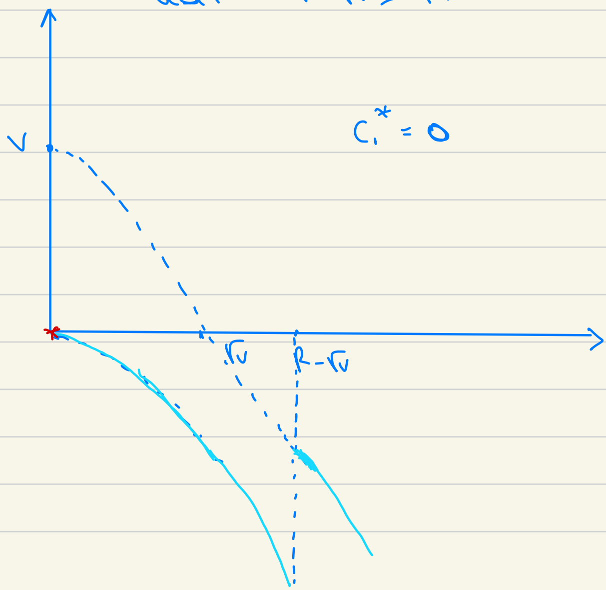
Αν $R \geq \sqrt{v} \Longleftrightarrow R-\sqrt{v} \geq 0$
& $R-\sqrt{v} \leq \sqrt{v}$



Αν $R < \sqrt{v} \Rightarrow R-\sqrt{v} < 0$



Αν $R \geq \sqrt{v} \Rightarrow R-\sqrt{v} \geq 0$
και $R-\sqrt{v} > \sqrt{v}$



Άρα,

$$C_1^* = \begin{cases} R-\sqrt{v} & , \text{ αν } 0 \le R-\sqrt{v} \le \sqrt{v} \\ 0 & , \text{ αν } R-\sqrt{v} < 0 \\ 0 & , \text{ αν } R-\sqrt{v} > \sqrt{v} \end{cases}$$

και

$$C_2^* = \begin{cases} R-(R-\sqrt{v}) & , \text{ αν } 0 \le R-\sqrt{v} \le \sqrt{v} \\ R & , \text{ αν } R-\sqrt{v} < 0 \\ 0 & , \text{ αν } R-\sqrt{v} > \sqrt{v} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2^* = \begin{cases} \sqrt{v} & , \text{ αν } \sqrt{v} \le R \le 2\sqrt{v} \\ R & , \text{ αν } R < \sqrt{v} \\ 0 & , \text{ αν } R > 2\sqrt{v} \end{cases}$$

Αν $R < \sqrt{v}$, $(C_1^*, C_2^*) = (0, R)$

(το κόστος είναι μικρό συγκριτικά με την ωφέλεια και ο 1 βάζει 0 γνωρίζοντας ότι ο 2 θα καλύψει όλο το κόστος)

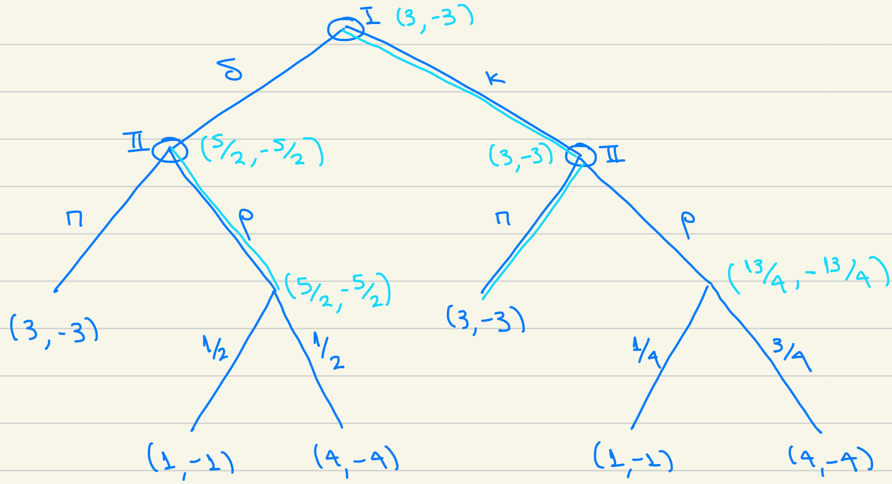
Αν $\sqrt{v} \le R \le 2\sqrt{v}$, $(C_1^*, C_2^*) = (R-\sqrt{v}, \sqrt{v})$

