Πρόβλημα 1

(α) 2 παίκτες: Ι, ΙΙ

$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

1 \ 2	1	2	3	4
1	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
2	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
3	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
4	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

(β)

1 \ 2	1	2	3	4
1	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \cancel{\sqrt{3}-2})$	$(1, \cancel{-1})$	$(\sqrt{5}-1, \cancel{\sqrt{5}-4})$
2	$\cancel{(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)}$	$\cancel{(0, 0)}$	$\cancel{(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)}$	$\cancel{(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)}$
3	$\cancel{(-1, 1)}$	$\cancel{(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)}$	$\cancel{(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)}$	$\cancel{(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)}$
4	$\cancel{(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)}$	$\cancel{(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)}$	$\cancel{(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)}$	$\cancel{(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)}$

Για τον παίκτη 1:
οι 2, 3 και 4 κυριαρχούνται από την 1

Για τον παίκτη 2:
οι 2, 3 και 4 κυριαρχούνται από την 1

Άρα, η λύση είναι $(1, 1)$ με πληρωμές $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$.

(γ)

1 \ 2	1	2	3	4
1	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
2	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
3	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
4	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

ΣΣΣ : Το $(1,1)$ με [illegible] $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$.

Πρόβλημα 2

(α) $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1 \ 2	1	2	3	4	5
1	$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$	$(5,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$
2	$(0,5)$	$(4,4)$	$(8,0)$	$(8,0)$	$(8,0)$
3	$(0,5)$	$(0,8)$	$(\frac{9}{2},\frac{9}{2})$	$(9,0)$	$(9,0)$
4	$(0,5)$	$(0,8)$	$(0,9)$	$(4,4)$	$(8,0)$
5	$(0,5)$	$(0,8)$	$(0,9)$	$(0,8)$	$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

(β)

1 \ 2	1	2	3	4	5
1	$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$	~~$(5,0)$~~	~~$(5,0)$~~	~~$(5,0)$~~	~~$(5,0)$~~
2	~~$(0,5)$~~	~~$(4,4)$~~	~~$(8,0)$~~	~~$(8,0)$~~	~~$(8,0)$~~
3	~~$(0,5)$~~	~~$(0,8)$~~	~~$(\frac{9}{2},\frac{9}{2})$~~	~~$(9,0)$~~	~~$(9,0)$~~
4	~~$(0,5)$~~	~~$(0,8)$~~	~~$(0,9)$~~	~~$(4,4)$~~	~~$(8,0)$~~
5	~~$(0,5)$~~	~~$(0,8)$~~	~~$(0,9)$~~	~~$(0,8)$~~	~~$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$~~

Για τον 1:

Η 5 κυριαρχείται από την 1

Για τον 2:

Η 5 κυριαρχείται από την 1

Η 4 » » » 1

Για τον 1:

Η 4 κυριαρχείται από την 1

Η 3 » » » »

Για τον 2:

Η 3 υπερέχεται από την 1

Η 2 » » » »

Για τον 1:

Η 2 υπερέχεται από την 1.

Λύση (1,1) με πληρωμές $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

β)

1 \ 2	1	2	3	4	5
1	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	(5,0)	(5,0)	(5,0)	(5,0)
2	(0, 5)	(4,4)	(8,0)	(8,0)	(8,0)
3	(0,5)	(0,8)	$\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$	(9,0)	(9,0)
4	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(4,4)	(8,0)
5	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(0,8)	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ΣΣΙ: (1,1) με πληρωμές $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Πρόβλημα 3:

Cournot Nash Equilibrium

Παιχνίδι 2 παικτών: 1,2

$S_1 = \{Q_1 : Q_1 \in [0,\infty)\}$, $S_2 = \{Q_2 : Q_2 \in [0,\infty)\}$

$$u_1(Q_1,Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) - cQ_1$$

$$u_2(Q_1,Q_2) = Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_2$$

με $b,d>0$, $a>c$

Βέλτιστη απάντηση του 1 στην Q_2 $(BR_1(Q_2))$:

