Ενότητα 4: Μικτές στρατηγικές, συμμετρικά παίγνια και παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

4.1. <u>Μικτές στρατηγικές</u>

Κεφάλαιο 8

Παράδειγμα (Matching pennies)

2 παίκτες: I και II

Κάθε παίκτης επιλέγει heads (h) ή tails (t).

Επιλέγουν ταυτόχρονα.

Ποντάρουν ο καθένας 1 €.

Αν κάνουν την ίδια επιλογή, ο I παίρνει τα χρήματα.

Αν κάνουν διαφορετική » , ο II » » ».

(i) Να διατυπωθεί το παίγνιο σε κανονική μορφή.

(ii) Υπάρχει λύση σε κυρίαρχες, με ΕΑΚΣ ή ΣΣΙ;

<u>Απάντηση</u>

(i)

I \ II	(h_2)	(t_2)
(h_1)	$(1^*, -1)$	$(-1, 1^*)$
(t_1)	$(-1, 1^*)$	$(1^*, -1)$

(ii) Η (h_1) δεν κυριαρχείται από την (t_1).
Η (t_1) » » » (h_1)

Η (h_2) » » » (t_2).
Η (t_2) » » » (h_2).

Δεν υπάρχει λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές, ούτε με ΕΑΚΣ. Δεν έχουμε ΣΣΙ.

Σκέψεις:

- Δεν υπάρχει ΣΣΙ. Δεν υπάρχει (s_1, s_2):

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, bend left, "BR_{II}(s_1)"] & s_2 \arrow[l, bend left, "BR_{I}(s_2)"] \end{tikzcd}$$

- Αν επεκτείναμε το σύνολο των στρατηγικών, θα βρίσκαμε ΣΣΙ;
- Τι άλλες στρατηγικές θα μπορούσε να ακολουθήσει ένας παίκτης;

Ιδέα για μεικτές στρατηγικές

Ο Ι μπορεί να χρησιμοποιήσει την εξής στρατηγική:
Ρίχνω ένα νόμισμα και εάν έρθει κεφαλή (πιθ $1/2$) θα παίξω (h_1), εάν έρθει γράμματα (πιθ $1/2$) θα παίξω (t_1).
Συμβολίζουμε αυτή τη στρατηγική $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε τις πληρωμές.
Πλέον έχουμε αναμενόμενες πληρωμές.

Αν ο Ι ακολουθήσει την $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και ο ΙΙ ακολουθήσει την (h_2):

αναμενόμενη πληρωμή

$$h_I(p, (h_2)) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$$
$$h_{II}(p, (h_2)) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

	I \ II	(h_2)	(t_2)
$\frac{1}{2}$	(h_1)	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{2}$	(t_1)	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Αν ο Ι ακολουθήσει την $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και ο ΙΙ ακολουθήσει την $q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

$$h_I(p, q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \, 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-1) + \frac{1}{2} \, \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \, 1 = 0$$

$$h_{II}(p, q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \, 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(-1) = 0$$

		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	I \ II	(h_2)	(t_2)
$\frac{1}{2}$	(h_1)	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{2}$	(t_1)	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Ορισμός (Μικτή στρατηγική)

Έστω παίκτης i με σύνολο στρατηγικών $S_i=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$.
Ονομάζουμε μικτή στρατηγική του i μία κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των στρατηγικών του, δηλαδή ένα διάνυσμα $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)$: $p_k\geq 0$, $k=1,\dots,m$ και $\sum_{k=1}^{m} p_k=1$, με $p_k = P\left(\text{ο παίκτης } i \text{ να ακολουθήσει τη στρατηγική } s_k\right)$,

$k=1,2,\dots,m$.

Παρατήρηση

Κάθε $s_k\in S_i$ μπορεί να γραφεί σαν μικτή στρατηγική ως $(0,0,\dots,0,\underset{k\text{-οστή θέση}}{1},0,\dots,0)$.

Αυτές οι στρατηγικές ονομάζονται καθαρές στρατηγικές.

Γιατί να χρησιμοποιήσω μικτές στρατηγικές;

1) Μπορεί μια μικτή στρατηγική να υπερισχύει έναντι μίας καθαρής στρατηγικής.

Παράδειγμα

I\II	(L)	(M_1)	(M_2)	(R)
(U)	(1,0)	(4,2)	(2,4)	(3,1)
(M)	(2,1)	(2,0)	(2,2)	(2,1)
(D)	(4,2)	(1,4)	(2,0)	(3,1)

Υπάρχουν υπερισχύουσες στρατηγικές;
Όχι

Υπάρχουν υπερισχυόμενες >> ;
Όχι

Αν ο Ι παίζει $p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$:

	Ι \ ΙΙ	(L)	(M₁)	(M₂)	(R)
$\frac{1}{2}$	(U)	(1,0)	(4,2)	(2,4)	(3,1)
0	(M)	(2,1)	(2,0)	(2,2)	(2,1)
$\frac{1}{2}$	(D)	(4,2)	(1,4)	(2,0)	(3,1)
	p	$(\frac{5}{2},1)$	$(\frac{5}{2},3)$	(2,2)	(3,1)

Για τον Ι : Η (M) υπερισχύεται από την p.

