17 - 03 - 23

Παίγνια μηδενικού αθροίσματος Συνέχεια

A = πίνακας πληρωμών παίκτη I
(ο πίνακας του II θα είναι ο − A)

$V_1 = \max_{i} \min_{j} A_{ij}$: κάτω τιμή του παιχνιδιού

i → στρατηγική του I

j → στρ. του II

$V_2 = \min_{j} \max_{i} A_{ij}$: άνω τιμή του παιχνιδιού

A_{ij} → πληρωμές του I

1)

I \ II	t_1	t_2	
s_1	$(2^*, -2^*)$	$(3^*, -3)$	$2^* = V_1$ (τι μπορεί να εξασφαλίσει ο I)
s_2	$(1, -1)$	$(-1, 1^*)$	-1
	$2^* = V_2$	3	

το (s_1, t_1) είναι ΣΣΙ
με πληρωμές $(2, -2) = (V_1 = V_2, V)$

2)

I \ II	t_1	t_2	
s_1	$(5^*, -5)$	$(-2, 2^*)$	$-2^* = V_1 < V_2$
s_2	$(-3, 3^*)$	$(4^*, -4)$	-3
	5	$4^* = V_2$	

Δεν υπάρχει ΣΣΙ

Θεώρημα: Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος ισχύουν τα εξής:

1] $V_1 \le V_2$

2] Υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές ανν $V_1 = V_2$ και αυτό αντιστοιχεί στις maxmin και minmax στρατηγικές.

3] Αν τα προφίλ (s, t) και (s', t') είναι ΣΣΙ τότε και τα (s, t') και (s', t) θα είναι ΣΣΙ

4] Σε πολλαπλά ΣΣΙ η ωφέλεια είναι ίδια

Πόρισμα: Αν $V_1 < V_2$ τότε δεν έχουμε ΣΣΙ σε καθαρές.

παράδειγμα: Θεωρούμε το παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος 2 παικτών με πίνακα:

minmax στρατηγ.

I \ II	t_1	t_2	t_3	
s_1	5	8	4	$4^* = V_1$
s_2	-7	9	0	-7
s_3	9	1	-2	-2
	9	9	$4^* = V_2$	

$V_1 = V_2 \Rightarrow$ υπάρχει ΣΣΙ (s_1, t_2)

maxmin

minmax

Σε μεικτές στρατηγικές

Ιδιο σκεπτικό : conservative approach

Αν καθε παίκτης εχει 2 στρατηγικές :

Τοτε η μεικτή στρατηγική του I είναι
$\underline{p} = (p, 1-p)$, $p \in [0, 1]$

και του παικτη II θα ειναι $\underline{q} = (q, 1-q)$

ορίζουμε κατω τιμη του παιχνιδιου σε μεικτές στρατηγικές την $W_1 = \underset{\substack{p \\ \text{στρ. I}}}{\max} \underset{\substack{q \\ \text{μ στρ. II}}}{\min} h_I(p, q)$

Ανω τιμή του παιχνιδιου σε μεικτές στρατηγικές την $W_2 = \min_q \max_p h_I(p, q)$

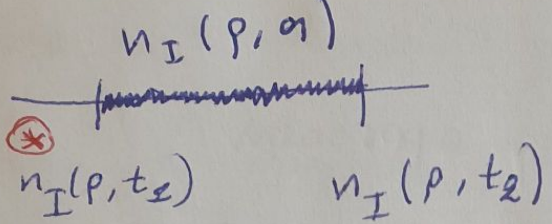
Παραδειγμα: παιχνιδι 2 παικτων μηδ. αθροίσματος

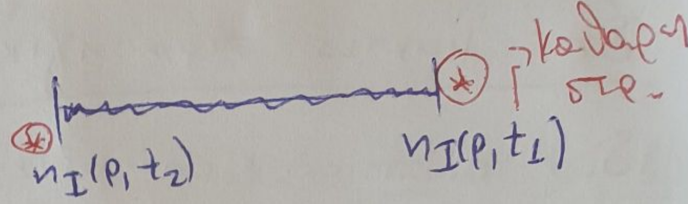
I \ II	t_1	t_2	
s_1	4	2	$2^* = V_1$
s_2	1	3	1
	4	$3^* = V_2$	

