# Στρατηγικές και Παίγνια
# Διάλεξη 1

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

# Εισαγωγή

- Στο μάθημα Επιχειρησιακή Έρευνα είδαμε προβλήματα στα οποία έπρεπε να βελτιστοποιήσουμε μία συνάρτηση (αντικειμενική συνάρτηση) παίρνοντας κατάλληλες αποφάσεις. Σε αυτά τα προβλήματα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτιόταν μόνο από 'τις δικές μας' αποφάσεις.
- Όμως σε πολλά προβλήματα η ωφέλειά μας εξαρτάται και από τις αποφάσεις των άλλων. Με τέτοια προβλήματα ασχολείται η **Θεωρία Παιγνίων**.
  **Παραδείγματα:**
  - Τιμολόγηση αγαθών και υπηρεσιών
  - Χρηματοδότηση Έρευνας και Ανάπτυξης
  - Ψήφος στις εκλογές

# Ενδιαφέρουσες ερωτήσεις

- Ποιοι είναι οι παίκτες (οντότητες που αποφασίζουν);
- Ποιες είναι οι στρατηγικές (δυνατές αποφάσεις των παικτών);
- Ποια είναι η ωφέλεια κάθε παίκτη ανάλογα με τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν ο ίδιος και οι υπόλοιποι παίκτες;
- Τι θα αποφασίσουν τελικά; Ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν; Ποια είναι η λύση του παιχνιδιού;
- Είναι η λύση μοναδική;
- Είναι το αποτέλεσμα του παιχνιδιού καλό για την κοινωνία; Είναι κοινωνικά βέλτιστο;
- Τι γίνεται αν οι παίκτες αλληλεπιδρούν πάνω από μία φορά;
- Τι γίνεται αν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τα χαρακτηριστικά των παικτών;

# Βιβλιογραφία


- ⋆ P. K. Dutta – Strategies and Games, The MIT Press
- R. S. Gibbons – Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press
- Ε.Φ. Μαγείρου – Παίγνια και Αποφάσεις, Εκδόσεις ΚΡΙΤΙΚΗ

# Περιεχόμενα του μαθήματος

**Ενότητα 1:** Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων: Κεφάλαια 1-2
**Ενότητα 2:** Θεωρητικό Πλαίσιο Διαμόρφωσης Παιγνίου: Κεφάλαια 3-5
**Ενότητα 3:** Στατικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης – Εφαρμογές: Κεφάλαια 6-7
**Ενότητα 4:** Μεικτές Στρατηγικές, Συμμετρικά Παίγνια, και Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος: Κεφάλαια 8-10
**Ενότητα 5:** Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Κεφάλαια 11-13 και 15-16
**Ενότητα 6:** Δυναμικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης: Κεφάλαιο 18
**Ενότητα 7:** Παίγνια Ελλιπούς Πληροφόρησης (Ασύμμετρης Πληροφόρησης): Κεφάλαια 19-20
**Ενότητα 8:** Δημοπρασίες (Αυςτιονς): Κεφάλαιο 23

# Βαθμολογία

**Βαθμός**=
(Τελική βαθμολογία)×0.9+
(Μέσος όρος βαθμολογίας ασκήσεων)×0.1

# Ενότητα 1:
# Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

# 1.1. Αρχική ματιά στις εφαρμογές

(Κεφάλαιο 1)

## Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim$(n, m)$

- Έχουμε 2 στοίβες με ξυλάκια. Η 1η στοίβα έχει $n$ και η 2η στοίβα έχει $m$ ξυλάκια.
- Υπάρχουν 2 παίκτες: ο I και ο II.
- Πρώτα παίζει ο I, μετά ο II, μετά πάλι ο I, κτλ.
- Κάθε παίκτης, όταν έρθει η σειρά του, διαλέγει στοίβα και παίρνει από αυτήν όσα ξυλάκια θέλει.
- Κερδίζει αυτός που θα πάρει το τελευταίο ξυλάκι. Ο χαμένος δίνει 1 στον νικητή.
- Αν $n = m$, το παιχνίδι λέγεται ισορροπημένο, αλλιώς λέγεται μη-ισορροπημένο.

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να βρούμε τη λύση στο ισορροπημένο παιχνίδι και μετά στο μη-ισορροπημένο.