Αν $R > 2\sqrt{v}$, $(C_1^*, C_2^*) = (0, 0)$

(το κόστος είναι μεγάλο συγκριτικά με την ωφέλεια και κανείς δε θέλει να επενδύσει).

Πρόβλημα 3

(α)



Λύση:

((κ), (ρ, π)) με πληρωμές (3, -3)

(β) $S_I = \{(\delta), (\kappa)\}$

$S_{II} = \{(\pi,\pi), (\pi,\rho), (\rho,\pi), (\rho,\rho)\}$

I \ II	(π, π)	(π, ρ)	(ρ, π)	(ρ, ρ)
(δ)	$(3^*, -3)$	$(3, -3)$	$(5/2, -5/2^*)$	$(5/2, -5/2^*)$
(κ)	$(3^*, -3^*)$	$(13/4^*, -13/4)$	$(3^*, -3^*)$	$(13/4^*, -13/4)$

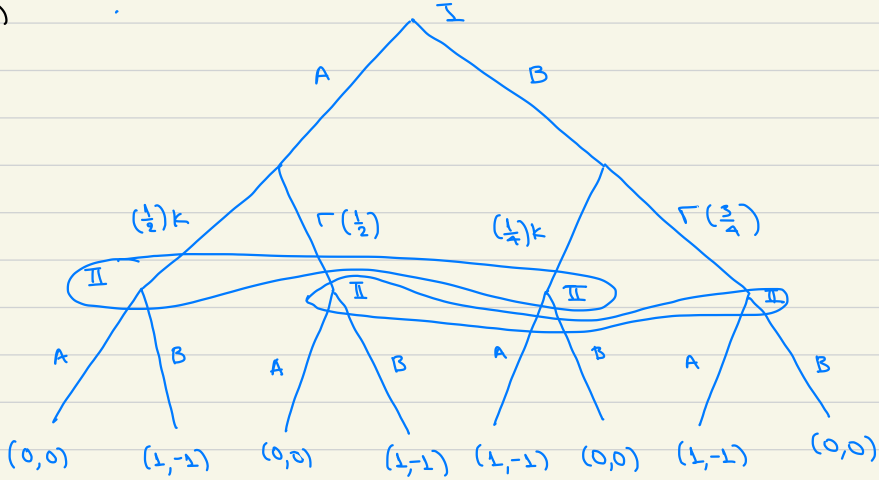
Υπάρχουν 2 ΣΣΙ:

((κ), (π, π)) με πληρωμές (3, -3)

((κ), (ρ, π)) με πληρωμές (3, -3).

Πρόβλημα 4

(α)



(β) $S_I = \{(A),(B)\}$

$S_{II} = \{(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)\}$

I \ II	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
(A)	(0,0)	(1/2, −1/2)	(1/2, −1/2)	(1,−1)
(B)	(1,−1)	(1/4, −1/4)	(3/4, −3/4)	(0,0)

(γ)

I \ II	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
(A)	(0,0)	(1/2, −1/2)	(1/2, −1/2)	(1,−1)
(B)	(1,−1)	(1/4, −1/4)	(3/4, −3/4)	(0,0)

Για τον I: –

Για τον II: Η (B,A) κυριαρχείται ασθενώς από την (A,B)

Για τον I: –

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ

(δ)

I \ II	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
(A)	$(0, 0^*)$	$(\frac{1}{2}^*, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1^*, -1)$
(B)	$(1^*, -1)$	$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$(\frac{3}{4}^*, -\frac{3}{4})$	$(0, 0^*)$

