# Επαναλαμβανόμενα παίγνια

## Παράδειγμα (ένα στάδιο)

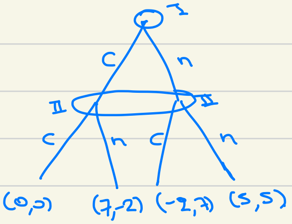
Παίγνιο 2 παικτών

Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα (c) ή (n).

Σε κανονική μορφή

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | $(0^*, 0^*)$ | $(7^*, -2)$ |
| (n) | $(-2, 7^*)$ | $(5, 5)$ |

ΣΣΙ: (c,c) με πληρωμές (0,0)




Δε λύνεται με backward induction.
Δε γίνεται να ξεχωρίσουμε κάποιο υποπαίγνιο.

## Παράδειγμα (2 στάδια)

Παίγνιο 2 παικτών παίζεται 2 φορές.

2 στάδια.

1ο στάδιο: Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα (c) ή (n).

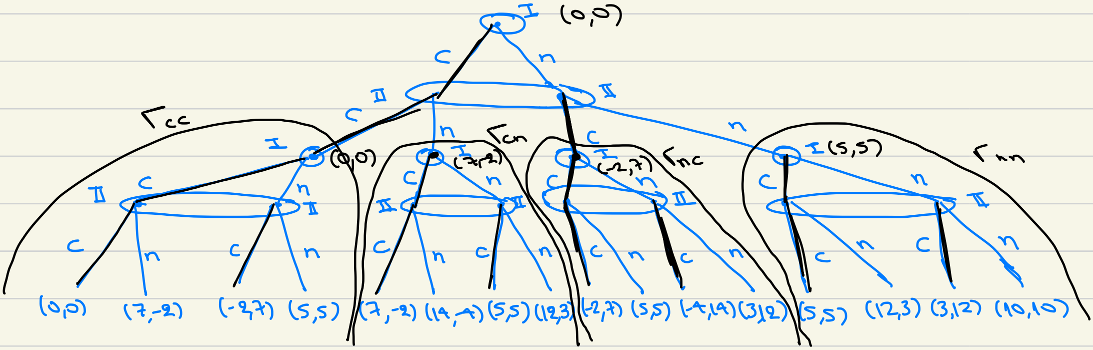
Πληρωμές 1ου σταδίου

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | (0,0) | (7,-2) |
| (n) | (-2,7) | (5,5) |

2ο στάδιο: Αποκαλύπτονται οι επιλογές του 1ου σταδίου. Ξαναεπιλέγουν (c) ή (n) ταυτόχρονα. Οι πληρωμές στο 2ο στάδιο είναι ίδιες με του πρώτου σταδίου.

Η συνολική πληρωμή είναι το άθροισμα των πληρωμών των 2 σταδίων.

<u>Εκτεταμένη μορφή:</u>




Κάθε παίκτης έχει 5 σύνολα πληροφόρησης. Άρα, κάθε στρατηγική θα έχει 5 στοιχεία, οπότε θα έχουν $2^5 = 32$ στρατηγικές ο καθένας.

Θα το λύσουμε, λύνοντας πρώτα τα 4 υποπαιχνίδια.

Λύνουμε το $\Gamma_{cc}$:

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | $(0^*,0^*)$ | $(7^*,-2)$ |
| (n) | $(-2,7^*)$ | $(5,5)$ |

ΣΣΙ: ((c),(c)) με πληρωμές (0,0).

Λύνουμε το $\Gamma_{cn}$:

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | $(7^*,-2^*)$ | $(14^*,-4)$ |
| (n) | $(5,5^*)$ | $(12,3)$ |

ΣΣΙ: ((c),(c)) με πληρωμές (7,-2)

Λύνουμε το $\Gamma_{nc}$ :

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | (-2,7) | (5,5) |
| (n) | (-4,14) | (3,12) |

ΣΣΙ: ((c),(c)) με πληρωμές (-2,7)

Λύνουμε το $\Gamma_{nn}$: Ομοίως, θα έχουμε ΣΣΙ: ((c),(c)) με πληρωμές (5,5)

Πάμε στο $\Gamma$:

| I \ II | (c) | (n) |
|---|---|---|
| (c) | (0,0) | (7,-2) |
| (n) | (-2,7) | (5,5) |

ΣΣΙ: ((c),(c)) με πληρωμές (0,0).

ΣΣΙ: ((c,c,c,c,c),(c,c,c,c,c)) με πληρωμές (0,0).

<u>Ορισμός</u> (Επαναλαμβανόμενα Παίγνια)

Ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ορίζεται ως ένα παίγνιο $\Gamma$ που επαναλαμβάνεται $T$ φορές $(t=1,2,\dots,T)$.

Αν $T<\infty$, έχω επαναλαμβανόμενο παίγνιο <u>πεπερασμένων επαναλήψεων</u>.