$\mathbf{Nim}(1,1)$

## $\mathbf{Nim}(2,2)$

$\mathbf{Nim}(n, n), n \geq 3$

Μη-ισορροπημένο παιχνίδι:
$\mathbf{Nim}(n, m)$

# Παράδειγμα: Παιχνίδι των Shapley και Shubit

- Υπάρχουν 3 παίκτες: Α, Β και Γ.
- Κάθε παίκτης έχει ένα μπαλόνι και ένα όπλο με το οποίο πυροβολεί τα μπαλόνια των άλλων.
- Ο παίκτης που θα πυροβολήσει προκύπτει με κλήρωση (κίνηση της φύσης).
- Αυτός που θα κληρωθεί επιλέγει ποιο μπαλόνι θα στοχεύσει.
- Αν αστοχήσει, το παιχνίδι ξεκινάει από την αρχή. Αν ευστοχήσει, ο χτυπημένος φεύγει και το παιχνίδι συνεχίζεται με αυτούς που έχουν μείνει.
- Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Α είναι $\alpha$.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Β είναι $\beta$.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Γ είναι $\gamma$.
- Έστω $\alpha > \beta > \gamma$.
- Κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να επιβιώσει.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Ποιά θα είναι η πιθανότητα επιβίωσης κάθε παίκτη τελικά;

# Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου

- 2 ληστές: ο I και ο II.
- Η αστυνομία τους συλλαμβάνει και τους ανακρίνει χωριστά. Τους προτείνει τα εξής:
  - Αν ομολογήσουν και οι δύο, θα πάνε φυλακή 5 χρόνια.
  - Αν δεν ομολογήσει κανένας, θα πάνε φυλακή 1 χρόνο.
  - Αν ομολογήσει μόνο ο ένας, αυτός που ομολόγησε θα απελευθερωθεί και ο άλλος θα πάει φυλακή 10 χρόνια.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Πόσα χρόνια θα μπει ο καθένας στη φυλακή τελικά;

# 1.2. Μαθηματική διατύπωση παιγνίων

(Κεφάλαιο 2)

# Βασικά στοιχεία

- **Ποιος;**
  Παίκτες = στρατηγικές οντότητες που αποφασίζουν.
- **Πότε;**
  Με ποια σειρά αποφασίζουν οι παίκτες.
- **Τι;**
  Στρατηγικές παικτών = οι δυνατές αποφάσεις τους.
- **Πόσο;**
  Η ωφέλεια αν παίξουν συγκεκριμένες στρατηγικές.

# Μορφές παρουσίασης παιγνίου

- **Εκτεταμένη μορφή**
  Σε μορφή δέντρου.
- **Κανονική μορφή**
  Σε μορφή πίνακα.

# Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim$(2,1)$ σε εκτεταμένη μορφή

# Παράδειγμα: Ρώσικη ρουλέτα σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: I και II.
- Αρχικά βάζει ο καθένας 1 Ευρώ.
- Ο παίκτης I έχει 2 επιλογές.
  1η επιλογή: Βάζει άλλο ένα Ευρώ και περνάει στην επόμενη φάση.
  2η επιλογή: Ρίχνει ένα ζάρι. Αν το ζάρι φέρει 1, ο I χάνει και ο II παίρνει τα χρήματα. Αν το ζάρι φέρει 2-6, ο I περνάει στην επόμενη φάση.
- Αν ο I περάσει, παίζει ο II με τον ίδιο τρόπο.
- Αν περάσουν και οι δύο, το παιχνίδι τελειώνει και οι παίκτες μοιράζονται τα χρήματα.

Θέλουμε να διοατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.

# Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου σε εκτεταμένη μορφή

# Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: I και II.
  Παίκτης I: Αντιτορπιλικό.
  Παίκτης II: Υποβρύχιο.
- Αρχικά, ο II κρύβεται στη θέση 1 ή στη θέση II.
- Ο I ψάχνει να βρει τον II εώς 2 φορές.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 1 είναι $\frac{1}{4}$.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 2 είναι $\frac{1}{2}$.
- Ο I έχει δυνατότητα να αλλάξει θέση πριν τη 2η αναζήτηση.
- Αν ο I βρει τον II, ο I κερδίζει μία μονάδα και ο II χάνει μία μονάδα.
  Αν ο I δεν εντοπίσει τον II, κερδίζουν και οι δύο 0 μονάδες.

Θέλουμε να διοατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.