Θεωρία Παιγνίων

Μάθημα 4
09/02/2024

Παράδειγμα 1 (Ο πόλεμος των φύλων)

Ένα ζευγάρι θέλει να αποφασίσει πού θα πάει το βράδυ. Η σύζυγος (παίκτης Ι) θέλει να πάει στο θέατρο. Ο σύζυγος (παίκτης ΙΙ) θέλει να πάει σε εστιατόριο. Αποφασίζουν ταυτόχρονα χωρίς ο ένας να γνωρίζει τι αποφάσισε ο άλλος. Θέατρο ⟶ (Θ) ή εστιατόριο ⟶ (Ε).

Ο καθένας παίρνει:
- 0 μον. ωφέλειας αν πάει κάπου και είναι μόνος
- 1 " " αν πάει κάπου που δεν προτιμάει
- 3 " " αν πάει εκεί που προτιμάει

<u>Λύση</u>

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Παίκτες:} & \text{I (η σύζυγος)} \\ & \text{II (ο σύζυγος)} \end{array} \right\}$

Σύνολα στρατηγικών: Κάθε παίκτης έχει 1 σύνολο πληροφόρησης

$S_I = \{(\Theta), (E)\}$

$S_{II} = \{(\Theta), (E)\}$

I \ II	(Θ)	(Ε)
(Θ)	(3,1)	(0,0)
(Ε)	(0,0)	(1,3)

Βέλτιστες απαντήσεις

στρατ. του ΙΙ

$BR_I((\Theta)) = \{(\Theta)\}$

$BR_I((E)) = \{(E)\}$

$BR_{II}((\Theta)) = \{(\Theta)\}$

$BR_{II}((E)) = \{(E)\}$

2

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΣΣΙ) ~Nash equilibrium~

Μία στρατηγική κατάσταση $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*)$ είναι **ΣΣΙ** αν για κάθε παίκτη i η στρατηγική s_i^* είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική των άλλων s_{-i}^*.

► Διαισθητικά, μία στρατηγική κατάσταση είναι ΣΣΙ αν, όταν όλοι οι παίκτες την ακολουθούν κανένας **δε θέλει να αλλάξει** στρατηγική.

Παράδειγμα: Ο πόλεμος των φύλων

I \ II	(θ_2)	(ε_2)
(θ_1)	$(3^*, 1^*)$	$(0,0)$
(ε_1)	$(0,0)$	$(1^*, 3^*)$

ΣΣΙ: • $((\theta_1), (\theta_2))$

• $((\varepsilon_1), (\varepsilon_2))$

Παρατηρήσεις

- Το ΣΣΙ <u>δεν</u> είναι μοναδικό
- Έχουμε διαφορετικές πληρωμές κάτω από τα ΣΣΙ.
- ΣΣΙ $\not\Rightarrow$ λύση σε κυρίαρχες

  ΣΣΙ $\not\Rightarrow$ λύση με ΕΑΚΣ

Παράδειγμα (The odd couple)

Felix \ Oscar	(3_2)	(6_2)	(9_2)
(3_1)	$(-13,-8)$	$(-1,-\overset{*}{9})$	$(\overset{*}{7},-\overset{*}{4})$
(6_1)	$(-4,-\overset{*}{1})$	$(\overset{*}{4},-\overset{*}{1})$	$(4,-4)$
(9_1)	$(\overset{*}{1},\overset{*}{2})$	$(1,-1)$	$(1,-4)$

ΣΣΙ: $\left\{ \left(\underbrace{(9_1),(3_2)}\right), \left(\underbrace{(6_1),(6_2)}\right), \left(\underbrace{(3_1),(9_2)}\right) \right\}$

Παράδειγμα (Bertrand price competition)

I \ II	$(high_2)$	$(medium_2)$	(low_2)
$(high_1)$	$(6,6)$	$(0,1\overset{*}{0})$	$(0,8)$
$(medium_1)$	$(1\overset{*}{0},0)$	$(5,5)$	$(0,\overset{*}{8})$
(low_1)	$(8,0)$	$(\overset{*}{8},0)$	$(\overset{*}{4},\overset{*}{4})$

ΣΣΙ: $\left((low_1),(low_2)\right)$

Παράδειγμα: (Το δίλημμα του φυλακισμένου)

