Μάθημα 11 07/04/2023

1) Από περιγραφή παιχνιδιού βρίσκω
- ↳ εκτεταμένη μορφή
- ↳ σύνολα πληροφόρησης
- ↳ σύνολα στρατηγικών
- ↳ κανονική μορφή

πολλά παραδείγματα στο 1º και στο 2º μάθημα

2) Επίλυση/απλοποίηση με ΑΚΣ

Άσκηση: να λυθεί με ΕΑΚΣ το παρακάτω παίγνιο 2 παικτών σε κανονική μορφή

I\II	t1	t2	t3	t4
S1	~~(0,4)~~	(-2,2)	~~(-1,2)~~	(3,-1)
S2	(1,1)	(-3,-2)	(2,2)	(-5,-2)
S3	~~(-1,1)~~	~~(-5,2)~~	~~(-1,3)~~	~~(1,4)~~

Λύση: Για τον I: Η S3 κυριαρχείται από την S1
Για τον II: Η t2 και t4 κυριαρχούνται από t1
Για τον I: Η S1 κυριαρχείται από την S2
Για τον II: Η t1 " " " t3

Λύση με ΕΑΚΣ: ((S2),(t3)) με πληρωμές (2,2)

3) ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές (μέσω BR)
- □ όταν έχω παιχνίδι 2 παικτών σε κανονική μορφή (με αστεράκια)
- □ όταν τα σύνολα στρατηγικών είναι συνεχή (π.χ. cournot, tragedy of commons, ασκήσεις 4,5 φυλλάδιο 1)

Άσκηση: Θεωρούμε το παρακάτω παιχνίδι σε κανονική μορφή:

I\II	t1	t2	t3
S1	(2,0)	~~(1,1)~~	(4,2)
S2	(3,4)	~~(1,2)~~	(2,3)
~~S3~~	~~(1,3)~~	~~(0,2)~~	~~(3,0)~~

(i) Να γίνει απλοποίηση με απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών

(ii) Να βρεθούν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές για το απλοποιημένο παιχνίδι.

Λύση: (i) Για τον I: Η S3 κυριαρχείται από την S1

Για τον II: Η t2 κυριαρχείται από t3

(ii) Το απλοποιημένο παιχνίδι είναι το:

I\II	t1	t3
S1	(2,0)	(4*,2*)
S2	(3*,4*)	(2,3)

2 ΣΣΙ σε καθαρές: ((S2),(t1)) με πληρ (3,4)

((S1),(t2)) με πληρ (4,2)

4) ΣΣΙ σε μεικτές (μέσω BR)

Άσκηση: στο προηγούμενο παίγνιο (στην απλοποιημένη μορφή) να βρεθεί ΣΣΙ σε μεικτές.

		q	$1-q$
	I\II	t1	t3
p	s1	(2,0)	(4,2)
$1-p$	s2	(3,4)	(2,3)

έστω $p = (p, 1-p)$ η μεικτή στρατηγική του I

έστω $q = (q, 1-q)$ // // II

Βρίσκουμε την $BR_I(q)$:

$h_I(s_1, q) = 2q + 4 - 4q = 4 - 2q$

$h_I(s_2, q) = q \cdot 3 + (1-q)2 = q + 2$

• αν $h_I(s_1, q) > h_I(s_2, q)$

$\iff -2q + 4 > q + 2 \iff q < \frac{2}{3}$

Τότε $BR_I(q) = \{s_1\} = \{(1,0)\}$

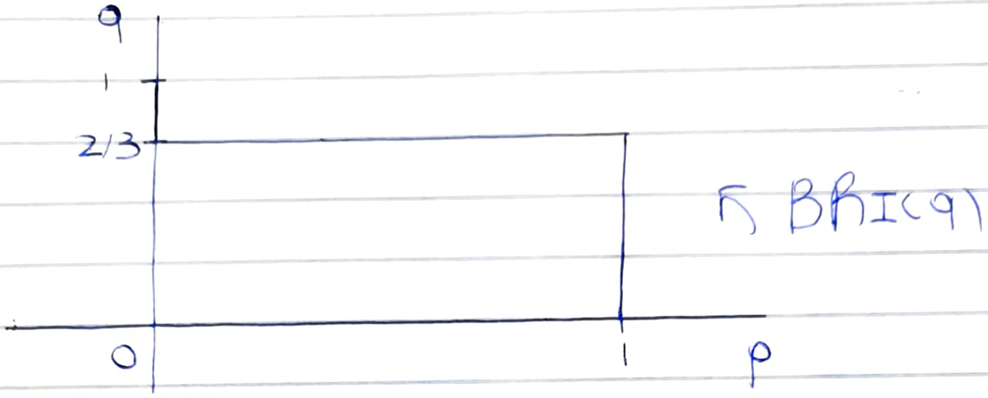
• αν $h_I(s_1, q) < h_I(s_2, q) \iff q > \frac{2}{3}$

Τότε $BR_I(q) = \{s_2\} = \{(0,1)\}$

• αν $h_I(s_1, q) = h_I(s_2, q) \iff q = \frac{2}{3}$

Τότε $BR_I(q) = \{(p, 1-p), p \in [0,1]\}$

$$BR_I(q) = \begin{cases} \{(1,0)\} & \text{αν} \quad q \in [0, \frac{2}{3}) \\ \{p, 1-p\} & \text{αν} \quad q = \frac{2}{3} \\ \{(0,1)\} & \text{αν} \quad q \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



	I \ II	q t_1	$1-q$ t_3
p	s_1	(2,0)	(4,2)
$1-p$	s_2	(3,4)	(2,3)

$h_{II}(p, t_1) = p \cdot 0 + (1-p)4 = 4 - 4p$

$h_{II}(p, t_3) = p \cdot 2 + (1-p) \cdot 3 = 3 - p$

- αν $h_{II}(p, t_1) > h_{II}(p, t_3) \iff 4 - 4p > 3 - p$
$\iff 1 > 3p \iff p < \frac{1}{3}$

$BR_{II}(p) = \{t_1\} = \{(1,0)\}$

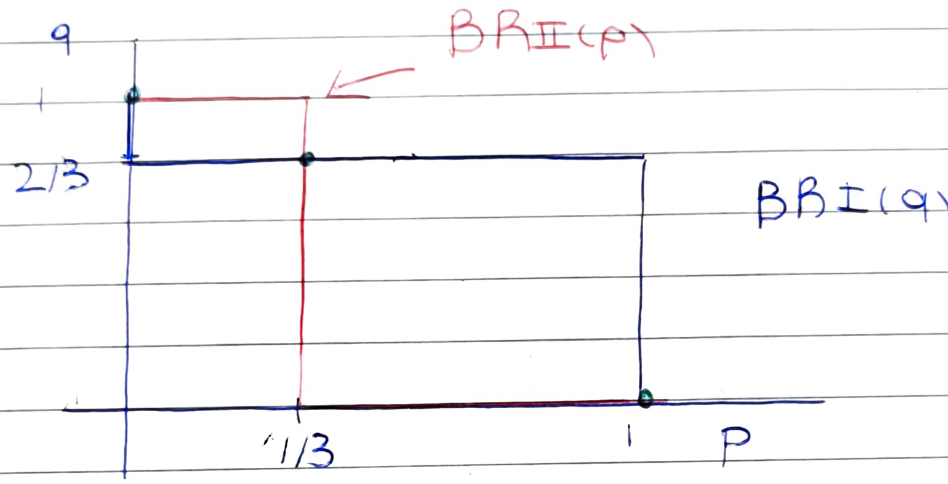
- αν $h_{II}(p, t_1) < h_{II}(p, t_3) \iff p > \frac{1}{3}$