Για τον ΙΙ : Η (L) υπερισχύεται από την (M_1)

Η (R) » » » »

Για τον Ι : Η (D) » από την (U)

Η (p) » » » (U)

Για τον ΙΙ : Η (M_1) » » » (M_2)

Λύση : $((U), (M_2))$

2) Μπορεί να έχουμε ΣΣΙ σε μεικτές ενώ δεν έχουμε σε καθαρές.

Ι \ ΙΙ	(h_2)	(t_2)
(h_1)	(1,-1)	(-1,1)
(t_1)	(-1,1)	(1,-1)

Θα ψάξουμε ΣΣΙ σε μεικτές στρατηγικές.

Πρώτα, θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του Ι στη στρατηγική $q=(q, 1-q)$ του ΙΙ.

$$h_I((h_1), q) = q \cdot 1 + (1-q)(-1) = 2q-1$$

$$h_I((t_1), q) = q(-1) + (1-q)\cdot 1 = 1-2q$$

Ι \ ΙΙ	q (h_2)	$1-q$ (t_2)
(h_1)	$(1,-1)$	$(-1,1)$
(t_1)	$(-1,1)$	$(1,-1)$

- Αν $h_I((h_1), q) > h_I((t_1), q) \Leftrightarrow 2q-1 > 1-2q \Leftrightarrow 4q > 2 \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_I(q) = (h_1) = (1,0)$$

- Αν $h_I((h_1), q) < h_I((t_1), q) \Leftrightarrow 2q-1 < 1-2q \Leftrightarrow 4q < 2 \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_I(q) = (t_1) = (0,1)$$

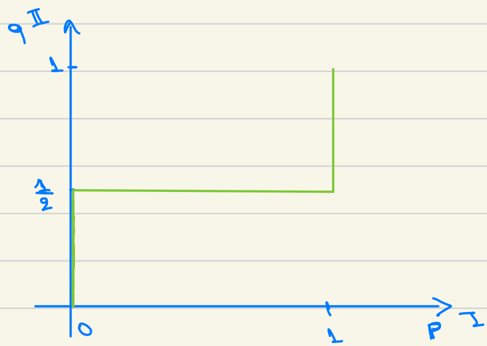
- Αν $h_I((h_1), q) = h_I((t_1), q) \Leftrightarrow 2q-1 = 1-2q \Leftrightarrow 4q = 2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_I(q) = \{(p, 1-p),\ p \in [0,1]\}$$

Άρα,

$$BR_I(q) = \begin{cases} (0,1), & q < \frac{1}{2} \\ (p,1-p),\ p\in[0,1], & q = \frac{1}{2} \\ (1,0), & q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$BR_I(q) = \begin{cases} (0,1) & , q < \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0,1] & , q = \frac{1}{2} \\ (1,0) & , q > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Θα βρούμε τη βέλτιστη απάντηση του II έναντι μια στρατηγικής $\underline{p} = (p, 1-p)$ του I $(BR_{II}(p))$

I \ II		(h_2)	(t_2)
p	(h_1)	$(1,-1)$	$(-1,1)$
$1-p$	(t_1)	$(-1,1)$	$(1,-1)$

$$h_{II}(\underline{p}, (h_2)) = p(-1) + (1-p)1 = 1 - 2p$$

$$h_{II}(\underline{p}, (t_2)) = p \cdot 1 + (1-p)(-1) = 2p - 1.$$

- Αν $h_{II}(\underline{p}, (h_2)) > h_{II}(\underline{p}, (t_2)) \iff 1 - 2p > 2p - 1 \iff 4p < 2 \iff p < \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_{II}(p) = (h_2) = (1, 0)$$

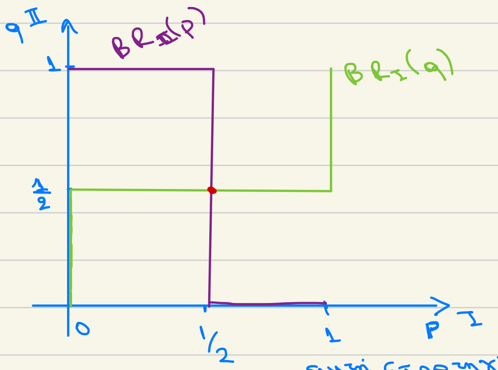
• Αν $h_{II}(p,(h_2)) < h_{II}(p,(t_2)) \iff 1-2p < 2p-1 \iff$
$4p > 2 \iff p > \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_{II}(p) = (t_2) = (0,1).$$

• Αν $h_{II}(p,(h_2)) = h_{II}(p,(t_2)) \iff 1-2p = 2p-1 \iff$
$4p = 2 \iff p = \frac{1}{2}$, τότε

$$BR_{II}(p) = \{(q,1-q),\ q\in[0,1]\}$$

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} (1,0) & , \text{αν } p < \frac{1}{2} \\ (q,1-q),\ q\in[0,1] & , \text{αν } p = \frac{1}{2} \\ (0,1) & , \text{αν } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$



ΣΣΙ σε μεικτές: $\left(\overbrace{\left(\underset{p}{\frac{1}{2}}, \underset{1-p}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{μεικτή στρατηγική του I}}, \overbrace{\left(\underset{q}{\frac{1}{2}}, \underset{1-q}{\frac{1}{2}}\right)}^{\text{μεικτή στρατηγική του II}}\right)$