I \ II	(o_2)	(δo_2)
(o_1)	$(\overset{*}{-5}, \overset{*}{-5})$	$(\overset{*}{0}, -10)$
(δo_1)	$(-10, \overset{*}{0})$	$(-1, -1)$

ΣΣΙ: $((o_1), (o_2))$

Ενότητα 3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1 Δυοπώλιο του Cournot (Κεφ. 6)

Υπάρχουν 2 εταιρείες στην αγορά (duopoly)

- Οι εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν

  Q_i = ποσότητα που παράγεται από την εταιρεία i, $i=1,2$

  Q = συνολική ποσότητα παραγωγής

  $Q = Q_1 + Q_2$

- Αν οι εταιρείες φτιάξουν ποσότητα Q, τότε η τιμή του προϊόντος θα γίνει $P = a - b\cdot Q$, $Q \leq \frac{a}{b}$

- Το κόστος παραγωγής για την εταιρεία i είναι

  $C_i(Q_i) = c\cdot Q_i$, με $a > c$

- Κάθε εταιρεία αποφασίζει την ποσότητα που θα φτιάξει με σκοπό να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της.

Να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες παραγωγής:

(α) αν κάθε εταιρία αποφασίζει μόνη της και ταυτόχρονα με την άλλη.

(β) αν γίνει cartel (συναποφασίζουν)

Λύση

(α) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ανταγωνισμό, οπότε παίγνιο μεταξύ των εταιρειών.

$\boxed{\text{Περιγραφή παιγνίου}}$ Παίκτες: I και II (οι 2 εταιρείες)

Σύνολα στρατηγικών:
$$S_I = \{Q_1 \in [0, \tfrac{a}{b}]\}$$
$$S_{II} = \{Q_2 \in [0, \tfrac{a}{b}]\}$$
Τα σύνολα στρατηγικών είναι συνεχή σύνολα

Συναρτήσεις πληρωμής:
$$\Pi_I(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot [a - b(Q_1+Q_2)] - c \cdot Q_1$$
$$= Q_1 \cdot [a - b(Q_1+Q_2) - c]$$

$$\Pi_{II}(Q_1, Q_2) = Q_2 \cdot [a - b(Q_1+Q_2)] - c \cdot Q_2$$
$$= Q_2 [a - b(Q_1+Q_2) - c]$$

Θα ψάξουμε για ΣΣΙ. Πρώτα, πρέπει να βρούμε βέλτιστες αποκρίσεις.

► Βέλτιστη απόκριση του I στη στρατηγική Q_2 του II $(BR_I(Q_2))$:

$$BR_I(Q_2) = \underset{Q_1}{\operatorname{argmax}} \{ \Pi_I(Q_1, Q_2) \}$$

Θέλουμε να βρούμε που μεγιστοποιείται η $\Pi_I(Q_1, Q_2) = Q_1[a - b(Q_1 + Q_2) - c]$ ως προς Q_1.

$$\frac{\partial \Pi_I(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} = a - b(Q_1 + Q_2) - c + Q_1 \cdot (-b)$$

$$= a - 2bQ_1 - b \cdot Q_2 - c \quad (*)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_I(Q_1, Q_2)}{\partial^2 Q_1} = -2b < 0 \implies$$ $\Pi_I(Q_1, Q_2)$ κοίλη ως προς Q_1

$$(*) = 0 \iff Q_1 = \frac{a - c - b \cdot Q_2}{2b}$$

~► Παίρνουμε περιπτώσεις

(i) Αν $Q_1 \geq 0 \iff Q_2 \leq \frac{a-c}{b}$ τότε $BR_I(Q_2) = \frac{a - c - bQ_2}{2b}$

(ii) Αν $Q_1 < 0 \iff Q_2 > \frac{a-c}{b}$ τότε $BR_I(Q_2) = 0$.

$$BR_I(Q_2) = \begin{cases} \dfrac{a - c - bQ_2}{2b}, & \text{αν } Q_2 \leq \dfrac{a-c}{b} \\[2ex] 0, & \text{αν } Q_2 > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Επειδή οι συναρτήσεις πληρωμής είναι συμμετρικές,

$$BR_{II}(Q_1) = \begin{cases} \dfrac{a-c-bQ_1}{2b} & , \text{ αν } Q_1 \le \dfrac{a-c}{b} \\ 0 & , \text{ αν } Q_1 > \dfrac{a-c}{b} \end{cases}$$