$BR_{II}(p) = \{t_3\} = \{(0,1)\}$

· αν $h_{II}(p, t_1) = h_{II}(p, t_3) \iff p = \frac{1}{3}$

$BR_{II}(p) = \{(q, 1-q) \quad q \in [0,1]\}$

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(1,0)\} & \text{αν } p \in [0, \frac{1}{3}) \\ \{(q,1-q),\ q \in [0,1]\} & \text{αν } p = \frac{1}{3} \\ \{(0,1)\} & \text{αν } p \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$



3 ΣΣΙ σε μεικτές $\quad s_2 \quad t_1$

$((0,1), (1,0))$

$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$

$((1,0), (0,1))$

$s_1 \qquad t_3$

5) Συμμετρικό παιχνίδι:
↳ Να το αναγνωρίζουμε
↳ Εύρεση συμμετρικών ΣΣΙ

6) Παίγνια μηδενικού αθροίσματος
↳ άνω, κάτω τιμή
↳ ΣΣΙ σε καθαρές
↳ ΣΣΙ σε μεικτές 2x2, 2xn, mx2

Θεωρούμε το παρακάτω παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος

	I/II	+1	+2	~~+3~~
0	S1	0	-1	~~2~~
p	S2	2	-3	~~4~~
1-p	S3	-2	3	~~2~~

(i) Να απλοποιηθούν οι κυριαρχούμενες στρατηγικές
(ii) Να βρεθούν τα ΣΣΙ σε καθαρές, αν υπάρχουν
(iii) // // // μεικτές //

Λύση: (i) Για τον I: —
Για τον II: Η +3 κυριαρχείται από την +1

(ii) Θα βρούμε κάτω και άνω τιμή στο απλοποιημένο

I/II	q +1	$1-q$ +2	
S1	0	-1	$-1^* = v_1$
S2	2	-3	-3
S3	-2	3	-2
	$2^* = v_2$	3	

$v_1 = -1 < 2 = v_2 \Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές.

(iii) Ξεκινάμε με τον παίκτη II, δηλαδή τον παίκτη που έχει τις 2 στρατηγικές

$$\left(w_2 = \min_{q} \max_{p} h_I(p, q) \right)$$

έστω $q = (q, 1-q)$ στρατηγική του II
$p = (p_1, p_2, p_3)$ με $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ η στρατηγ του I

