ΜΑΘΗΜΑ 3
02/02/2024

Ενότητα 2

~ Θεωρητικό πλαίσιο επίλυσης παιγνίων ~

2.1 Κυρίαρχες στρατηγικές (Κεφ. 3)

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Έστω το σύνολο παικτών $\{1, 2, \dots, N\}$
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i συμβολίζεται με S_i
- Συμβολ. μια στρατηγική του i με s_i.
- Το διάνυσμα $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ ονομάζεται προφίλ στρατηγικών ή στρατηγική κατάσταση.
- Το διάνυσμα $\underline{s}_{-i}$ είναι το διάνυσμα με τις στρατηγικές όλων των παικτών εκτός του i.
- Η πληρωμή του i κάτω από τη στρατ. κατάσταση $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N) = (s_i, \underline{s}_{-i})$ είναι $\boxed{\Pi_i(\underline{s}) = \Pi_i(s_i, \underline{s}_{-i})}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Δίλημμα του φυλακισμένου)

I \ II	(ο)	(δο)
(ο)	(−5, −5)	(0, −10)
(δο)	(−10, 0)	(−1, −1)

- Το "−" σημαίνει κόστος
- Κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πληρωμή του.

Ο παίκτης I : • Αν ο II ακολ. τη στρατηγική (ο) :

$$\underset{-5}{\Pi_1((o),(o))} > \underset{-10}{\Pi_1((\delta o),(o))}$$

• Αν ο II ακολ. τη στρατηγική (δο):

$$\underset{0}{\Pi_1((o),(\delta o))} > \underset{-1}{\Pi_1((\delta o),(\delta o))}$$

Άρα, ο I θα παίζει (ο).

(*) Λύση
((ο), (ο))

Ο παίκτης II : • Αν ο I ακολ. τη στρατηγική (ο):

$$\underset{-5}{\Pi_2((o),(o))} > \underset{-10}{\Pi_2((o),(\delta o))}$$

• Αν ο I ακολ. τη στρατηγική (δο):

$$\underset{0}{\Pi_2((\delta o),(o))} > \underset{-1}{\Pi_2((\delta o),(\delta o))}$$

ο II παίζει (ο)

(*)

Κυρίαρχες / Κυριαρχούμενες στρατηγικές

- Η στρατηγική s_i^* του παίκτη i κυριαρχεί ισχυρά (ή αυστηρά) της στρατηγικής s_i', αν $\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) > \Pi_i(s_i', \underline{s}_{-i}) \quad \forall \ \underline{s}_{-i}$.

Τότε, λέμε ότι η s_i' είναι κυριαρχούμενη (dominated) στρατηγική.
↳ δεν θα την ακολουθούσαμε ποτέ

- Αν η στρατηγική s_i^* κυριαρχεί ισχυρά (ή αυστηρά) κάθε άλλης στρατηγικής του παίκτη i, τότε η s_i^* λέγεται ισχυρά (ή αυστηρά) κυρίαρχη στρατηγική.
↳ εάν ∃ την ακολουθούμε πάντα

- Η στρατηγική s_i^* του παίκτη i κυριαρχεί (ασθενώς) της στρατηγικής s_i' αν $\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) \geq \Pi_i(s_i', \underline{s}_{-i}) \quad \forall \ \underline{s}_{-i}$

<u>και</u>

$\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}) > \Pi_i(s_i', \underline{s}_{-i})$ για τουλ. ένα $\underline{s}_{-i}$.

Τότε λέμε ότι η s_i' είναι (ασθενώς) κυριαρχούμενη στρατηγική

Αν η s_i^* κυριαρχεί (ασθενώς) κάθε άλλης στρατηγικής του i, τότε η s_i^* είναι (ασθενώς) κυρίαρχη.

Παράδειγμα

I \ II	(left)	(right)
(top)	(7,3)	(5,3)
(bottom)	(7,0)	(3,−1)

$\Pi_1((top),(left)) = \Pi_1((bottom),(left))$

$\Pi_1((top),(right)) > \Pi_1((bottom),(right))$

▶ Η (top) είναι ασθενώς κυρίαρχη στρατηγ.

$\Pi_2((top),(left)) = \Pi_2((top),(right))$

$\Pi_2((bottom),(left)) > \Pi_2((bottom),(right))$

▶ Η (left) είναι (ασθενώς) κυρίαρχη στρατηγική.

⇒ Η λύση σε κυρίαρχες στρατηγικές είναι ((top),(left))

2.2 Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση κυριαρχούμενων στρατηγικών (ΕΑΚΣ)

Παράδειγμα

I \ II	(left)	(right)
(up)	(1,1)	~~(0,1)~~
(middle)	~~(0,2)~~	~~(1,0)~~
~~(down)~~	~~(0,−1)~~	~~(0,0)~~

▶ Ελέγχουμε αν ∃ κυρίαρχη για τον Ι ⇝ Δεν υπάρχει.

▶ Για τον ΙΙ ⇝ Δεν υπάρχει

⇒ Δεν έχουμε λύση σε κυρίαρχες

Για τον Ι: Η (down) κυριαρχείται από την (up). Απαλοίφουμε την down.

⊕ με ΕΑΚΣ

Για τον ΙΙ: Η (right) κυριαρχείται από την (left). Απαλοίφουμε την (right)

Για τον Ι: Η (middle) κυριαρχείται από την (up). Απαλοίφουμε (middle) ⊕

Λύση: ((up),(left))

Παράδειγμα: The odd couple

Υπάρχουν 2 συγκάτοικοι: Η Felix και ο Oscar

Κάθε ένας μπορεί να αφιερώσει σε δουλειές 3, 6 ή 9 ώρες.

