03-03-23   δ) και ζ) όχι
από άσκηση 2

8. Μεικτές Στρατηγικές

Παράδειγμα: 11 Matching Pennies

2 παίκτες

κάθε παίκτης επιλέγει heads(h) ή tails(t)

- οι παίκτες βάζουν από 1€
- επιλέγουν ταυτόχρονα
- Αν κάνουν την ίδια επιλογή ο I παίρνει τα χρήματα
- Αν κάνουν διαφορετικά ο II τα παίρνει.

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει σημείο ΣΣΙ

I \ II	h_2	t_2
h_1	$(1^*,-1)$	$(-1,1^*)$
t_1	$(-1,1^*)$	$(1^*,-1)$

$BR_I(h_2)=h_1$

$BR_I(t_2)=t_1$

$BR_{II}(h_1)=t_2$

$BR_{II}(t_1)=h_2$

Εδώ δεν υπάρχει ΣΣΙ

Ιδέα: για μεικτές στρατηγικές

ο παίκτης I μπορεί να χρησιμοποιήσει την εξής στρατηγική: "ρίχνω ένα νόμισμα και εάν έρθει κεφαλή θα παίξω την h_1 αν έρθει γράμματα (πιθ $\frac{1}{2}$) θα ακολουθήσω την t_1"

Αυτή την στρατηγική την συμβολίζω με $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

πιθ να παίξει h_1 ← ↳ h_2

• Αναμενόμενη πληρωμή του I αν παίξει $\underline{p}^{o} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο II παίξει κ_2

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

• Αναμενόμενη πληρωμή του I αν παίξει $\underline{p}' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο II παίξει τ_2

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1 = 0$$

• Αναμενόμενη πληρωμή του II αν ο I ακολουθήσει $\underline{p}^{*} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο II παίξει κ_2

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1 = 0$$

Αναμενόμενη πληρωμή του I αν ο I παίξει $\underline{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ και ο II την $\underline{q} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(-1) + \frac{2}{3}\frac{1}{4}(-1) + \frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdot 1$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

ορισμός : (μεικτή / καθαρές στρατηγικές)
mixed / pure

Έστω παίκτης i με σύνολο στρατηγικών $S_i = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ ονομάζουμε μεικτή στρατηγική του i μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των στρατηγικών του δηλ. ένα διάνυσμα

$\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) : p_k \geq 0 \ , k = 1, 2, \ldots, m$

και $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$ με $p_k = P($ο παίκτης i να ακολουθήσει την $s_k)$

$k = 1, 2, \ldots, m$

Τα στοιχεία του S_i μπορούν να γραφούν σαν μεικτές στρατηγικές.

$s_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ οι στρατηγικές αυτές λέγονται καθαρές

$s_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$\vdots$

$s_m = (0, 0, \ldots, 1)$

υπολογισμός αναμενόμενης πληρωμής σε μεικτές στρατηγικές.

Έστω ότι ο παίκτης i ακολουθεί μια μεικτή στρατηγική $\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ πάνω στο $S_i = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ και όλοι οι άλλοι ακολουθούν καθαρή στρ. την $\underline{s}^{\#}_{-i}$ τότε η αναμενόμενη πληρωμή ενός παίκτη j θα είναι $\pi_j(\underline{p}, \underline{s}^{\#}_{-i}) = \sum_{k=1}^{m} p_k \pi_j(s_k, \underline{s}^{\#}_{-i})$

Αν ο παίκτης i ακολουθήσει την παραπάνω μεικτή στρατηγική και οι άλλοι παίκτες ακολουθήσουν την $S_{-i}^{\#}$ με πιθ q και την $\underline{S}_{-i}^{*}$ με πιθ. $1-q$

τότε η αναμ. πληρωμή του παίκτη j θα είναι

$$u_j(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{k=1}^{m} p_k\, q\, \Pi_j(s_k, S_{-i}^{\#}) + \sum_{k=1}^{m} p_k (1-q) \Pi_j(s_k, \underline{S}_{-i}^{*})$$

• Αν έχουμε παιχνίδι 2 παικτών I, II

ο I έχει $S_I = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ και παίζει

$\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ ο II έχει $S_2 = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$

και παίζει $\underline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Η αναμενομ. πληρωμή του I είναι:

$$u_I(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \Pi_I(s_i, t_j)$$

Η αναμενομ. πληρωμή του II είναι:

$$u_{II}(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \Pi_{II}(s_i, t_j)$$

Συνέπεια από τυχαιοποίηση:

<u>ορισμός:</u> Έστω η μεικτή στρατηγική $\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$