Αν $T=\infty$, έχω επαναλαμβανόμενο παίγνιο <u>άπειρων επαναλήψεων</u>

**Πρόταση**

Έστω ένα επαναλαμβανόμενο παιχνίδι, πεπερασμένων επαναλήψεων $(\Gamma, T)$. Αν το $\Gamma$ όταν παίζεται μία φορά έχει ΣΣΙ $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*)$, τότε το $(\Gamma, T)$ έχει ακριβώς ένα SPE που είναι να παίξει ο παίκτης $i$ την $s_i^*$ σε κάθε ένα από τα $T$ στάδια.

## Ενότητα 7: Δυναμικά Παίγνια

Κεφ 18

**Ορισμός** (Δυναμικό παίγνιο)

Ένα δυναμικό παίγνιο είναι ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο στο οποίο οι στρατηγικές και οι πληρωμές μεταβάλλονται με το χρόνο.

### Πρόβλημα των κοινών (The commons Problem)

**Δυναμική μορφή**

Παίγνιο σε $T$ στάδια. $(t = 1, 2, \dots, T)$

Το μέγεθος του πόρου μεταβάλλεται ως προς το χρόνο σύμφωνα με τις αποφάσεις των παικτών.

- $y_t$ = μέγεθος του πόρου στην αρχή του σταδίου $t$, $y_t \geq 0$.
- 2 παίκτες, $i = 1, 2$.
- Στην αρχή κάθε σταδίου $t$ ο παίκτης $i$ αποφασίζει την κατανάλωση $c_{it}$, $i = 1, 2$, $t = 1, \dots, T$.

- $\delta$ : discount factor
- Η πληρωμή του $i$ για την περίοδο $t$ είναι
  $\Pi_{it} = \log C_{it}$, $i = 1,2$, $t = 1,2,\dots,T$.
- πρέπει $C_{1t} + C_{2t} \le Y_t$
- Αν η υπολειπόμενη ποσότητα στην περίοδο $t$ είναι $x_t = Y_t - C_{1t} - C_{2t}$, το μέγεθος του πόρου την επόμενη περίοδο είναι

$$P(x_t) = 10\sqrt{x_t}$$

- Αν $x_t = 0 \Rightarrow P(x_t) = 0$ και το πρόβλημα τελειώνει.

(α) Ποια είναι η κοινωνικά βέλτιστη συμπεριφορά;

(β) Ποια είναι η συμπεριφορά των παικτών όταν λειτουργούν ατομικά; Πώς μεταβάλλονται τα $Y_t$;

(γ) Έχουμε υπερκατανάλωση όταν λειτουργούν ατομικά;

Λύση

(α) Έχουμε έναν κεντρικό διαχειριστή που αποφασίζει τι θα κάνει ο κάθε παίκτης και θέλει να μεγιστοποιήσει την κοινωνική ωφέλεια, δηλαδή το άθροισμα των πληρωμών των 2 παικτών.

Τελευταίο στάδιο

Αν είμαστε στο τελευταίο στάδιο $(t=1)$ με διαθέσιμο πόρο $Y$, επειδή η ωφέλεια είναι $\uparrow$ ως προς την κατανάλωση, θα καταναλωθεί όλος ο πόρος, δηλαδή

$c_1 + c_2 = Y \Rightarrow c_2 = Y - c_1$

Θα έχουμε

$$\max_{\substack{c_1 \\ 0 \le c_1 \le Y}} \Big[ \underbrace{\log c_1 + \log(Y - c_1)}_{f(c_1)} \Big]$$

$$f'(c_1) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{Y - c_1}$$

$$f''(c_1) = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(Y-c_1)^2} < 0 \implies f \text{ κοίλη}$$

$$f'(c_1) = 0 \implies \frac{1}{c_1} - \frac{1}{Y-c_1} = 0 \implies \frac{1}{c_1} = \frac{1}{Y-c_1} \iff$$

$$c_1 = Y - c_1 \iff c_1^* = Y/2$$

$$c_2^* = Y/2$$

Άρα, οι παίκτες στο τελευταίο στάδιο θα μοιραστούν το $Y$, θα πάρει ο καθένας $Y/2$.

$V^{(1)}(Y)$ : πληρωμή του ενός παίκτη για το τελευταίο στάδιο κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική, όταν στην αρχή του τελευταίου σταδίου η συνολική ποσότητα είναι $Y$.

$$V^{(1)}(Y) = \log(c_1^*) = \log(Y/2) = \log Y \underbrace{- \log 2}_{A(1)} = \log Y + A(1)$$

## 2 περίοδοι πριν τη λήξη

Έστω η διαθέσιμη ποσότητα στην αρχή του 2ου σταδίου πριν τη λήξη είναι $Y$

$Y$ αποφ. $c_1, c_2$ $\quad 10\sqrt{Y-c_1-c_2}$ $\quad$ τέλος

2 στ. $\log c_1$, $\log c_2$ $\qquad$ 1 στ. $V^{(1)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) = \log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) + A(1)$

