<u>Χαρακτηριστικά του συστήματος κάτω από ΣΣΙ</u>

- Κάθε εταιρεία παράγει ποσότητα $Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{3b}$
- Η συνολική ποσότητα $Q^* = Q_1^* + Q_2^* = \frac{2(a-c)}{3b}$.
- Η τιμή ανά μονάδα προϊόντος θα είναι
$$P^* = a - bQ^* = a - \cancel{b}\frac{2(a-c)}{3\cancel{b}} = \frac{a+2c}{3}$$
- Το κέρδος για κάθε εταιρείας είναι
$$Q_i^* P^* - cQ_i^* = \frac{a-c}{3b}\cdot\frac{a+2c}{3} - c\,\frac{a-c}{3b} =$$
$$\frac{a-c}{3b}\,\frac{a-c}{3} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

(ii) Στην περίπτωση που συνεργάζονται, αποφασίζουν μαζί τις ποσότητες $Q_1$ και $Q_2$ ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος.

<u>Συνάρτηση πληρωμής</u>

$$\pi(Q_1,Q_2) = \pi_I(Q_1,Q_2) + \pi_{II}(Q_1,Q_2) =$$
$$= Q_1[a - b(Q_1+Q_2)] - cQ_1 + Q_2[a - b(Q_1+Q_2)] - cQ_2$$
$$= \underbrace{(Q_1+Q_2)}_{=Q}[a - b\underbrace{(Q_1+Q_2)}_{=Q} - c]$$

Τελικά, θέλουν να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση
$$\pi(Q) = Q(a - bQ - c)$$

Το πρόβλημα είναι $\max\ Q(a-bQ-c)$

υπό $Q \geq 0$

$$\pi(Q) = Q(a - bQ - c)$$

$$\pi'(Q) = a - bQ - c + Q(-b) = a - 2bQ - c$$

$$\pi''(Q) = -2b < 0 \Rightarrow \pi(Q) \text{ κοίλη}$$

$$\pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow a - 2bQ - c = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{a-c}{2b}$$

Άρα, η ποσότητα που θα φτιάξουν και οι 2 εταιρείες μαζί είναι $\hat{Q} = \frac{a-c}{2b}$, άρα κάθε εταιρεία παράγει $\hat{Q}_i = \frac{a-c}{4b}$, $i = 1,2$.

κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική.

## Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική

- Η κάθε εταιρεία παράγει ποσότητα
$$\hat{Q}_i = \frac{a-c}{4b} < \frac{a-c}{3b} = Q_i^*$$

- Η συνολική ποσότητα που θα φτιάξουν είναι
$$\hat{Q} = \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 = \frac{a-c}{2b} < \frac{2(a-c)}{3b} = Q^*$$

- Η τιμή στην οποία θα πωληθεί το προϊόν είναι
$$\hat{P} = a - b\hat{Q} = a - \cancel{b}\frac{a-c}{2\cancel{b}} = \frac{a+c}{2} > \frac{a+2c}{3} = P^*$$

- Η πληρωμή κάθε εταιρείας είναι
$$\hat{Q}_i \hat{P} - c\hat{Q}_i = \frac{a-c}{4b}\cdot\frac{a+c}{2} - c\frac{a-c}{4b} = \frac{a-c}{4b}\left(\frac{a+c}{2} - c\right) = \frac{a-c}{4b}\,\frac{a-c}{2} = \frac{(a-c)^2}{8b} > \underbrace{\frac{(a-c)^2}{9b}}_{\text{κέρδος ανά εταιρεία στην περίπτωση ανταγωνισμού.}}$$

3.2. Tragedy of commons
(Κεφάλαιο 7)

Περιγραφή προβλήματος

- Υπάρχει ένας πόρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όλους. Διαθεσιμότητα πόρου είναι $y$ μονάδες, $y>0$.
- Ο πόρος είναι περιορισμένος και υπάρχει περίπτωση να εξαντληθεί λόγω υπερκατανάλωσης.
- Όσο αυξάνεται η κατανάλωση σε μία περίοδο, τόσο μειώνεται η διαθεσιμότητα στις επόμενες.

