10/03/23

Ορισμός: ΣΣΙ (σε μεικτές στρατηγικές)

Εστω παιχνίδι 2 παικτών

Ενα προφίλ στρατηγικών $(\underline{p}, \underline{q})$ ειναι ΣΣΙ

αν $\underline{p} \in BR_{I}(\underline{q}) \iff u_{I}(p, q) \geq u_{I}(p', q)$ με p' στρ. του I

$\underline{q} \in BR_{II}(p) \iff u_{II}(p, q) \geq u_{II}(p, q')$ με q' μεικτή στρ. του II

$\boxed{\text{Μεικτές στρατηγικές — Εφαρμογές}}$

Δυο οδηγοί κοντράρονται για τον ελεγχο του δρομου. $S_I = S_{II} = \{t, c\}$ t = τουγη, c = concede

I \ II	t	c
t	(a, a)	$(d^*, 0^*)$
c	$(0^*, d^*)$	(b, b)

$b < d$

$d > b > 0 > a$

ΣΣΙ σε καθαρες στρ.

2 σημεία ΣΣΙ σε καθαρές $\{(c, t), (t, c)\}$

ΣΣΙ σε μεικτες:

Θα βρουμε την βελτιστη απάντηση του I απεναντι στην στρ. $\underline{q} = (q, 1-q)$ του II

$u_I(t, \underline{q}) = qa + (1-q)\cdot d$

$u_{II}(c, \underline{q}) = q\cdot 0 + (1-q)b = (1-q)b$

1) $u_I(t, \underline{q}) > u_I(c, \underline{q}) \iff qa + (1-q)d > (1-q)b$

$\iff d - b > q(d-b-a) \iff q < \dfrac{d-b}{d-b-a}$

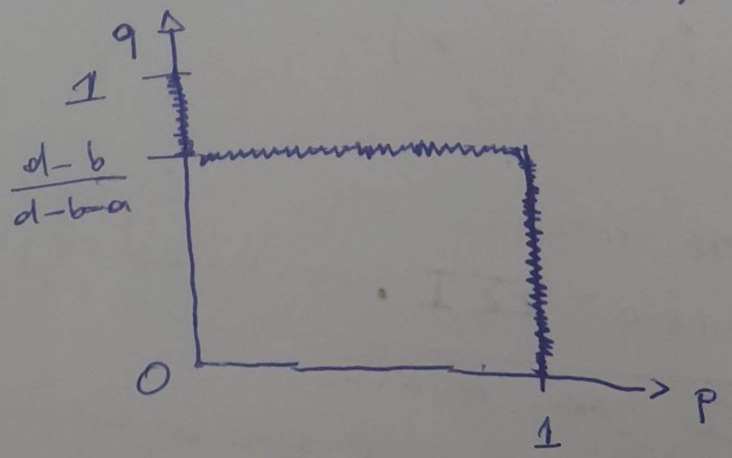
τότε $BR_I(\underline{q}) = \{t\} = \{(1,0)\}$
(σε μεικτή)

2) Αν $u_I(t, \underline{q}) < u_I(c, \underline{q}) \iff q > \dfrac{d-b}{d-b-a}$

τότε $BR_I(\underline{q}) = \{c\} = \{(0,1)\}$

3) $u_I(t, \underline{q}) = u_{II}(c, \underline{q}) \iff q = \dfrac{d-b}{d-b-a}$

τότε $BR_I(\underline{q}) = \{(p, 1-p) : p \in [0,1]\}$



Παρατηρηση : Για να έχουμε βελτιστη απαντηση του I σε μεικτές απέναντι στην q του II θα πρέπει οι αναμενομενες πληρωμές του I κατω απο οποιαδήποτε καθαρες στρ. να είναι ισες μεταξύ τους (με πιθ $\in (0,1)$)

Βελτιστη απαντηση του II

Εστω οτι ο I ακολουθει τη μεικτή στρατηγική

$$(p, 1-p) = \underline{p}, \quad p \in (0,1)$$

$$u_{II}(\underline{p}, t) = a \cdot p + d(1-p)$$

$$u_{II}(\underline{p}, c) = p \cdot 0 + (1-p)b$$

1) Αν $u_{II}(\underline{p}, t) > u_{II}(\underline{p}, c) \iff ap + d(1-p) > (1-p)b$

