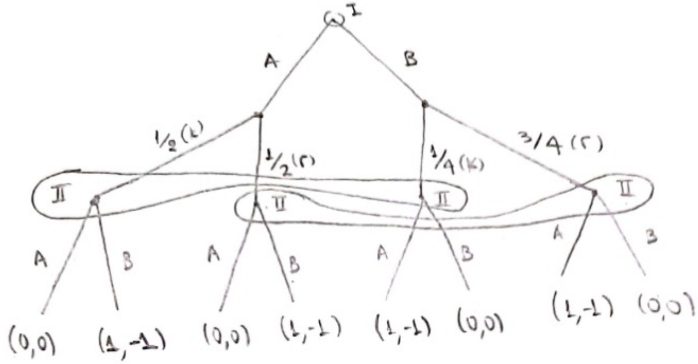
Πρόβλημα 1

(α)



(β) 2 παίκτες : I και II

$S_I = \{(A), (B)\}$

$S_{II} = \{(A,A), (A,B), (B,A), (B,B)\}$

I \ II	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
(A)	$(0, \overset{*}{0})$	$(\overset{*}{1/2}, -1/2)$	$(1/2, -1/2)$	$(\overset{*}{1}, -1)$
(B)	$(\overset{*}{1}, -1)$	$(1/4, -1/4)$	$(\overset{*}{3/4}, -3/4)$	$(0, \overset{*}{0})$

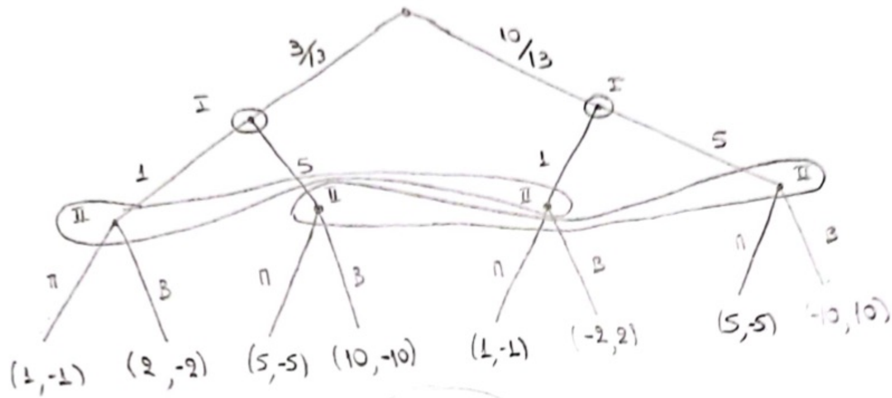
(γ) Δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές.

(δ) Για τον II : Η (B,A) κυριαρχείται από την (A,B).
Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ.

(ε) Δεν υπάρχουν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές.

Προβλημα 2

(α)



(β) 2 παίκτες: I και II

$S_I = \{(1,1),(1,5),(5,1),(5,5)\}$

$S_{II} = \{(\Pi,\Pi),(\Pi,B),(B,\Pi),(B,B)\}$

I \ II	(Π,Π)	(Π,Β)	(Β,Π)	(Β,Β)
(1,1)	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-\frac{14}{13},\frac{14}{13})$	$(-\frac{14}{13},\frac{14}{13})$
(1,5)	$(\frac{53}{13},-\frac{53}{13})$	$(-\frac{97}{13},\frac{97}{13})$	$(\frac{56}{13},-\frac{56}{13})$	$(-\frac{94}{13},\frac{94}{13})$
(5,1)	$(\frac{25}{13},-\frac{25}{13})$	$(\frac{40}{13},-\frac{40}{13})$	$(-\frac{5}{13},\frac{5}{13})$	$(\frac{10}{13},-\frac{10}{13})$
(5,5)	$(5,-5)$	$(-\frac{70}{13},\frac{70}{13})$	$(5,-5)$	$(-\frac{70}{13},\frac{70}{13})$

(γ) Δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Για τον I: Η (1,1) κυριαρχείται από την (5,1).
Η (1,5) κυριαρχείται από την (5,5)

Για τον II: Η (Π,Π) κυριαρχείται από την (Β,Π)
Η (Π,Β) » » » (Β,Β)