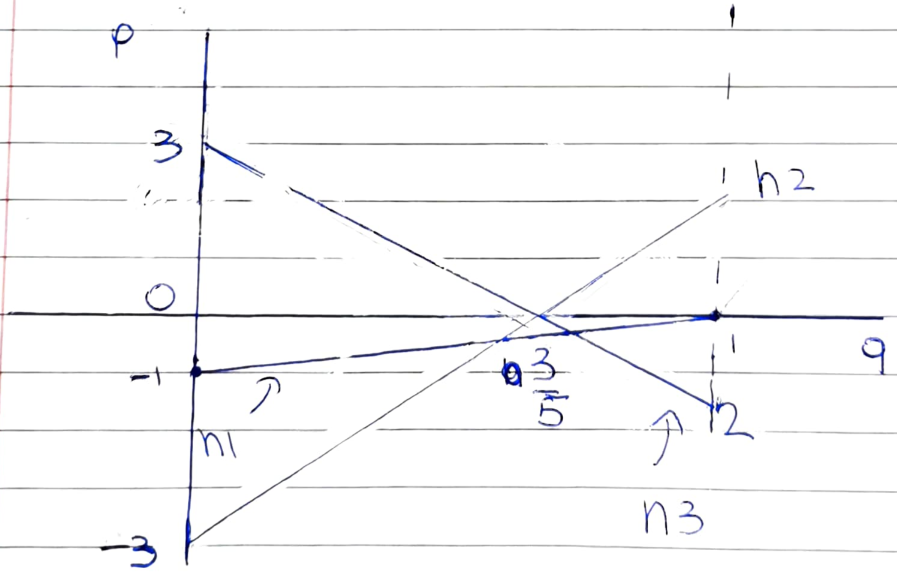
$$w_2 = \min_{q} \max_{p} h_I(p, q)$$

$$= \min_{q} \max \{ h_I(s_1, q), h_I(s_2, q), h_I(s_3, q) \}$$

$$= \min_{q} \max \{ \underbrace{0 + (1-q)\cdot(-1)}_{\text{πληρωμή } s_1}, \underbrace{q \cdot 2 + (1-q)\cdot(-3)}_{\text{πληρωμή I όταν } s_2}, \underbrace{q(-2) + (1-q)}_{\text{πληρ όταν } s_3} \}$$

$$= \min_{q} \max \{ \underbrace{q-1}_{h_1}, 5q-3, 3-5q \}$$

Σχεδιάζω τις ευθείες $h_1 = q-1$, $h_2 = 5q-3$, $h_3 = 3-5q$



· Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο μέγιστο τους

· Βρίσκω το ελάχιστο πάνω σε αυτή τη γραμμή

Το q^* βρίσκεται στην τομή $h2$ και $h3$

$$5q-3=-5q+3 \iff q=\frac{6}{10}=3/5$$

$$w2 = 5\cdot\frac{3}{5}-3=0$$

άρα $w2=0$ και minmax στρατηγ είναι
$\underline{q^*}=(q^*, 1-q^*)=\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Για την κάτω τιμή του παιχνιδιού και τη maxmin στρατηγική έχουμε:

Γνωρίζουμε ότι $(p^*, q^*)\ \Sigma\Sigma 1 \iff \underline{p}^* \in BR_I(\underline{q}^*)$

$$p^* \in BR_I\left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$$

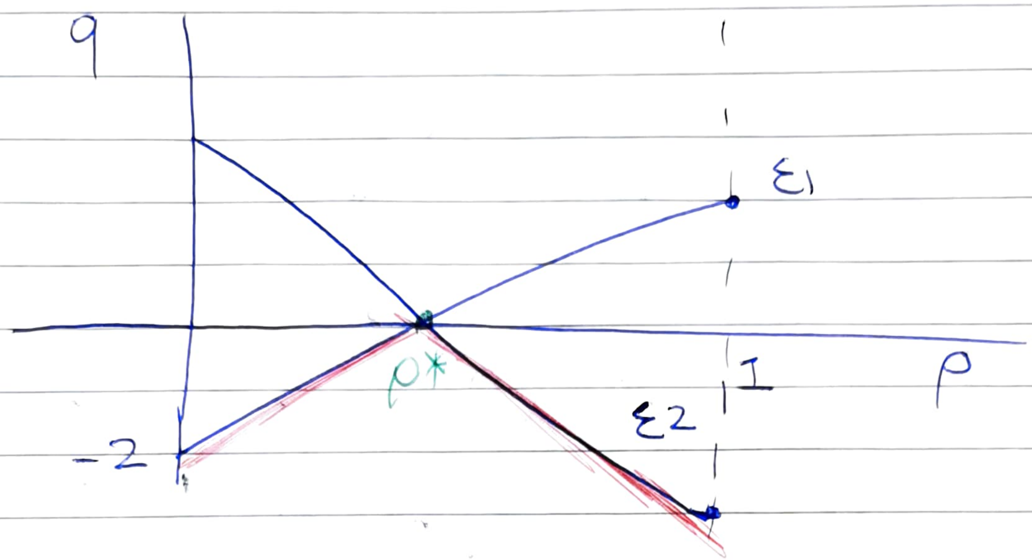
από τις γραφικές παραστάσεις των πληρωμών στο $q^*=\frac{3}{5}$, φαίνεται ότι αν ο II ακολουθήσει την $\underline{q}^*=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$, τον I τον συμφέρει να αναμείξει τις S2 και S3. Άρα περιοριζόμαστε σε στρατηγικές της μορφής $\underline{p}=(0, p, 1-p)$

$$w1 = \max_p \min_q h_I(p,q) = \max_p \min\{h_I(p,t1), h_I(p,t2)\}$$

$$= \max\min\{2p-2(1-p), -3p+3(1-p)\}$$

$$= \max_{p} \min \{ \underset{\varepsilon_1}{4p-2}, \underset{\varepsilon_2}{-6p+3} \}$$