$V_1 < V_2 \Rightarrow$
$\nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές

θελω να υπολογίσω την
$W_1 = \max_p \min_q h_I(p, q)$

Γνωρίζουμε οτι $h_I(p, q) = q h_I(p, t_1) + (1-q) h_I(p, t_2)$





Άρα το $\min_q n_I(p,q)$ θα πετυχαίνεται σε καθαρές στρατηγικές του II (την $q=0$ ή την $q=1$)

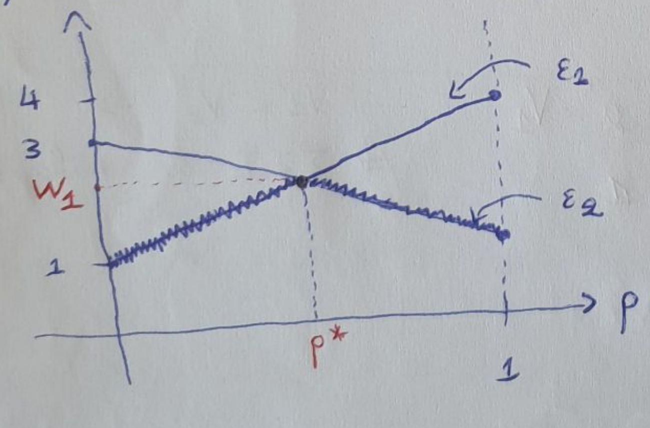
Δηλαδή $\min_q n_I(p,q) = \min\{n_I(p,t_1), n_I(p,t_2)\}$

Άρα $W_1 = \max_p \min_q n_I(p,q) =$

$= \max_p \min\{n_I(p,t_1), n_I(p,t_2)\} =$

$= \max_p \min\{\underbrace{4p+1(1-p)}_{\varepsilon_1}, \underbrace{2p+3(1-p)}_{\varepsilon_2}\}$ $= \max_p \min\{3p+1, 3-p\}$

1) Σχεδιάζω τις ευθείες



2) Σχεδιάζω τη γραμμή που αντιστοιχεί στο minimum

3) Βρίσκω το maximum αυτής της γραμμής και πού πετυχαίνεται

$3p^*+1 = 3-p^* \Rightarrow 4p^*=2 \Rightarrow \boxed{p^*=1/2}$

$$W_1 = 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

Αρα η maxmin στρατηγική είναι η $p^* = (1/2, 1/2)$

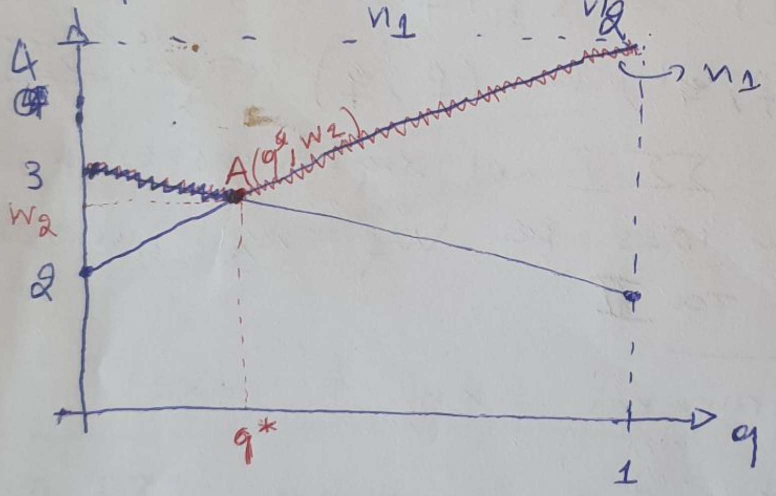
και $W_1 = 5/2$

Τωρα θα υπολογίσω την $W_2 = \min_q \max_p h_I(p,q)$

$$W_2 = \min_q \max\{h_I(s_1,q), h_I(s_2,q)\} =$$

$$= \min_q \max\{4q + 2(1-q), 1q + 3(1-q)\} =$$

$$= \min_q \max\{\underbrace{2q+2}_{h_1}, \underbrace{3-2q}_{h_2}\}$$



Σχεδιάζω τις ευθείες και τη γραμμή που αντιστ. στο maximum κ βρίσκω το min. και που πετυχ.