Δεν υπάρχει λύση με ΕΑΚΣ

(ε) Δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

Πρόβλημα 3

(α) 2 παίκτες: I, II

$S_I = \{(1),(2),(3),(4)\}$

$S_{II} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

I \ II	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
(2)	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
(3)	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
(4)	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

(β) Για τον I:

$$\pi_I((1),(1)) = \sqrt{2}-1 > \sqrt{3}-2 = \pi_I((2),(1))$$
$$\pi_I((1),(2)) = \sqrt{3}-1 > 0 = \pi_I((2),(2))$$
$$\pi_I((1),(3)) = 1 > \sqrt{5}-2 = \pi_I((2),(3))$$
$$\pi_I((1),(4)) = \sqrt{5}-1 > \sqrt{6}-2 = \pi_I((2),(4))$$

Άρα $\pi_I((1),s_2) > \pi_I((2),s_2)$, $\forall s_2 \in S_{II}$ $\Rightarrow$

Για τον I, η (1) υπερέχει της (2).

Ομοίως για τον II.

Η (1) είναι και αυστηρώς κυρίαρχη στρατηγική αφού, π.χ. για τον I, :

$$\pi_I((1),s_2) > \pi_I(s_1,s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II} \text{ και } \forall s_1 \in S_I \setminus \{(1)\}$$

Ομοίως για τον II.

(γ) Η ((1),(1)) είναι λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Για τον Ι: οι (2),(3),(4) κυριαρχούνται από την (1)
» » ΙΙ: οι (2),(3),(4) » » την (1)

Άρα ((1),(1)) είναι λύση με ΕΑΚΣ.

(ε)

Ι \ ΙΙ	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	$(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$	$(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$	$(1, -1)$	$(\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-4)$
(2)	$(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-1)$	$(0, 0)$	$(\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-3)$	$(\sqrt{6}-2, \sqrt{6}-4)$
(3)	$(-1, 1)$	$(\sqrt{5}-3, \sqrt{5}-2)$	$(\sqrt{6}-3, \sqrt{6}-3)$	$(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}-4)$
(4)	$(\sqrt{5}-4, \sqrt{5}-1)$	$(\sqrt{6}-4, \sqrt{6}-2)$	$(\sqrt{7}-4, \sqrt{7}-3)$	$(\sqrt{8}-4, \sqrt{8}-4)$

ΣΣΙ είναι το ((1),(1)).

Πρόβλημα 4

(α) Το παιχνίδι σε κανονική μορφή είναι

I \ II	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(1)	(0,0)	$(5/2, 5/2)$	(5,0)	(5,0)	(5,0)	(5,0)	(5,0)
(2)	(0,0)	(0,5)	(4,4)	(8,0)	(8,0)	(8,0)	(8,0)
(3)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	$(9/2, 9/2)$	(9,0)	(9,0)	(9,0)
(4)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(4,4)	(8,0)	(8,0)
(5)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(0,8)	$(5/2, 5/2)$	(5,0)
(6)	(0,0)	(0,5)	(0,8)	(0,9)	(0,8)	(0,5)	(0,0)

(β) Παρατηρούμε ότι για τον Ι:

$$\Pi_I((0), s_2) = 0 \le \Pi_I((1), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}.$$

Άρα, η (0) κυριαρχείται από την (1)

Ομοίως,

$$\Pi_I((6), s_2) = 0 \le \Pi_I((1), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}.$$

Άρα, η (6) κυριαρχείται από την (1)

Επίσης,

$$\Pi_I((4), s_2) \le \Pi_I((3), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II}.$$

Άρα, η (4) κυριαρχείται από την (3)

και

$$\Pi_I((5), s_2) \le \Pi_I((3), s_2) \quad \forall s_2 \in S_{II},$$

οπότε και η (5) κυριαρχείται από την (3).

Ομοίως για τον ΙΙ.

Μπορούμε να διαγράψουμε τις κυριαρχούμενες (γ) Δεν υπάρχει λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές

(δ) Έχοντας διαγράψει τις κυριαρχούμενες (0),(4),(5) και (6) για τον Ι και (0),(4),(5),(6) για τον ΙΙ, συνεχίζουμε την απαλοιφή.