Δεν υπάρχουν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Πρόβλημα 5

Είναι δυναμικό παίγνιο 2 σταδίων.
Στο 1º στάδιο η εταιρεία 1 αποφασίζει την ποσότητα q_1.
Στο 2º στάδιο οι εταιρείες 2 και 3 αποφασίζουν ταυτόχρονα τις ποσότητες q_2 και q_3, γνωρίζοντας την ποσότητα q_1.
Οι πληρωμές των παικτών είναι

$$u_1(q_1,q_2,q_3) = q_1(a-Q) - cq_1 = q_1(a-c-q_1-q_2-q_3)$$
$$u_2(q_1,q_2,q_3) = q_2(a-Q) - cq_2 = q_2(a-c-q_1-q_2-q_3)$$
$$u_3(q_1,q_2,q_3) = q_3(a-Q) - cq_3 = q_3(a-c-q_1-q_2-q_3)$$

Θα μελετήσουμε το υποπαίγνιο του σταδίου 2 πρώτα.

$$(q_2^*, q_3^*) \ \text{ΣΣΙ} \iff \begin{cases} q_2^* \in BR_2(q_3^*) \\ q_3^* \in BR_3(q_2^*) \end{cases}$$

Θα βρούμε τη $BR_2(q_3)$.
Λύνουμε το $\max_{q_2 \geq 0} u_2(q_1,q_2,q_3)$

$$\max_{q_2 \geq 0} q_2(a-c-q_1-q_2-q_3)$$

$$q_2^* = \begin{cases} \dfrac{a-c-q_1-q_3}{2}, & a-c-q_1-q_3 \geq 0 \\ 0, & a-c-q_1-q_3 < 0 \end{cases}$$

Άρα, $BR_2(q_3) = \begin{cases} \dfrac{a-c-q_1-q_3}{2}, & a-c-q_1-q_3 \geq 0 \\ 0, & a-c-q_1-q_3 < 0 \end{cases}$

Ομοίως, $BR_3(q_2) = \begin{cases} \dfrac{a-c-q_1-q_2}{2}, & a-c-q_1-q_2 \geq 0 \\ 0, & a-c-q_1-q_2 < 0 \end{cases}$

Άρα, (q_2^*, q_3^*) ΣΣΙ $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_2^* \in BR_2(q_3^*) \\ q_3^* \in BR_3(q_2^*) \end{array} \right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_2^* = \dfrac{a-c-q_1-q_3^*}{2} \\ q_3^* = \dfrac{a-c-q_1-q_2^*}{2} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_2^* = \dfrac{a-c-q_1}{3} \\ q_3^* = \dfrac{a-c-q_1}{3} \end{array} \right\}$$

Άρα, για δεδομένο q_1 το ΣΣΙ του υποπαιγνίου του 2ου σταδίου είναι
$$(q_2^*, q_3^*) = \left(\frac{a-c-q_1}{3}, \frac{a-c-q_1}{3}\right).$$

Τώρα μελετάμε το 1ο στάδιο.
Ο παίκτης 1 γνωρίζει ότι αν αυτός παίξει q_1, οι άλλοι παίκτες στο 2ο στάδιο θα παίξουν
$$(q_2^*, q_3^*) = \left(\frac{a-c-q_1}{3}, \frac{a-c-q_1}{3}\right).$$
Οπότε, ο 1 λύνει το
$$\max_{q_1} u_1\left(q_1, \frac{a-c-q_1}{3}, \frac{a-c-q_1}{3}\right)$$

Όμως $u_1\left(q_1, \dfrac{a-c-q_1}{3}, \dfrac{a-c-q_1}{3}\right) =$
$$q_1\left(a-c-\frac{a-c-q_1}{3}-\frac{a-c-q_1}{3}-q_1\right) =$$
$$q_1 \frac{a-c-q_1}{3}$$

Άρα, $q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$

Τελικά, το ΣΣΙ του παιγνίου είναι (q_1^*, q_2^*, q_3^*) με
$$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$
$$q_2^* = \frac{a-c-q_1^*}{3} = \frac{a-c-\frac{a-c}{2}}{3} = \frac{a-c}{6}$$
$$q_3^* = \frac{a-c-q_1^*}{3} = \frac{a-c-\frac{a-c}{2}}{3} = \frac{a-c}{6}$$