Σχεδιάζω τα τμήματα



· Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο min
· Βρίσκω το max πάνω στη γραμμή
Το p^* είναι στην τομή των ε1 και ε2

$$4p^*-2 = -6p^*+3 \iff$$
$$10p^* = 5$$
$$p^* = \frac{1}{2}$$

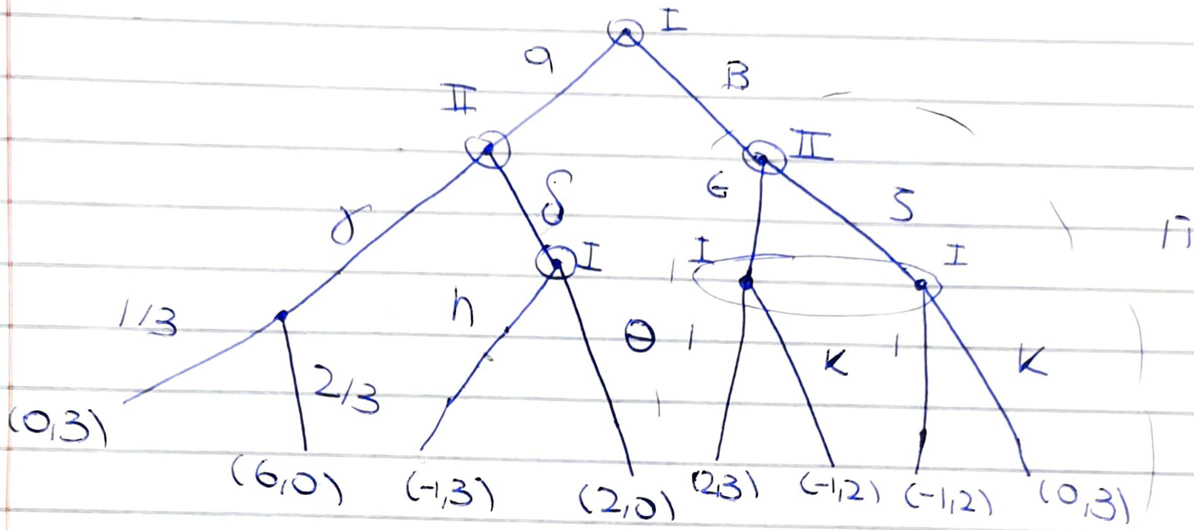
$$w_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0$$

άρα maxmin στρατηγική $p^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$w_1 = 0$

ΣΣΙ (p^*, q^*) $((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}))$ με πληρωμή 0