- $N$ παίκτες, πρόβλημα 2 περιόδων.
- Στην 1η περίοδο, κάθε παίκτης αποφασίζει την ποσότητα που θα ζητήσει. Άρα
$$S_i = \{ c_i : c_i \in [0, y] \}, \quad i=1,2,\dots,N.$$
- Αν $c_1 + c_2 + \dots + c_N > y$, τότε ο καθένας παίρνει $\frac{y}{N}$. Στη δεύτερη περίοδο δεν παίρνουν τίποτα.

  Αν $c_1 + c_2 + \dots + c_N \leq y$, τότε ο καθένας παίρνει όσο ζήτησε και στη δεύτερη περίοδο μοιράζονται ότι έμεινε.
- Αν ένας παίκτης σε μία περίοδο πάρει ποσότητα $x$, η ωφέλειά του είναι $\log(x)$.

## 2 παίκτες - ατομική ωφέλεια

Παιχνίδι 2 παικτών

Θέλουμε να βρούμε το ΣΣΣ.

**Περιγραφή παιχνιδιού**

Παίκτες : I , II

Σύνολα στρατηγικών : $S_I = \{ c_1 : c_1 \in [0,y] \}$

$S_{II} = \{ c_2 : c_2 \in [0,y] \}$

Πληρωμές:

$$\Pi_I(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , c_1+c_2 < y \\ \log \dfrac{y}{2} + \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \log x}_{= -\infty} & c_1+c_2 \geq y \end{cases}$$

$$\Pi_I(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , c_1+c_2 < y \\ -\infty & , c_1+c_2 \geq y \end{cases}$$

Αντίστοιχα,

$$\Pi_{II}(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_2 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , c_1+c_2 < y \\ -\infty & , c_1+c_2 \geq y \end{cases}$$

## Βρίσκω τη βέλτιστη απάντηση του Ι στη στρατηγική $c_2$ του ΙΙ. ( $BR_I(c_2)$ ).

Η βέλτιστη απάντηση του Ι είναι η στρατηγική $c_1$ που μεγιστοποιεί την πληρωμή $\pi_I(c_1, c_2)$.
Άρα θέλω $\underset{c_1}{\operatorname{argmax}} \; \pi_I(c_1, c_2)$.

Για $0 \leq c_1 < y - c_2$,

$$\pi_I(c_1, c_2) = \log c_1 + \log \frac{y-(c_1+c_2)}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-(c_1+c_2)}$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{[y-(c_1+c_2)]^2} < 0 \Rightarrow$$

$\pi_1(c_1, c_2)$ κοίλη ως προς $c_1$.

$$\frac{\partial \pi_1(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1}{y-(c_1+c_2)} \Leftrightarrow$$

$$y - c_1 - c_2 = c_1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 = \frac{y-c_2}{2} \in [0, y-c_2)$$

$$BR_I(c_2) = \frac{y-c_2}{2}$$

Ομοίως, $\quad BR_{II}(c_1) = \dfrac{y-c_1}{2}$

## Εύρεση ΣΣΙ

$$(c_1^*, c_2^*) \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1^* \in BR_I(c_2^*) \\ c_2^* \in BR_{II}(c_1^*) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^* = \frac{y-c_2^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y-c_1^*}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1^* = \dfrac{y - \frac{y-c_1^*}{2}}{2} \\ c_2^* = \frac{y-c_1^*}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2c_1^* = \frac{y}{2} + \frac{c_1^*}{2} \\ c_2^* = \frac{y-c_1^*}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1^* = \frac{y}{3} \\ c_2^* = \frac{y}{3} \end{cases}$$

ΣΣΙ : $(c_1^*, c_2^*) = \left(\frac{y}{3}, \frac{y}{3}\right)$.