Θέλουμε το $\underset{Q_1}{\arg\max}\ u_1(Q_1,Q_2)$

$$\frac{\partial u_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = a - c - 2bQ_1 - dQ_2$$

$$\frac{\partial u_1(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} \geq 0 \iff -2bQ_1 \geq dQ_2 - (a-c)$$

$$\iff Q_1 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2$$

Άρα

Q_1		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $u_1(Q_1,Q_2)$	↗		↘

$$BR_1(Q_2) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2 & , \text{αν } \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2 \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad BR_1(Q_2) = \begin{cases} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2 & , \text{αν } Q_2 \leq \frac{a-c}{d} \\ 0 & , \text{αν } Q_2 > \frac{a-c}{d} \end{cases}$$

<u>Βέλτιστη απάντηση του 2 στην Q_1 $(BR_2(Q_1))$:</u>

Θέλουμε το $\underset{Q_2}{\arg\max}\; u_2(Q_1, Q_2)$

$$\frac{\partial u_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} = a - c - 2bQ_2 - dQ_1$$

$$\frac{\partial u_2(Q_1,Q_2)}{\partial Q_2} \geq 0 \Leftrightarrow -2bQ_2 \geq dQ_1 - (a-c)$$

$$\Leftrightarrow Q_2 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_1$$

Άρα

Q_2		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_1$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $\pi_{II}(Q_1,Q_2)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$BR_2(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 & \text{, αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 \geq 0 \\ 0 & \text{, αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad BR_2(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 & \text{, αν } Q_1 \leq \dfrac{a-c}{d} \\ 0 & \text{, αν } Q_1 > \dfrac{a-c}{d} \end{cases}$$

Εύρεση ΣΣΙ

$$(Q_1, Q_2) \text{ ΣΣΙ} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} BR_1(Q_2) &= Q_1 \\ BR_2(Q_1) &= Q_2 \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 &= Q_1 \\ \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_1 &= Q_2 \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 &= Q_1 \\ \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} \left(\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 \right) &= Q_2 \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} Q_2 &= Q_1 \\ \frac{a-c}{2b} \, \frac{2b-d}{2b} &= Q_2 \left(1 - \left(\frac{d}{2b} \right)^2 \right) \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 &= \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b} \, \frac{a-c}{2b+d} = \frac{a-c}{2b(2b+d)} \left(2b + \cancel{d} - \cancel{d} \right) = \frac{a-c}{2b+d} \\ Q_2 &= \frac{a-c}{2b} \Big/ \frac{2b+d}{2b} = \frac{a-c}{2b+d} \end{aligned} \right.$$

Άρα $(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{a-c}{2b+d}, \frac{a-c}{2b+d}\right)$

Το κέρδος που έχει τότε κάθε εταιρεία είναι:

$$u_1(Q_1^*, Q_2^*) = Q_1^*(a - bQ_1^* - dQ_2^*) - cQ_1^*$$

$$= \frac{a-c}{2b+d}\left(a - b\frac{a-c}{2b+d} - d\frac{a-c}{2b+d}\right) - c\frac{a-c}{2b+d}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2b+d} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+d-b-d)}{(2b+d)^2} = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Ομοίως,

$$u_2(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Cartel Optimal Solution

Το συνολικό κέρδος αν επιλέξουν (Q_1, Q_2) είναι:

$$S(Q_1, Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) + Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_1 - cQ_2$$

$$= (a-c)(Q_1 + Q_2) - bQ_1^2 - bQ_2^2 - 2dQ_1Q_2$$

$$\nabla S(Q_1, Q_2) = [a - c - 2bQ_1 - 2dQ_2,\ a - c - 2bQ_2 - 2dQ_1]$$

$$HS(Q_1, Q_2) = \begin{bmatrix} -2b & -2d \\ -2d & -2b \end{bmatrix}$$

$$-HS(Q_1,Q_2) = \begin{bmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{bmatrix}$$

$$|2b| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{vmatrix} = (2b)^2 - (2d)^2 > 0$$

$$\nabla S(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = (0,0) \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - c - 2b\bar{Q}_1 - 2d\bar{Q}_2 = 0 \\ a - c - 2b\bar{Q}_2 - 2d\bar{Q}_1 = 0 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ a - c - 2b\bar{Q}_2 - 2d\left(\dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2\right) = 0 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ \dfrac{(a-c)(2b-2d)}{2\cancel{b}} = \dfrac{2b^2 - 2d^2}{\cancel{b}}\bar{Q}_2 \end{array} \right\} \iff$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{b}\,\frac{a-c}{2(b+d)} = \frac{(a-c)(b+\cancel{d}-\cancel{d})}{2b(b+d)} = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