Το q^* βρίσκεται στην τομή των h_1 και h_2

$$2q^* + 2 = 3 - 2q^* \iff q^* = \frac{1}{4}$$

και $W_2 = 2\cdot\frac{1}{4} + 2 = \frac{5}{2}$

Η minmax στρατηγική είναι η $q^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

και η άνω τιμή είναι $\frac{5}{2}$

Εχουμε $W_1 = W_2 = \frac{5}{2}$ και το ΣΣΙ :

(p^*, q^*) με $p^* = (1/2, 1/2)$ ← maxmin στρ.

και $q^* = (1/4, 3/4)$ ← minmax στρ.

Θεωρημα Minimax

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο μηδενικού αθροισματος 2 παικτων ισχύουν τα εξής:

i) $W_1 = W_2$ (τιμή του παιχνιδιου)

ii) το προφιλ (p, q) που πετυχαίνει την τιμή ειναι ΣΣΙ

iii) Αν (p, q) και (p', q') ειναι ΣΣΙ τοτε και (p, q') και (p', q) ειναι ΣΣΙ

iv) Σε πολλαπλα ΣΣΙ οι αναμενόμενες ωφέλειες ειναι ιδιες. και ισες με $W_1 (= W_2)$ για τον I και $-W_1$ για τον II

παράδειγμα: (πινακας $2 \times n$ ή $n \times 2$)

I \ II	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	6	5	3	5
s_2	1	2	6	4

Ψαχνω ΣΣΙ σε μεικτές

Εστω $p = (p, 1-p)$ η μεικτή του παικτη I

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ με $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

Ξεκινώ να υπολογίζω την w_1 επειδή ο I έχει 2 στρατηγικές

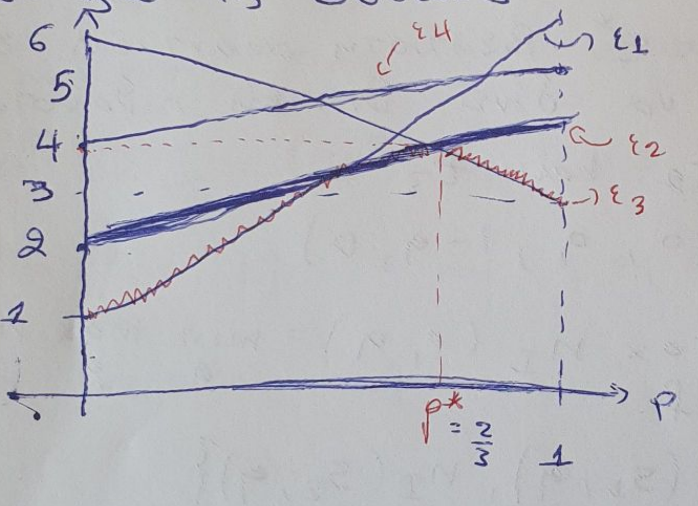
$$w_1 = \max_p \min_q u_I(p, q) = \max_p \min\{u_I(p,t_1) \dots\}$$

$$= \max_p \min\{u_I(p,t_1), u_I(p,t_2), u_I(p,t_3), u_I(p,t_4)\}$$

$$= \max_p \min\{6p + 1(1-p), 5p + 2(1-p), 3p + 6(1-p), 5p + 4(1-p)\}$$

$$= \max_p \min\{\underbrace{5p+1}_{\varepsilon_1}, \underbrace{3p+2}_{\varepsilon_2}, \underbrace{6-3p}_{\varepsilon_3}, \underbrace{p+4}_{\varepsilon_4}\}$$