$\iff d - b > (d - b - a)p$

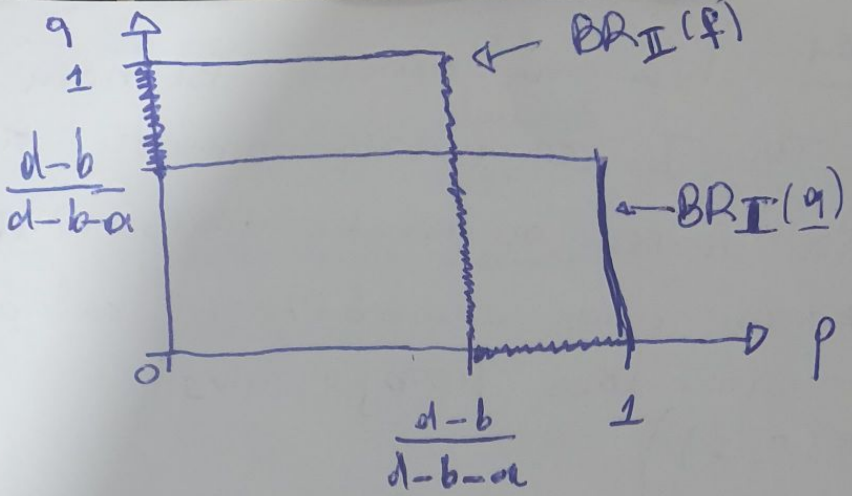
$\Rightarrow p < \dfrac{d-b}{d-b-a}$ τοτε $BR_{II}(\underline{p}) = \{t\} = \{(1,0)\}$

Αν $u_{II}(\underline{p}, c) > u_{II}(\underline{p}, t) \iff p > \dfrac{d-b}{d-b-a}$

τοτε $BR_{II}(\underline{p}) = \{c\} = \{(0,1)\}$

Αν $u_{II}(\underline{p}, c) = u_{II}(\underline{p}, t) \iff p = \dfrac{d-b}{d-b-a}$

τοτε $BR_{II}(\underline{p}) = \{(q, (1-q)), \ q \in [0,1]\}$



$$\Sigma\Sigma I: \Big((\underset{p}{0}, \underset{q}{1}), (1,0) \Big),$$

$$\Big((1,0), (0,1) \Big), \quad \Big(\Big(\frac{d-b}{d-b-a}, 1 - \frac{d-b}{d-b-a} \Big),$$

$$, \Big(\frac{d-b}{d-b-a}, 1 - \frac{d-b}{d-b-a} \Big) \Big)$$

Παρατηρηση το ΣΣΙ:

$$\Big(\underbrace{\Big(\frac{d-b}{d-b-a}, 1 - \frac{d-b}{d-b-a} \Big)}_{p_2}, \underbrace{\Big(\frac{d-b}{d-b-a}, 1 - \frac{d-b}{d-b-a} \Big)}_{q_2} \Big)$$

οι 2 παικτες χρησιμοποιουν ιδια στρ. και πετυχαίνουν ιδια αναμενομενη πληρωμη

$$u_I(p_2, q_2) = \Big(\frac{d-b}{d-b-a} \Big)^2 a + \Big(\frac{d-b}{d-b-a} \Big) d +$$

$$+ \Big(\frac{-a}{d-b-a} \Big) \Big(\frac{d-b}{d-b-a} \Big) \cdot 0 + \Big(\frac{-a}{d-b-a} \Big)^2 b =$$

$$= \dots = \frac{-ab}{d-b-a}$$

ομοίως $u_{II}(\underline{p_2}, \underline{q_2}) = \frac{-ab}{d-b-a}$

αυτό συμβαίνει επειδή έχουμε συμμετρικό παιχνίδι

<u>ορισμός:</u> (Συμμετρικό παιχνίδι)

Ένα παιχνίδι 2 παικτών είναι συμμετρικό αν i) το σύνολο των στρ. των 2 παικτών είναι ίδιο δηλ. $S_I = S_{II}$

ii) οι παίκτες έχουν ίδιες πληρωμές κάτω από τις ίδιες στρατηγικές

δηλ $\Pi_I(s,t) = \Pi_{II}(t,s)$

<u>ορισμος</u> (Συμμετρικό ΣΣΙ)

Ένα ΣΣΙ είναι <u>συμμετρικό</u> όταν όλοι ακολουθούν την ίδια στρατηγική $((i,j) \to i=j)$

$\underline{II}$) Φυσικό μονοπώλιο: Μια αγορά στην οποία μπορεί να υπάρξει <u>μόνο</u> μία εταιρεία

<u>Ερώτηση</u>: αν ξεκινήσουν 2 εταιρείες σε αυτή την αγορά ποια θα αποχωρήσει πρώτη;

πως ένα φυσικό μονοπώλιο γίνεται κανονικό μονοπώλιο

<u>Απλό Μοντέλο</u>: 2 εταιρείες με ίδια χαρακτηριστικά

χρονικός ορίζοντας 2 έτη

Απώλειες c €/έτος αν παραμένουν 2 εταιρείες

κέρδος A €/έτος αν μόνο 1 εταιρεία είναι στην αγορα.