Χαρακτηριστικά του συστήματος κάτω από ΣΣΙ

- Στην $1^{\eta}$ περίοδο, ο καθένας καταναλώνει $\frac{y}{3}$.
- Στη $2^{\eta}$ περίοδο, ο καθένας καταναλώνει $\frac{y - \frac{2y}{3}}{2} = y/6$
- Η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι $\log\frac{y}{3} + \log\frac{y}{6} = \log\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{6} = \log\frac{y^2}{18}$

2 παίκτες - Συνεργασία

Οι παίκτες συνεργάζονται με σκοπό να μεγιστοποιήσουν τη συνολική τους πληρωμή.

Συνάρτηση πληρωμής

$$\pi(c_1, c_2) = \pi_{I}(c_1, c_2) + \pi_{II}(c_1, c_2) =$$

$$= \begin{cases} \log c_1 + \log c_2 + 2\cdot\log\frac{y-(c_1+c_2)}{2}, & c_1 + c_2 < y \\ -\infty & c_1 + c_2 \geq y \end{cases}$$

Για $c_1 + c_2 < y$,

$$\eta(c_1, c_2) = \log c_1 + \log c_2 + 2 \cdot \log \frac{y-(c_1+c_2)}{2}$$

$$\nabla \eta(c_1, c_2) = \left( \frac{1}{c_1} + 2\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{c_2} + 2\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$= \left( \frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)},\ \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)} \right)$$

$$H\eta(c_1, c_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_1^2} - \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & -\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \\ -\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & -\frac{1}{c_2^2} - \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \end{bmatrix}$$

Για να είναι η συνάρτηση κοίλη πρέπει ο $H\eta(c_1, c_2)$ αρνητικά ημιορισμένος. Για ν.δ.ο ο $H\eta(c_1, c_2)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, αρκεί ν.δ.ο ο $-H\eta(c_1, c_1)$ είναι θετικά ημιορισμένος.

$$-H\eta(c_1, c_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & +\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \\ +\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & \frac{1}{c_2^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \end{bmatrix}$$

- $$\left| \frac{1}{c_1^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \right| > 0$$

- $$\begin{vmatrix} \frac{1}{c_1^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & +\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \\ +\frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} & \frac{1}{c_2^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2}\right)\left(\frac{1}{c_2^2} + \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2}\right) - \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} \cdot \frac{2}{[y-(c_1+c_2)]^2} > 0$$

Άρα ο $-H\pi(c_1,c_2)$ είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow$
$H\pi(c_1,c_2)$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$
$\pi(c_1,c_2)$ κοίλη

$$\nabla \pi(c_1,c_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)},\ \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_1} - \dfrac{2}{y-(c_1+c_2)} = 0 \\ \dfrac{1}{c_2} - \dfrac{2}{y-(c_1+c_2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} \\ c_2 = \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1 = \dfrac{y-(c_1+c_1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = y/4 \\ c_1 = y/4 \end{cases}$$

Άρα, $(\hat{c}_1, \hat{c}_2) = (y/4, y/4)$.

## Χαρακτηριστικά συστήματος όταν συνεργάζονται

- Ο κάθε παίκτης (στην 1η περίοδο) καταναλώνει ποσότητα
  $\hat{c}_i = y/4 < y/3 = c_i^*$
- Κάθε παίκτης στη 2η περίοδο καταναλώνει ποσότητα
  $\dfrac{y-(\frac{y}{4}+\frac{y}{4})}{2} = \dfrac{y}{4} > y/6 \leftarrow$ κάτω από ΣΣΙ
- Η πληρωμή που θα έχει κάθε παίκτης είναι
  $\log\frac{y}{4} + \log\frac{y}{4} = \log\frac{y}{4}\cdot\frac{y}{4} = \log\frac{y^2}{16} > \log\frac{y^2}{18}$
  κάτω από ΣΣΙ.