Εύρεση ΣΣΙ

$$(Q_1^*, Q_2^*) \text{ ΣΣΙ } \Longleftrightarrow \begin{cases} Q_1^* = BR_I(Q_2^*) \\ Q_2^* = BR_{II}(Q_1^*) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c-b \cdot Q_2^*}{2b} \\ Q_2^* = \dfrac{a-c-b \cdot Q_1^*}{2b} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q_1^* = \dfrac{a-c-bQ_2^*}{2b} \\ Q_1^* = \dfrac{a-c-2bQ_2^*}{b} \end{cases}$$

Εξισώνουμε $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_1^* = \dfrac{a-c}{3b} \\ Q_2^* = \dfrac{a-c}{3b} \end{array} \right\}$ (αναμενόμενο, αφού το παιχνίδι είναι συμμετρικό)

ΣΣΙ: $\left(\left(\dfrac{a-c}{3b}\right), \left(\dfrac{a-c}{3b}\right) \right)$

Χαρ/κά του συστήματος κάτω από ΣΣΙ

- Κάθε εταιρεία παράγει $Q_i^* = \dfrac{a-c}{3b}$, $i=1,2$.
- Η συνολ. ποσότητα που παράγεται είναι $Q^* = Q_1^* + Q_2^*$
$= 2\dfrac{a-c}{3b}$

• Η τιμή του προϊόντος θα είναι $P^* = a - bQ^* =$

$$= a - \cancel{b}\cdot\frac{2(a-c)}{3\cancel{b}} = \frac{a+2c}{3}$$

• Το κέρδος κάθε εταιρείας θα είναι:

$$Q_i^* \cdot P^* - c\cdot Q_i^* = \frac{a-c}{3b}\cdot\left(\frac{a+2c}{3} - c\right) = \frac{(a-c)}{3b}\cdot\frac{(a-c)}{3}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{9b}$$

(β) Οι εταιρείες συνεργούνται για τις ποσότητες και σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους.

Θέλουν να μεγιστοποιήσουν την:

$$\Pi(Q_1, Q_2) = \Pi_I(Q_1, Q_2) + \Pi_{II}(Q_1, Q_2) =$$

$$= Q_1\left[a - b(Q_1+Q_2) - c\right] + Q_2\left[a - b(Q_1+Q_2) - c\right]$$

$$= \underbrace{(Q_1+Q_2)}_{Q}\left[a - b\cdot\underbrace{(Q_1+Q_2)}_{Q} - c\right]$$

$$\Rightarrow \Pi(Q) = Q\cdot\left[a - b\cdot Q - c\right]$$

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = a - 2bQ - c$$

$$\frac{d^2\Pi(Q)}{d^2Q} = -2b < 0 \qquad \underline{\text{κοίλη}}$$

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = 0 \iff Q = \frac{a-c}{2b} > 0$$

Άρα, $\hat{Q} = \dfrac{a-c}{2b}$

Χαρ/κά του συστήματος κάτω από βέλτιστη λύση & σύγκριση με ΣΣΙ

- Οι ποσότητες που θα φτιάξουν είναι: $\hat{Q_i} = \dfrac{\hat{Q}}{2} = \dfrac{a-c}{4b} < \dfrac{a-c}{3b} = Q_i^*$

- Η τιμή θα είναι $\hat{P} = a - b\cdot\hat{Q} = a - \cancel{b}\cdot\dfrac{a-c}{2\cancel{b}} = \dfrac{a+c}{2} > \dfrac{a+2c}{3} = P^*$

- Το κέρδος της κάθε εταιρίας είναι:

$$\hat{Q_i}\cdot\hat{P} - c\cdot\hat{Q_i} = \hat{Q_i}(\hat{P}-c) = \frac{a-c}{4b}\cdot\left(\frac{a+c}{2}-c\right)$$

$$= \frac{(a-c)^2}{8b} > \frac{(a-c)^2}{9b}$$