Το πρόβλημα είναι

$$\max_{\substack{c_1, c_2 \\ c_1+c_2 \leq Y}} \left(\log c_1 + \log c_2 + 2\delta V^{(1)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right)\right)$$

$$\max_{\substack{c_1, c_2 \\ c_1+c_2 \leq Y}} \left(\log c_1 + \log c_2 + 2\delta \log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) + 2\delta A(1)\right)$$

$$\max_{\substack{c_1, c_2 \\ c_1+c_2 \leq Y}} \underbrace{\left(\log c_1 + \log c_2 + \delta \log(Y-c_1-c_2) + 2\delta + 2\delta A(1)\right)}_{g(c_1, c_2)}$$

$$\nabla g(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{c_1} - \delta\frac{1}{Y-c_1-c_2}, \ \frac{1}{c_2} - \delta\frac{1}{Y-c_1-c_2}\right)$$

$$Hg(c_1, c_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_1^2} - \delta\frac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} & -\delta\frac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} \\ -\delta\frac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} & -\frac{1}{c_2^2} - \delta\frac{1}{(Y-c_1-c_2)^2} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, άρα η $g$ είναι κοίλη.

$$\nabla g(c_1, c_2) = (0,0) \iff$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1} - \delta \frac{1}{Y-c_1-c_2} = 0 \\ \frac{1}{c_2} - \delta \frac{1}{Y-c_1-c_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_2 \\ \frac{1}{c_1} = \delta \frac{1}{Y-c_1-c_1} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ Y - 2c_1 = \delta \cdot c_1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_2 \\ Y = (2+\delta)c_1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = c_2 = \frac{Y}{2+\delta} \end{cases}$$

Άρα $c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2+\delta}$

$V^{(2)}(Y)$: βέλτιστη ωφέλεια για κάθε παίκτη αν απομένουν 2 στάδια πριν το τέλος και το μέγεθος του πόρου είναι $Y$.

$$V^2(Y) = \log(\underbrace{c_1^*}_{\frac{Y}{2+\delta}}) + \delta V^{(1)}(10\sqrt{\underbrace{Y - c_1^* - c_2^*}_{Y - 2\frac{Y}{2+\delta}}})$$

$$= \log\left(\frac{Y}{2+\delta}\right) + \delta \log\left(10\sqrt{\underbrace{Y - 2\frac{Y}{2+\delta}}_{\frac{\cancel{2Y} + \delta Y - \cancel{2Y}}{2+\delta}}}\right) + \delta A(1)$$

$$= \log Y - \log(2+\delta) + \delta + \frac{\delta}{2}\log\left(\frac{\delta}{2+\delta} Y\right) + \delta A(1)$$

$$= \log Y - \log(2+\delta) + \delta + \frac{\delta}{2}\log\frac{\delta}{2+\delta} + \frac{\delta}{2}\log Y + \delta A(1)$$

$$= \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\log Y + A(2)$$

3 περίοδοι πριν τη λήξη $(t=3)$

Έστω ότι 3 στάδια πριν τη λήξη η διαθέσιμη ποσότητα είναι $Y$.

$Y$ $\quad c_1, c_2 \quad 10\sqrt{Y-c_1-c_2}$

3 στάδ. $\quad \log c_1,\ \log c_2 \quad$ 2 στάδ. $\quad V^{(2)}\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) \quad$ λήξη

$$= \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) + A(2)$$

Θα λύσει το πρόβλημα

$$\max_{\substack{c_1,c_2\\ c_1+c_2\le Y}} \left(\log c_1 + \log c_2 + 2\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log\left(10\sqrt{Y-c_1-c_2}\right) + 2\delta A(2)\right)$$

$$\max_{\substack{c_1,c_2\\ c_1+c_2\le Y}} \underbrace{\left(\log c_1 + \log c_2 + \delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\log(Y-c_1-c_2) + 2\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + 2\delta A(2)\right)}_{h(c_1,c_2)}$$

$\nabla h(c_1,c_2) = \dots$

$Hh(c_1,c_2) = \dots$

είναι αρνητικά ορισμένος

$$\nabla h(c_1,c_2) = (0,0) \Rightarrow c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)}$$

$V^{(3)}(Y)$: ωφέλεια που θα πάρει κάτω από την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική όταν 3 στάδια πριν τη λήξη η ποσότητα είναι $Y$.

$$V^{(3)}(Y) = \left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}\right)\log Y + A(3)$$

Άρα

| $t$ στάδια πριν τη λήξη | $c_1^*$ , $c_2^*$ | $V^{(t)}(Y)$ |
|---|---|---|
| 1 | $c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2}$ | $\log Y + A(1)$ |
| 2 | $c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2+\delta}$ | $(1+\frac{\delta}{2})\log Y + A(2)$ |
| 3 | $c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4})}$ | $(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4})\log Y + A(3)$ |
| $\vdots$ | | |
| $T$ | $c_1^* = c_2^* = \frac{Y}{2(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}+\dots+(\frac{\delta}{2})^{T-1})}$ | $(1+\frac{\delta}{2}+(\frac{\delta}{2})^2+\dots+(\frac{\delta}{2})^{T-1})\log Y + A(T)$ |

πρέπει να αποδειχθεί επαγωγικά.