ορίζουμε ως στήριγμα της $\underline{p}$ το σύνολο

$$supp(\underline{p}) = \{ s_k : p_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, m \}$$

δηλ. είναι το σύνολο των καθαρών στρατηγικών στις οποίες η $\underline{p}$ δίνει θετική πιθανότητα

<u>παράδειγμα:</u> Αν $S_I = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

και $\underline{p} = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)$ τότε το $sup(\underline{p}) = \{s_1, s_4\}$

$$\pi_I(\underline{p}, s_{-i}^{\#}) = \underbrace{\frac{1}{2}\pi_I(s_1, \underline{s}_{-i}) + \frac{1}{2}\pi_I(s_4, s_{-i}^{\#})}_{}$$

κυρτός συνδυασμός των $\pi_I(s_1, s_{-i}^{\#})$ και $\pi_I(s_4, \underline{s}_{-i}^{\#})$

$\pi_I(s_1, \underline{s}_{-i}^{\#})$ $\qquad$ $\pi_I(s_4, s_{-i}^{\#})$

Συνεπώς: 1) Η μεικτή στρατηγική $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{s}_{-i}^{\#}$ ανν κάθε καθαρή στρατηγική που ανήκει στο στήριγμα της είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{s}_{-i}^{\#}$

2) Αν συμβαίνει το παραπάνω κάθε μεικτή με το ίδιο στήριγμα θα είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{s}_{-i}^{\#}$

Γιατί να χρησιμοποιήσω μεικτές στρατηγικές

α) Μια μεικτή στρατηγική μπορεί να κυριαρχεί έναντι κάποιας καθαρής στρατηγικής

Παράδειγμα 12: No-name game

I \ II	L	M_1	M_2	R
U	(1,0)	(4,2)	(2,4)	(3,1)
M	(2,1)	(2,0)	(2,2)	(2,1)
D	(4,2)	(1,4)	(2,0)	(3,1)

Υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές; ΟΧΙ

Αν ο I παίζει $\underline{p} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

$\pi_I(\underline{p}, L) = \frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 5/2 > 2 = \pi_I(M, L)$

$\pi_I(\underline{p}, M_1) = \frac{1}{2}\cdot 4 + 0\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 2{,}5 > 2 = \pi_I(M, M_1)$

$u_I(\underline{p}, M_2) = \frac{1}{2}2 + 0\cdot 2 + \frac{1}{2}2 = 2 = 2 = u_I(M, M_1)$

$u_I(\underline{p}, R) = \frac{1}{2}\cdot 3 + 0\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 = 3 > 2 = u_I(M, R)$

Η M κυριαρχείται από την $\underline{p}$

Τώρα για τον II η L κυριαρχείται από την M_1

η R κυριαρχείται από την M_1

Για τον I: η D κυριαρχείται από την U

Για τον II: η M_1 κυριαρχείται από την M_2

λύση μετά από ΕΑΚΣ (U, M_2)

b) Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

Παράδειγμα 1 (θέλουμε την $BR_{II}(\underline{p})$ βέλτιστη απ. του II στην $\underline{p}$)

I \ II	h_2	t_2
h_1	$(1,-1)$	$(-1,1)$
t_1	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Έστω ότι ο I παίζει τη μικτή στρατηγική $\underline{p} = (p, 1-p)$

οι αναμενόμ. πληρωμές του II είναι:

$u_2(\underline{p}, h_2) = p(-1) + (1-p)1 = 1-2p$

$u_2(\underline{p}, t_2) = p1 + (1-p)(-1) = 2p-1$

Αν $1-2p > 2p-1 \Rightarrow 2 > 4p \Leftrightarrow \boxed{p < \frac{1}{2}}$

ο II προτιμάει να παίξει h_2 Άρα $BR_{II}(\underline{p}) = h_2$

αν $1-2p < 2p-1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$ $BR_{II}(\underline{p}) = t_2$

Αν $1-2p = 2p-1 \iff \boxed{p=\frac{1}{2}}$

Τότε ο ΙΙ είναι αδιάφορος

δηλ. $BR_{II}(\underline{p}) = \{h_2, t_2\}$

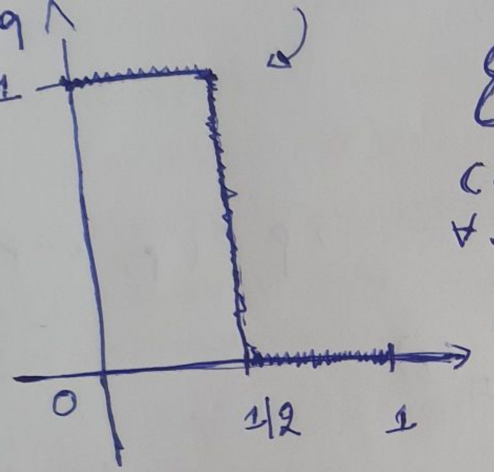
Επίσης κάθε μεικτή στρατηγική $\underline{q}(q, 1-q)$ του ΙΙ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{p}$