Για τον Ι: Η (3) κυριαρχείται από την (2)
Για τον ΙΙ: Η (3) κυριαρχείται από την (2)
Για τον Ι: Η (2) κυριαρχείται από την (1)
Για τον ΙΙ: Η (2) κυριαρχείται από την (1)

Άρα, η ((1),(1)) είναι λύση με ΕΑΚΣ

(ε)

Ι \ ΙΙ	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(0)	$(0^*,0^*)$	$(0,0^*)$	$(0,0^*)$	$(0,0^*)$	$(0,0^*)$	$(0,0^*)$	$(0,0^*)$
(1)	$(0^*,0)$	$(5/2^*,5/2^*)$	$(5^*,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$	$(5,0)$
(2)	$(0^*,0)$	$(0,5^*)$	$(4,4)$	$(8^*,0)$	$(8,0)$	$(8,0)$	$(8,0)$
(3)	$(0^*,0)$	$(0,5)$	$(0,8^*)$	$(9/2,9/2)$	$(9^*,0)$	$(9^*,0)$	$(9^*,0)$
(4)	$(0^*,0)$	$(0,5)$	$(0,8)$	$(0,9^*)$	$(4,4)$	$(8,0)$	$(8,0)$
(5)	$(0^*,0)$	$(0,5)$	$(0,8)$	$(0,9^*)$	$(0,8)$	$(5/2,5/2)$	$(5,0)$
(6)	$(0^*,0)$	$(0,5)$	$(0,8)$	$(0,9^*)$	$(0,8)$	$(0,5)$	$(0,0)$

Υπάρχουν ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές:
((0),(0)) με πληρωμές (0,0)
και ((1),(1)) » » (5/2, 5/2)

Πρόβλημα 5:

Cournot Nash Equilibrium

Παιχνίδι 2 παικτών: Ι, ΙΙ

$S_I = \{Q_1 : Q_1 \in [0,\infty)\}$, $S_{II} = \{Q_2 : Q_2 \in [0,\infty)\}$

$$\Pi_I(Q_1,Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) - cQ_1$$

$$\Pi_{II}(Q_1,Q_2) = Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_2$$

με $b,d>0$, $a>c$

Βέλτιστη απόκριση του Ι στην Q_2 $(BR_I(Q_2))$:

Θέλουμε το $\underset{Q_1}{\operatorname{argmax}}\, \Pi_I(Q_1,Q_2)$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} = a - c - 2bQ_1 - dQ_2$$

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1,Q_2)}{\partial Q_1} \geq 0 \iff -2bQ_1 \geq dQ_2 - (a-c)$$

$$\iff Q_1 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2$$

Άρα

Q_1		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_2$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $\Pi_I(Q_1,Q_2)$	↗		↘

$$BR_I(Q_2) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b}Q_2 & , \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b}Q_2 \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b}Q_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad BR_I(Q_2) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b}Q_2 & , \text{αν } Q_2 \leq \dfrac{a-c}{d} \\ 0 & , \text{αν } Q_2 > \dfrac{a-c}{d} \end{cases}$$

Βέλτιστη απάντηση του II στην Q_1 $(BR_{II}(Q_1))$:

Θέλουμε το $\underset{Q_2}{\arg\max}\, \Pi_{II}(Q_1, Q_2)$

$$\frac{\partial \Pi_{II}(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = a - c - 2bQ_2 - dQ_1$$

$$\frac{\partial \Pi_{II}(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} \geq 0 \Longleftrightarrow -2bQ_2 \geq dQ_1 - (a-c)$$

$$\Longleftrightarrow Q_2 \leq \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_1$$

Άρα

Q_2		$\frac{a-c}{2b} - \frac{d}{2b}Q_1$	
πρόσημο παραγώγου	+	0	−
μονοτονία $\Pi_{II}(Q_1, Q_2)$	↗		↘

$$BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1, & \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 \geq 0 \\ 0, & \text{αν } \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1, & \text{αν } Q_1 \leq \dfrac{a-c}{d} \\ 0, & \text{αν } Q_1 > \dfrac{a-c}{d} \end{cases}$$

Εύρεση ΣΣΙ

$$(Q_1, Q_2) \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BR_I(Q_2) = Q_1 \\ BR_{II}(Q_1) = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_1 = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} \left(\dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 \right) = Q_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} Q_2 = Q_1 \\ \dfrac{a-c}{2b} \, \dfrac{2b-d}{2b} = Q_2 \left(1 - \left(\dfrac{d}{2b} \right)^2 \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{2b} \, \dfrac{a-c}{2b+d} = \dfrac{a-c}{2b(2b+d)} (2b + \cancel{d} - \cancel{d}) = \dfrac{a-c}{2b+d} \\ Q_2 = \dfrac{a-c}{2b} \Big/ \dfrac{2b+d}{2b} = \dfrac{a-c}{2b+d} \end{array} \right.$$