Άρα $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \left(\frac{a-c}{2(b+d)}, \frac{a-c}{2(b+d)}\right)$

Το κέρδος τότε είναι:

$$u_1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \bar{Q}_1(a - b\bar{Q}_1 - d\bar{Q}_2) - c\bar{Q}_1$$

$$= \frac{a-c}{2(b+d)}\left(a - b\frac{a-c}{2(b+d)} - d\frac{a-c}{2(b+d)}\right) - c\frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2(b+d)} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{4(b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+2d-b-d)}{4(b+d)^2} = \frac{(a-c)^2\cancel{(b+d)}}{4(b+d)^{\cancel{2}}} = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ομοίως,

$$u_2(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ισχύει ότι $u_1(Q_1^*, Q_2^*) < u_2(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \iff$

$$\frac{b\cancel{(a-c)^2}}{(2b+d)^2} < \frac{\cancel{(a-c)^2}}{4(b+d)} \iff$$

$$4b(b+d) < (2b+d)^2 \iff$$

$$\cancel{4b^2} + \cancel{4bd} < \cancel{4b^2} + \cancel{4bd} + d^2$$

✓

ενώ $Q_1^* > \bar{Q}_1 \iff$

$$\frac{a-c}{2b+d} > \frac{a-c}{2(b+d)} \quad \checkmark$$

Δηλαδή, πετυχαίνω μεγαλύτερα κέρδη φτιάχνοντας μικρότερες ποσότητες.

Πρόβλημα 4:

Nash Equilibrium

Παιχνίδι 2 παικτών: 1, 2

$S_1 = \{ P_1 : P_1 \in [0,\infty) \}$, $S_2 = \{ P_2 : P_2 \in [0,\infty) \}$

$$u_1(P_1, P_2) = Q_1(P_1,P_2) \cdot P_1 - c \cdot Q_1(P_1,P_2) = (a - P_1 + bP_2)(P_1 - c)$$

$$u_2(P_1,P_2) = Q_2(P_1,P_2) P_2 - c Q_2(P_1,P_2) = (a - P_2 + bP_1)(P_2 - c)$$

Βέλτιστη απάντηση του 1 στην P_2 $(BR_1(P_2))$:

Θέλουμε το $\underset{P_1}{\operatorname{argmax}}\ u_1(P_1,P_2)$

$$\frac{\partial u_1(P_1,P_2)}{\partial P_1} = -(P_1 - c) + (a - P_1 + bP_2)\cdot 1 = -2P_1 + bP_2 + a + c$$

$$\frac{\partial^2 u_1(P_1,P_2)}{\partial P_1^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial u_1(P_1,P_2)}{\partial P_1} = 0 \iff P_1^* = \frac{a + c + bP_2}{2} \geq 0$$

Άρα $BR_1(P_2) = \dfrac{a + c + bP_2}{2}$

Βέλτιστη απάντηση του 2 στην p_1 $\{BR_2(p_1)\}$:

Θέλουμε το $\arg\max_{p_2} u_2(p_1, p_2)$

$$\frac{\partial u_2(p_1,p_2)}{\partial p_2} = -(p_2 - c) + (a - p_2 + bp_1)\cdot 1 = -2p_2 + bp_1 + a + c$$

$$\frac{\partial^2 u_2(p_1,p_2)}{\partial p_2^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial u_2(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0 \iff p_2^* = \frac{a + c + bp_1}{2} \geq 0$$

Άρα $BR_2(p_1) = \dfrac{a+c+bp_1}{2}$

ΣΣΙ:

$$(p_1^*, p_2^*) \text{ ΣΣΙ} \iff \begin{cases} p_1^* \in BR_1(p_2^*) \\ p_2^* \in BR_2(p_1^*) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{a+c+bp_2^*}{2} \\ p_2^* = \dfrac{a+c+bp_1^*}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} p_1^* = \dfrac{a+c+bp_2^*}{2} \\ p_2^* = \dfrac{a+c+b\frac{a+c+bp_2^*}{2}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p_1^* = \dfrac{a+c+bp_2^*}{2} \\ 2p_2^* = \dfrac{2(a+c)+b(a+c)+b^2p_2^*}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{a+c+b\dfrac{a+c}{2-b}}{2} \\ p_2^* = \dfrac{(2+b)(a+c)}{4-b^2} = \dfrac{a+c}{2-b} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b}$$