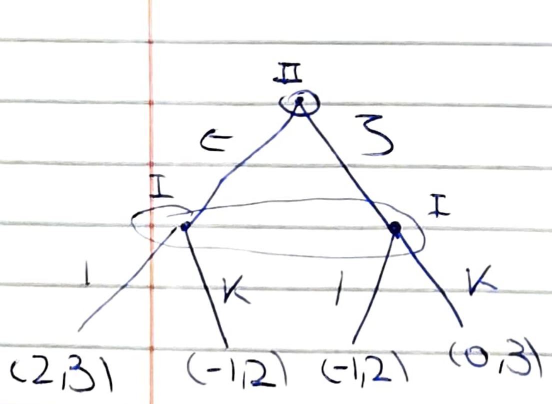
7) Backward induction και SPE

Άσκηση: Να λυθεί το παιχνίδι με backward induction



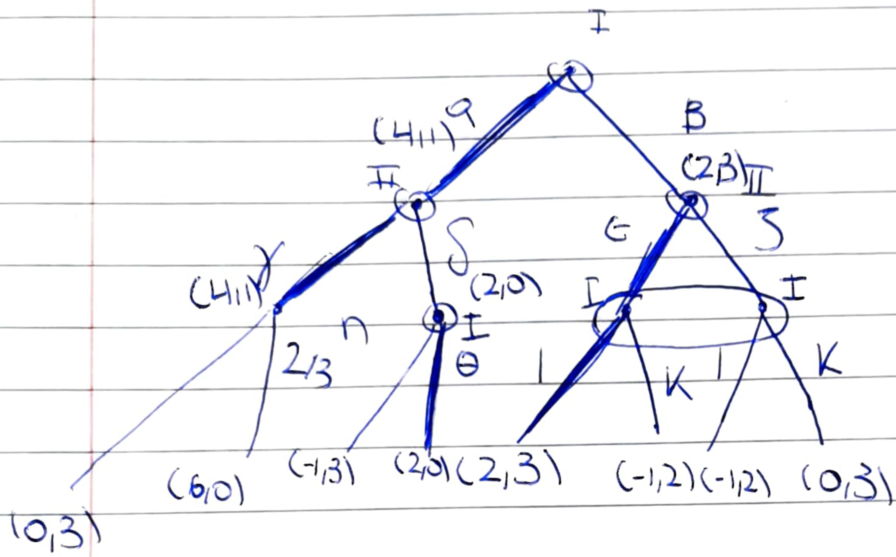
Λύνουμε το υποπαιχνίδι

I \ II	ε	ζ
ι	$(2^*, 3^*)$	(-1,2)
κ	(-1,2)	$(0^*, 3^*)$



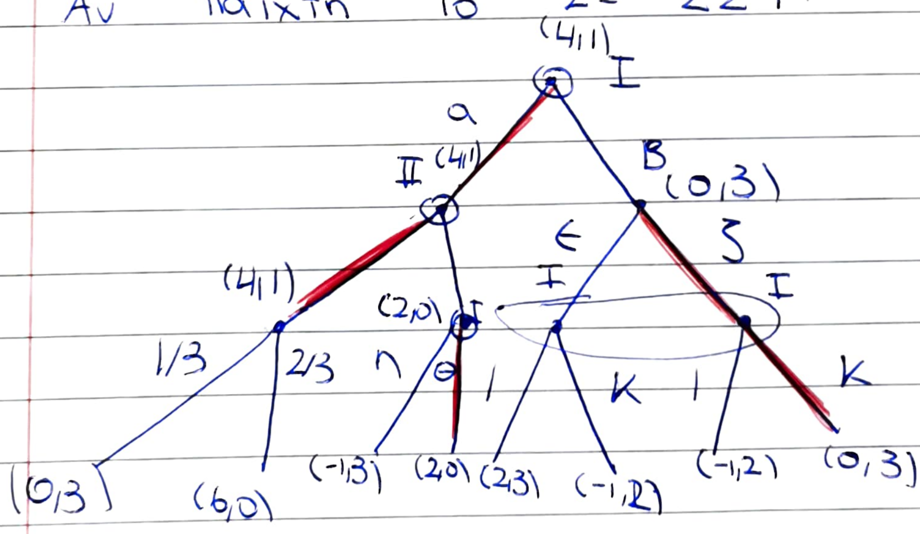
2 ΣΣΙ: (ι,ε) με πληρ (2,3)
(κ,ζ) με πληρ (0,3)

Συνεχίζουμε με backward induction:
αν παιχτεί το 1ο ΣΣΙ:



Λύση: ((α, θ, ι)

Αν παιχτεί το 2ο ΣΣΙ:



Λύση: ((α, θ, κ), (γ, ζ)) με πληρωμή (4,1)