Άρα $(Q_1^*, Q_2^*) = \left(\frac{a-c}{2b+d}, \frac{a-c}{2b+d}\right)$

Το κέρδος που έχει τότε κάθε εταιρία είναι:

$$\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) = Q_1^*(a - bQ_1^* - dQ_2^*) - cQ_1^*$$

$$= \frac{a-c}{2b+d}\left(a - b\frac{a-c}{2b+d} - d\frac{a-c}{2b+d}\right) - c\frac{a-c}{2b+d}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2b+d} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+d-b-d)}{(2b+d)^2} = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Ομοίως,

$$\Pi_{II}(Q_1^*, Q_2^*) = \frac{b(a-c)^2}{(2b+d)^2}$$

Cartel Optimal Solution

Το συνολικό κέρδος αν επιλέξουν (Q_1, Q_2) είναι:

$$S(Q_1, Q_2) = Q_1(a - bQ_1 - dQ_2) + Q_2(a - bQ_2 - dQ_1) - cQ_1 - cQ_2$$

$$= (a-c)(Q_1+Q_2) - bQ_1^2 - bQ_2^2 - 2dQ_1Q_2$$

$$\nabla S(Q_1, Q_2) = [a-c-2bQ_1-2dQ_2,\ a-c-2bQ_2-2dQ_1]$$

$$HS(Q_1, Q_2) = \begin{bmatrix} -2b & -2d \\ -2d & -2b \end{bmatrix}$$

$$-HS(Q_1,Q_2) = \begin{bmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{bmatrix}$$

$$|2b| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2d \\ 2d & 2b \end{vmatrix} = (2b)^2 - (2d)^2$$

[redacted]

HS αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ S κοίλη

$$\nabla S(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a - c - 2b\bar{Q}_1 - 2d\bar{Q}_2 = 0 \\ a - c - 2b\bar{Q}_2 - 2d\bar{Q}_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ a - c - 2b\bar{Q}_2 - 2d\left(\dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2\right) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{Q}_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{d}{b}\bar{Q}_2 \\ \dfrac{(a-c)(2b-2d)}{2\cancel{b}} = \dfrac{2b^2 - 2d^2}{\cancel{b}}\bar{Q}_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{d}{b}\,\frac{a-c}{2(b+d)} = \frac{(a-c)(b+\cancel{d}-\cancel{d})}{2b(b+d)} = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{a-c}{2(b+d)}$$

Άρα $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \left(\frac{a-c}{2(b+d)}, \frac{a-c}{2(b+d)} \right)$

Το κέρδος τότε είναι:

$$\Pi_I(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \bar{Q}_1 (a - b\bar{Q}_1 - d\bar{Q}_2) - c\bar{Q}_1$$

$$= \frac{a-c}{2(b+d)} \left(a - b\,\frac{a-c}{2(b+d)} - d\,\frac{a-c}{2(b+d)} \right) - c\,\frac{a-c}{2(b+d)}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{2(b+d)} - \frac{(b+d)(a-c)^2}{4(b+d)^2}$$

$$= \frac{(a-c)^2(2b+2d-b-d)}{4(b+d)^2} = \frac{(a-c)^2\cancel{(b+d)}}{4(b+d)^{\cancel{2}}} = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ομοίως,

$$\Pi_{II}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \frac{(a-c)^2}{4(b+d)}$$

Ισχύει ότι

$$\Pi_I(Q_1^*, Q_2^*) < \Pi_I(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \iff$$

$$\frac{b\cancel{(a-c)^2}}{(2b+d)^2} < \frac{\cancel{(a-c)^2}}{4(b+d)} \iff$$

$$4b(b+d) < (2b+d)^2 \iff$$

$$\cancel{4b^2} + \cancel{4bd} < \cancel{4b^2} + \cancel{4bd} + d^2$$

✓

ενώ $Q_1^* > \bar{Q}_1 \iff$

$$\frac{a-c}{2b+d} > \frac{a-c}{2(b+d)} \quad \checkmark$$

Δηλαδή, πετυχαίνω μεγαλύτερα κέρδη φτιάχνοντας μικρότερες ποσότητες.