Τελικά: $BR_{II}(\underline{p}) = \begin{cases} h_2 & \text{αν } p \in [0, \frac{1}{2}) \\ t_2 & \text{αν } p \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \text{οτιδήποτε} & \text{αν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$

οτιδήποτε $= (q, 1-q)$ $\forall q \in (0,1)$

$h_2 = (1,0)$

$t_2 = (0,1)$



$p \rightarrow$ πιθ. με την οποία ο Ι ακολουθεί την h_1

Έστω ότι ο ΙΙ ακολουθεί μεικτή στρ. $\underline{q} = (q, 1-q)$

Θέλουμε να βρούμε την $BR_I(\underline{q})$

$u_I(h_1, \underline{q}) = q \cdot 1 + (1-q)(-1) = 2q-1$

$u_I(t_1, \underline{q}) = q(-1) + (1-q)(1) = 1-2q$

αν $2q-1 > 1-2q \iff q > \frac{1}{2}$ τότε

$BR_I(\underline{q}) = \{h_1\}$

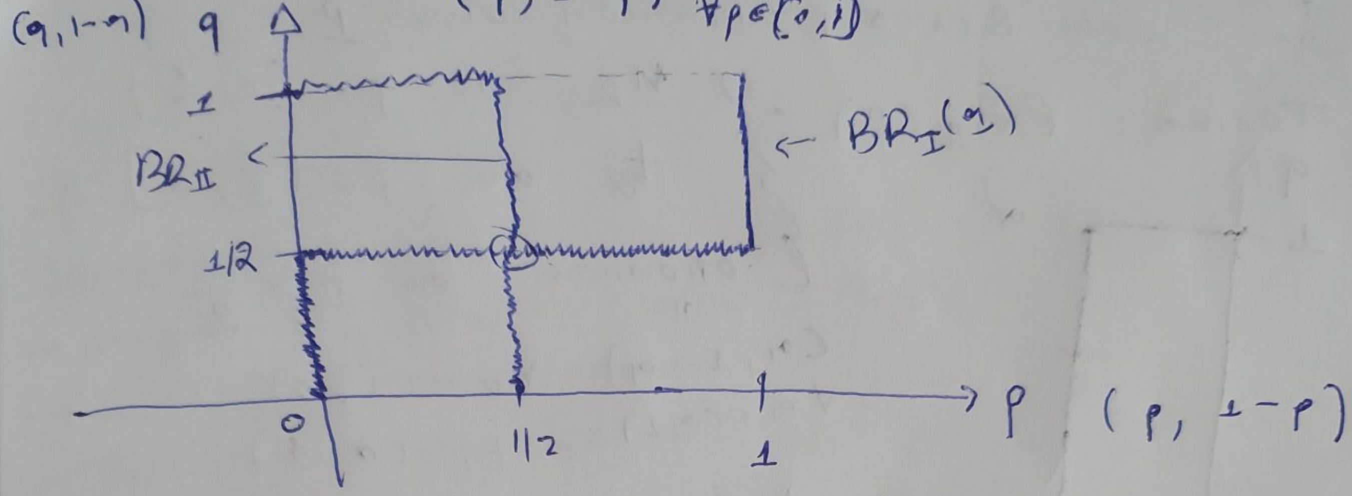
αν $2q-1 < 1-2q \iff q < \frac{1}{2}$ τότε $BR_I(\underline{q}) = \{t_1\}$

αν $2q-1 = 1-2q \iff q = \frac{1}{2}$ τότε

$BR_I(\underline{q}) = \{h_1, t_1\}$ και επίσης κάθε μεικτή του Ι $\underline{p} = (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$ είναι βέλτιστη

απάντηση

$$BR_I(q) = \begin{cases} t_1 = (0,1), & q \in [0, \frac{1}{2}) \\ u_1 = (1,0), & q \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \text{αδιάφορος}, & q = \frac{1}{2} \\ (p, 1-p)\ \forall p \in [0,1] & \end{cases}$$



φτιαχνω και για το $BR_{II}(p)$
και εκει που τεμνονται

το (p^*, q^*) με $p^* = (1/2, 1/2)$ και $q^* = (1/2, 1/2)$

Είναι ΣΣΙ γιατι κανένας δεν εχει κίνητρο να μετακινηθεί. □