$A > c$

αποφαση για καθε εταιρεια ; Ποτε θα αποχωρήσει

<u>Σκοπος</u>: Μεγιστοποιηση καθαρου κερδους

Λυση : $S_I = S_{II} = \{0, 1, 2\}$

κανονική μορφή:

I \ II	0	1	2
0	$(0,0)$	$(0,\pi)$	$(0, 2\pi^*)$
1	$(\pi,0)$	$(-c,-c)$	$(-c, \pi-c^*)$
2	$(2\pi^*, 0^*)$	$(\pi-c^*, -c)$	$(-2c, -2c)$

Εχουμε συμμετρικό παιχνιδι :

ΣΣΙ σε καθαρές $(2,0)$, $(0,2)$

(οχι συμμετρικά)

Ευρεση συμμετρικου ΣΣΙ σε μεικτές :

Εστω στι ο II ακολουθεί την $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2) = \underline{q}$

υπολογιζω τις αναμενομ. πληρωμές του I

$$u_I(0, \underline{q}) = q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + (1-q_1-q_2) \cdot 0 = 0$$

$$u_I(1, \underline{q}) = q_1 \cdot \pi + q_2(-c) + (1-q_1-q_2)(-c)$$

$$= q_1 \pi + (1-q_1)(-c)$$

$$u_I(2, \underline{q}) = q_1 \cdot 2\pi + q_2(\pi - c) + (1-q_1-q_2)(-2c)$$

Ελέγχω <u>ποτε</u> ο I ειναι αδιαφορος μεταξυ των καθαρων στρατηγικών του.

Θα πρέπει $u_I(0,q) = u_I(1,q) = u_I(2,q)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 \pi + (1-q_1)(-c) = 0 \\ q_1 2\pi + q_2(\pi - c) + (1-q_1-q_2)(-2c) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{c}{\pi + c} \\ q_2 = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή αν ο II παίξει $\left(\frac{c}{c+\pi}, 0, \frac{\pi}{c+\pi}\right)$

τότε ο I είναι αδιάφορος ανάμεσα στις καθαρές στρ. του άρα

$BR_I\left(\left(\frac{c}{c+\pi}, 0, \frac{\pi}{c+\pi}\right)\right) = \{(p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$ με $p_1 \in [0,1]$ και $p_2 \in [0, 1-p_1]\}$

Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό
αν ο I παίξει τη στρ. $\left(\frac{c}{c+\pi}, 0, \frac{\pi}{c+\pi}\right)$
ο II έχει για βέλτιστη απάντηση οποιαδήποτε μεικτή.
Το $\left(\left(\frac{c}{c+\pi}, 0, \frac{\pi}{c+\pi}\right), \left(\frac{c}{c+\pi}, 0, \frac{\pi}{c+\pi}\right)\right)$

είναι ΣΣΙ..

παίγνια μηδενικού αθροίσματος

<u>ορισμός</u> (παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος 2-παικτών)

Ένα παιχνίδι 2 παικτών είναι μηδενικού <u>αθροίσματος</u> εάν οι πληρωμές των 2 παικτών σε κάθε προφίλ στρατηγικών αθροίζουν στο 0 παράδειγμα:

I \ II	A	B
α	(4,−4)	(2,−2)
b	(1,−1)	(3,−3)

Ειναι παιχνίδι μηδ. αθροισματος οποτε για την περιγραφή του αρκει να εχουμε τον πινακα πληρωμων του παικτη I

I \ II	A	B	
α	4	2	2*
b	1	3	1
	4	3*	

πως επιλέγουν οι παικτες τις στρατηγικές;

Σκεπτικο: ο I σκέφτεται οποια καθαρη στρ. και να ακολουθήσω ο II θα θελει να μεγιστοποιησει την δικη του πληρωμη αρα να ελαχ. την δικια μου.

αν ακολουθήσω την καθαρή α ο II θα παιξει B και θα εχω πληρωμη 2

αν ακολουθήσω την καθαρη b ο II θα παιξει A και θα εχω πληρωμη 1

Με αυτο το σκεπτικό θα ακολουθήσει την α που του εξασφαλίζει το μεγιστο των ελαχιστων

(ορισμος:) max min (πληρωμή − κατω τιμη)

Η maxmin πληρωμή ειναι η καλυτερη απο τις ελαχιστες πληρωμές. Ισουται με

$$V_1 = \max_i \min_j A_{ij}$$

ονομαζεται και κατω τιμη του παιχνιδιού

ο ΙΙ σκέφτεται : οποια καθαρη στρ.
και να επιλέξω ο Ι θα μεγιστοποιήσει την πληρωμή του αρα θα ελαχ. την δική μου.
Αν επιλεξω A ο Ι θα παιξει a και η πληρωμη μου θα ειναι −4
αν επιλεξω B ο Ι θα παιξει b και η πληρωμή μου θα ειναι −3
Τελικα ο ΙΙ θα επιλέξει την στρ. που του εξασφαλιζει το ελαχιστο

Η minmax πληρωμη ειναι η μικροτερη απο τις μεγιστες πληρωμες ισουται με

$$V_2 = \min_j \max_i A_{ij}$$

και ονομαζεται ανω τιμή του παιχνιδιου.

Στο παραδειγμα $V_1 = 2 < 3 = V_2$