# N παίκτες - Ατομική βελτιστοποίηση

Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό, θα ψάξουμε συμμετρικά ΣΣΙ.

$$(c,c,c,\dots,c,c) \text{ ΣΣΙ} \iff c \in BR_I(c,c,\dots,c,c)$$

Πρέπει να βρούμε τη $BR_I(c,c,\dots,c,c)$, δηλαδή τη στρατηγική του I που μεγιστοποιεί την πληρωμή του όταν οι άλλοι αποφασίσουν $(c,c,\dots,c,c)$

$$\pi_I(c_1,c,c,\dots,c,c) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-[c_1+(N-1)c]}{N}, & c_1+(N-1)c<y \\ -\infty, & c_1+(N-1)c \geq y \end{cases}$$

Για $0 \leq c_1 < y-(N-1)c$,

$$\pi_I(c_1,c,c,\dots,c,c) = \log c_1 + \log \frac{y-[c_1+(N-1)c]}{N}$$

$$\frac{\partial \pi_I(c_1,c,c,\dots,c,c)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\frac{y-[c_1+(N-1)c]}{\cancel{N}}}\left(-\frac{1}{\cancel{N}}\right) =$$

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-[c_1+(N-1)c]}$$

$$\frac{\partial^2 \pi_I(c_1,c,c,\dots,c,c)}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(y-[c_1+(N-1)c])^2} < 0 \implies$$

$\pi_I(c_1,c,c,\dots,c,c)$ κοίλη ως προς $c_1$

$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c, c, \dots, c, c)}{\partial c_1} = 0 \iff$$

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{y - [c_1 + (N-1)c]} = 0 \iff$$

$$c_1 = y - [c_1 + (N-1)c] \iff$$

$$c_1 = \frac{y - (N-1)c}{2}$$

Άρα $BR_I(c, c, \dots, c, c) = \dfrac{y - (N-1)c}{2}$

$(c, c, c, \dots, c, c)$ ΣΣΙ $\iff c \in BR_I(c, c, \dots, c, c) \iff$

$$c = \frac{y-(N-1)c}{2} \iff$$

$$2c = y - (N-1)c \iff$$

$$c = \frac{y}{N+1}$$

$$\left(\frac{y}{N+1}, \frac{y}{N+1}, \dots, \frac{y}{N+1}, \frac{y}{N+1}\right) \quad \text{ΣΣΙ}$$

Κάτω από το ΣΣΙ - χαρακτηριστικό σύστημα

- Κάθε παίκτης στην 1η περίοδο καταναλώνει $\dfrac{y}{N+1}$
- Κάθε παίκτης στη 2η περίοδο καταναλώνει

$$\frac{y - N\frac{y}{N+1}}{N} = \frac{\frac{y}{N+1}}{N} = \frac{y}{N(N+1)}$$

- Η πληρωμή κάθε παίκτη είναι

$$\log \frac{y}{N+1} + \log \frac{y}{N(N+1)} = \log \frac{y}{N+1}\,\frac{y}{N(N+1)} = \log \frac{y^2}{N(N+1)^2}$$

## N παίκτες - Συνεργασία

Αποφασίζουν όλοι μαζί με σκοπό τη μεγιστοποίηση της συνολικής πληρωμής τους.

Θα υποθέσουμε ότι όλοι ζητούν την ίδια ποσότητα c.

$$\pi(c) = N\pi_I(c, c, c, \dots, c, c) =$$

$$= \begin{cases} N\log c + N\log \frac{y-Nc}{N} & , N\cdot c < y \\ -\infty & , Nc \geq y \end{cases}$$

Για $0 \leq c < \frac{y}{N}$,

$$\pi(c) = N\log c + N\log\frac{y-Nc}{N}$$

$$\pi'(c) = N\frac{1}{c} + N\frac{1}{\frac{y-Nc}{N}}\cdot(-1) = \frac{N}{c} - \frac{N^2}{y-Nc}$$

$\pi''(c) < 0 \Rightarrow \pi(c)$ κοίλη

$$\pi'(c) = 0 \iff$$

$$\frac{\cancel{N}1}{c} = \frac{N^{\cancel{2}}}{y-Nc} \iff y - Nc = Nc \iff$$

$$c = \frac{y}{2N}$$

$$(\hat{c}, \hat{c}, \hat{c}, \dots, \hat{c}, \hat{c}) = \left(\frac{y}{2N}, \frac{y}{2N}, \frac{y}{2N}, \dots, \frac{y}{2N}, \frac{y}{2N}\right)$$