Άρα $$(p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{a+c}{2-b}, \frac{a+c}{2-b}\right)$$

$$u_1(p_1^*, p_2^*) = u_2(p_1^*, p_2^*) =$$

$$= \left(a - \frac{a+c}{2-b} + b\frac{a+c}{2-b}\right)\left(\frac{a+c}{2-b} - c\right)$$

$$\left(a - (1-b)\frac{a+c}{2-b}\right)\left(\frac{a+c}{2-b} - c\right)$$

$$\left(a - \frac{\cancel{(2-b)}(a+c)}{\cancel{2-b}} + \frac{a+c}{2-b}\right)\left(\frac{a+c}{2-b} - c\right) =$$

$$\left(\frac{a+c}{2-b} - c\right)^2 = \left(\frac{a+bc-c}{2-b}\right)^2$$

Υπό συνεργασία

Αν συνεργαστούν και επιλέξουν τιμές (p_1, p_2) θα έχουν κέρδος

$$K(p_1,p_2) = u_1(p_1,p_2) + u_2(p_1,p_2) =$$
$$(a - p_1 + bp_2)(p_1 - c) + (a - p_2 + bp_1)(p_2 - c)$$
$$= ap_1 - ac - p_1^2 + cp_1 + bp_1p_2 - cbp_2$$
$$+ ap_2 - ac - p_2^2 + cp_2 + bp_1p_2 - cbp_1$$

$$= -p_1^2 - p_2^2 + 2bp_1p_2 + (a-cb)p_1 + (a-cb)p_2 - 2ac$$

Θέλουμε $\max K(p_1,p_2)$

υπό

$p_1, p_2 \geq 0$

$$\nabla K(p_1,p_2) = (-2p_1 + 2bp_2 + a - cb, -2p_2 + 2bp_1 + a - cb)$$

$$HK(p_1,p_2) = \begin{bmatrix} -2 & +2b \\ 2b & -2 \end{bmatrix}$$

$$-HK(p_1,p_2) = \begin{bmatrix} 2 & -2b \\ -2b & 2 \end{bmatrix} \qquad |2| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -2b & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4b^2 > 0$$

Άρα, K κοίλη

$$\nabla K(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (0,0) \iff$$
$$\begin{cases} -2\bar{p}_1 + 2b\bar{p}_2 + a - cb = 0 & (1) \\ -2\bar{p}_2 + 2b\bar{p}_1 + a - cb = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 2(b+1)\bar{p}_2 - 2(b+1)\bar{p}_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{p}_1 = \bar{p}_2 \quad (3)$$

$$(1) \xRightarrow{(3)} -2\bar{p}_1 + 2b\bar{p}_1 + a - cb = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{p}_1 = \frac{a-cb}{2(1-b)}$$

$$(3) \Rightarrow \bar{p}_2 = \frac{a-cb}{2(1-b)}$$

Η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(\frac{a-cb}{2(1-b)}, \frac{a-cb}{2(1-b)}\right)$$

με $K(\bar{p}_1, \bar{p}_2) =$

$$-\bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2 + 2b\bar{p}_1\bar{p}_2 + (a-cb)\bar{p}_1 + (a-cb)\bar{p}_2 - 2ac =$$

$$-\left(\frac{a-cb}{2(1-b)}\right)^2 - \left(\frac{a-cb}{2(1-b)}\right)^2 + 2b\left(\frac{a-cb}{2(1-b)}\right)^2 + 2(a-cb)\frac{a-cb}{2(1-b)} - 2ac$$

$$= 2(b-1)\left(\frac{a-cb}{2(1-b)}\right)^2 + \frac{(a-cb)^2}{1-b} - 2ac =$$

$$-\frac{(a-cb)^2}{2(1-b)} + \frac{(a-cb)^2}{1-b} - 2ac =$$

$$\frac{(a-cb)^2}{2(1-b)} - \frac{4ac(1-b)}{2(1-b)} =$$

$$\frac{a^2 + c^2b^2 - 4abc - 4ac + 4abc}{2(1-b)} =$$

$$\frac{a^2 + c^2b^2 - 4ac}{2(1-b)}$$