Σχεδιάζω τις ευθείες



το p^* είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$3p^* + 2 = 6 - 3p^* \Rightarrow p^* = \frac{2}{3}$$

και $w_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4$

Άρα η maximin στρατηγική είναι η $p^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ Για το $w_2 = \min_q \max_p u_I(p,q)$

Για το w_2

$$w_2 = \min_{q} \max_{p} h_I(p, q)$$
$$= \min_{q} \max \{ h_I(s_1, q), h_I(s_2, q) \}$$

Γνωρίζουμε ότι $w_1 = w_2 = 4$

Επίσης αν $(\underline{p}^*, q^*)$ είναι ΣΣΙ τότε

$$q^* \in BR_{II}(p^*) \Leftrightarrow$$

$$q^* \in BR_{II}(2/3, 1/3)$$

κοιτάμε τη γραφική παράσταση

Για να είναι η q^* βέλτιστη απάντηση στην p^* θα πρέπει να δίνει θετική πιθανότητα μόνο στις t_2 και t_3

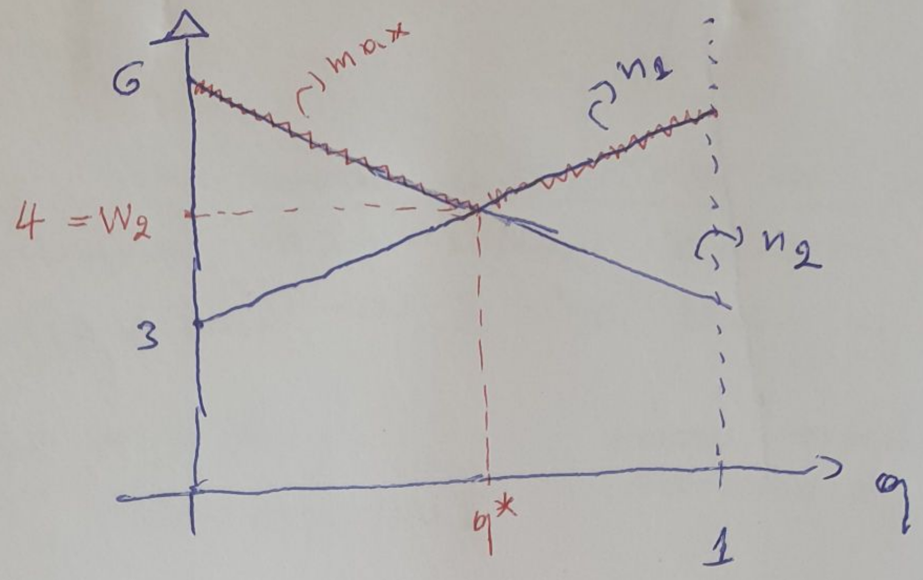
Άρα $q^* = (0, q, 1-q, 0)$

$$w_2 = \min_{q} \max_{p} h_I(p, q) = \min_{q} \max_{p} h_I(p, q)$$

$$= \min_{q} \max \{ h_I(s_1, q), h_I(s_2, q) \}$$

$$= \min_{q} \max \{ 5q + 3(1-q), 2q + 6(1-q) \}$$

$$= \min_{q} \max \{ \underbrace{2q+3}_{h_1}, \underbrace{6-4q}_{h_2} \}$$



Το q^* βρίσκεται στην τομή $\eta_1 \cap \eta_2$

$2q^* + 3 = 6 - 4q^* \iff q^* = \frac{1}{2}$

και $\left(w_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4 \right)$

η minmax στρατηγική είναι η $q^* = (0, 1/2, 1/2, 0)$

Άρα ΣΣΙ: (p^*, q^*) με

$p^* = (2/3, 1/3)$ και $q^* = (0, 1/2, 1/2, 0)$

και $w_1 = w_2 = 4$