Αν αφιερώσουν:

$$\begin{cases} \geq 12h \Rightarrow \text{καθαρό} \\ = 9h \Rightarrow \text{υποφερτό} \\ \leq 6h \Rightarrow \text{βρώμικο} \end{cases}$$

Η Felix έχει ωφέλεια

$$\begin{cases} 10, & \text{αν καθαρό} \\ 2, & \text{αν υποφερτό} \\ -10, & \text{αν βρώμικο} \end{cases}$$

Ο Oscar έχει ωφέλεια

$$\begin{cases} 5, & \text{αν καθαρό} \\ 2, & \text{αν υποφερτό} \\ -5, & \text{αν βρώμικο} \end{cases}$$

• Πληρωμή παίκτη = ωφέλεια από κατάσταση σπιτιού − ώρες που αφιέρωσε σε καθαριότητα

$\boxed{\text{Felix} \to I, \ \text{Oscar} \to II}$

I \ II	(3)	(6)	(9)
~~(3)~~	~~(-13,-8)~~	~~(-1,-4)~~	~~(7,-4)~~
(6)	~~(-4,-1)~~	~~(4,-1)~~	~~(4,-4)~~
(9)	(1,2)	(1,-1)	(1,-4)

▶ ελέγχω αν ο I έχει κυρίαρχη → Δεν έχει

▶ ελέγχω αν ο II έχει κυρίαρχη → Δεν έχει

Θα ελέγξω αν ∃ λύση με ΕΑΚΣ.

→ Για τον I: −

→ Για τον II: Η (9) κυριαρχείται από την (6). Απαλοίφουμε την (9)

→ Για τον I: Η (3) κυριαρχείται από την (6). Απαλοίφουμε την (3).

→ Για τον II: Η (6) ″ ″ (3). ″ (6)

→ Για τον I: Η (6) κυριαρχείται από την (9), Απαλοίφουμε την (6).

Λύση με ΕΑΚΣ: ((9),(3)). ∎

Παράδειγμα (Bertrand price competition)

Θεωρούμε ένα δυοπώλιο.

Κάθε εταιρεία επιλέγει τιμή για το προϊόν της: 12, 10 ή 8€.

Η αγορά αποτελείται από 1000 πελάτες.

Αν οι εταιρείες επιλέξουν διαφορετικές τιμές, όλοι θα αγοράσουν από την εταιρεία με τη μικρότερη τιμή.

Αν επιλέξουν ίδιες τιμές, η αγορά θα μοιραστεί.

Η πληρωμή κάθε εταιρείας είναι τα έσοδα που θα εισπράξει από την πώληση των προϊόντων

(σε χιλ. €)

I \ II	(12)	(10)	(8)
(12)	(6,6)	(0,10)	(0,8)
(10)	(10,0)	(5,5)	(0,8)
(8)	(8,0)	(8,0)	(4,4)

Λύση σε κυρίαρχες → Δεν υπάρχει

Ψάχνουμε λύση με ΕΑΚΣ

Για τον I: Η (12) κυριαρχείται από την (10). Απαλοίφουμε την (12).

Για τον II: Η (12) κυριαρχείται από την (10). Απαλ. την (12).

Για τον I: Η (10) κυριαρχείται από την (8). Απαλ. την (10).

Για τον II: Η (10) " από την (8). " " (10).

Λύση: ((8),(8))

Παράδειγμα

I \ II	(a)	(b)
(a)	(0,0)	(0,1)
(b)	(1,0)	(0,0)

Λύση με ΕΑΚΣ

→ Ας ξεκινήσουμε με τον I:

Η (a) κυριαρχείται από (b). Απαλοίφουμε (a).

Για τον II: Δεν υπάρχει κυριαρχούμενη. Είναι αδιάφορος.

→ Ας ξεκινήσουμε με τον II:

Η (a) κυριαρχείται από την (b). Απαλ. (a).

Για τον I: Δεν έχει κυριαρχούμενη.

<u>ΔΕΝ</u> έχουμε λύση με ΕΑΚΣ

→ Αν γίνει ταυτόχρονη απαλοιφή:

- I: Η (a) κυριαρχείται από (b)
- II: Η (a) κυριαρχείται από (b)

... Υπάρχει λύση με κυρίαρχη στρατηγική!

2.3 Σημείο στρατηγικής ισορροπίας (ΣΣΙ)

Nash equilibrium

(Κεφ. 5)

Μία στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική $\underline{s}_{-i}^*$ των άλλων παικτών αν $\Pi_i(s_i^*, \underline{s}_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, \underline{s}_{-i}^*)$ $\forall s_i \in S_i$.

Δηλ. η στρατηγική s_i^* του παίκτη i είναι βέλτιστη απάντηση στην $\underline{s}_{-i}^*$, αν δεδομένου ότι οι άλλοι παίκτες ακολουθούν την $\underline{s}_{-i}$ η πληρωμή του i μεγιστοποιείται όταν ακολουθήσει την s_i^*.

Τότε γράφουμε $s_i^* \in BR_i(\underline{s}_{-i}^*)$

Παράδειγμα Odd Couple

I \ II	(3)	(6)	(9)
(3)	(-13,-8)	(-1,-4)	(7,-4)
(6)	(-4,-1)	(4,-1)	(4,-4)
(9)	(1,2)	(1,-1)	(1,-4)

στρατηγική του II

$BR_I((3)) = \{(9)\}$

$BR_I((6)) = \{(6)\}$

$BR_I((3)) = \{(3)\}$

στρατηγική του I

$BR_{II}((3)) = \{(6),(9)\}$

$BR_{II}((6)) = \{(3),(6)\}$

$BR_{II}((9)) = \{(3)\}$