Μάθημα 6
23/02/2024

Ενότητα 4 : Μικτές στρατηγικές,
συμμετρικά παιχνίδια
και παίγνια μηδενικού αθροίσματος

4.1 Μικτές στρατηγικές (Κεφ. 8)

Παράδειγμα

Παίγνιο 2 παικτών: I, II
Κάθε παίκτης επιλέγει heads (h) ή tails (t)
Επιλέγουν ταυτόχρονα.
Ποντάρουν από 1€.
Αν κάνουν ίδια επιλογή, ο I παίρνει τα χρήματα.
Αν κάνουν διαφορετική επιλογή, ο II " " .

(i) Να διατυπωθεί σε κανονική μορφή
(ii) έχει λύση σε κυρίαρχες; με ΕΑΚΣ; ΣΣΙ;

Λύση

(i)

I \ II	(h_2)	(t_2)
(h_1)	$(\overset{*}{1},-1)$	$(-1,\overset{*}{1})$
(t_1)	$(-1,\overset{*}{1})$	$(\overset{*}{1},-1)$

∄ κυρίαρχες στρατηγικές
∄ λύση με ΕΑΚΣ
∄ ΣΣΙ

②

Ιδέα μικτής στρατηγικής

Ο παίκτης I μπορεί να ακολουθήσει την εξής στρατηγική:

Ρίχνω ένα νόμισμα και αν έρθει Κ (πιθ. $\frac{1}{2}$) ακολουθεί τη στρατηγική (h_1).

Αν έρθει Γ (πιθ. $\frac{1}{2}$) ακολουθεί τη στρατηγική (t_1).

Αυτή τη λέμε μικτή στρατηγική και τη συμβολίζουμε $f=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

↑ πιθ. να ακολ. την (h_1) ↑ πιθ. να ακολ. την (t_1)

? • Ποιες οι πληρωμές των παικτών κάτω από τέτοιες στρατηγικές;

⟶ Τώρα έχω αναμενόμενες πληρωμές και συμβολίζουμε με h.

• Αν ο I ακολουθήσει την $f=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο II την (h_2), τότε οι αναμ. πληρωμές θα είναι:

$$h_1(f, (h_2)) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$$

$$h_2(f, (h_2)) = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0$$

• Αν ο I ακολ. την $f=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο II την (t_2) τότε οι αναμ. πληρωμές θα είναι:

$$h_1(f, (t_2)) = \frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 = 0$$

$$h_2(f, (t_2)) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$$

• Αν ο I ακολουθεί την $p=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ο II την $q=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, οι αναμενόμενες πληρωμές είναι:

$$h_I(p,q)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=0$$

<u>β' τρόπος</u>

$$h_I(p,q)=\frac{1}{3}\cdot \underbrace{h_I(p,(t_1))}_{=0}+\frac{2}{3}\cdot \underbrace{h_I(p,(t_2))}_{=0}$$

$$h_{II}(p,q)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-1)$$
$$=0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας παίκτης i με σύνολο στρατηγικών $S_i=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$. Ονομάζουμε μικτή στρατηγική του i μια κατανομή πιθανότητας σε αυτές τις στρατηγικές, δηλ. ένα διάνυσμα $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ με $p_k\geq 0$, $k=1,2,\dots,m$, $\sum_{k=1}^{m}p_k=1$ και $p_k=P$(να ακολ. τη στρατηγική s_k), $k=1,2,\dots,m$

Παρατήρηση: Κάθε στρατηγική $s_k\in S_i$ μπορεί να θεωρηθεί μικτή στρατηγική, $s_k=(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

Οι στρατηγικές $s_i\in S_i$ θα ονομάζονται και <u>καθαρές</u> στρατηγικές.

Γιατί να χρησιμοποιήσουμε μικτές στρατηγικές;

1] Μία μικτή μπορεί να κυριαρχεί απέναντι σε κάποια καθαρή.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το παιχνίδι σε κανονική μορφή:

	I \ II	(L)	(M1)	(M2)	(R)
1/2	(U)	(4,0)	(4,2)	(2,4)	(3,1)
0	(M)	(2,1)	(2,0)	(2,2)	(2,1)
1/2	(D)	(4,2)	(1,4)	(2,0)	(3,1)
	p	$(\frac{5}{2},1)$	$(\frac{5}{2},3)$	(2,2)	(3,1)

Έστω ότι ο I ακολουθεί την $p=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$$h_I=(p,(L))=\frac{1}{2}\cdot 1+0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{5}{2}$$

$$h_{II}(p,(L))=\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Για τον I: Η (M) κυριαρχείται από την p.

Για τον II: Η (L) " " " M_1.

Η (R) " " " M_1.

Για τον I: Η (D) κυριαρχείται από την p

Η (p) " " την U.

Για τον II: Η (M_1) κυριαρχείται από την (M_2).

$$\boxed{\text{Λύση: } ((U),(M_2))}$$

με ΕΑΚΣ

2] Μπορεί να έχουμε ΣΣΙ σε μικτές, ενώ δεν υπάρχει σε καθαρές.

Παράδειγμα

I \ II	(h_2)	(t_2)
(h_1)	$(2^*, -1)$	$(-1, 2^*)$
(t_1)	$(-1, 2^*)$	$(2^*, -1)$

Για να βρούμε ΣΣΙ σε μικτές στρατηγικές

(i) Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του I στη μικτή στρατηγική $q = (q, 1-q)$ του II.

(ii) Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του II στη μικτή στρατηγική $p = (p, 1-p)$ του I.

(iii) Φτιάχνουμε γράφημα με τις βέλτιστες απαντήσεις

(iv) Βρίσκουμε τα ΣΣΙ από το γράφημα.

6

Βρίσκουμε βέλτιστη απάντηση του I στη στρατηγική $q=(q, 1-q)$ του II , $BR_I(q)$:

Αν ο I αποφασίσει την (h1) , η αναμενόμενη πληρωμή του θα είναι: $h_I((h_1),(q)) = q\cdot 2 + (1-q)\cdot(-1) = 3q-1$

Αν ο I αποφασίσει την (t1) , η αναμεν. πληρωμή του θα είναι: $h_I((t_1), q) = q\cdot(-1) + (1-q)\cdot 2 = 3q+2$

- Αν $h_I((h_1),(q)) > h_I((t_1),(q))$

  $\iff 3q-1 > -3q+2$

  $\iff 6q > 3 \iff q > \frac{1}{2}$

Τότε $BR_I(q) = \{(h_1)\} = \{(1,0)\}$

- Αν $h_I((h_1), q) < h_I((t_1), q) \iff 3q-1 < -3q+2$

$\iff q < \frac{1}{2}$

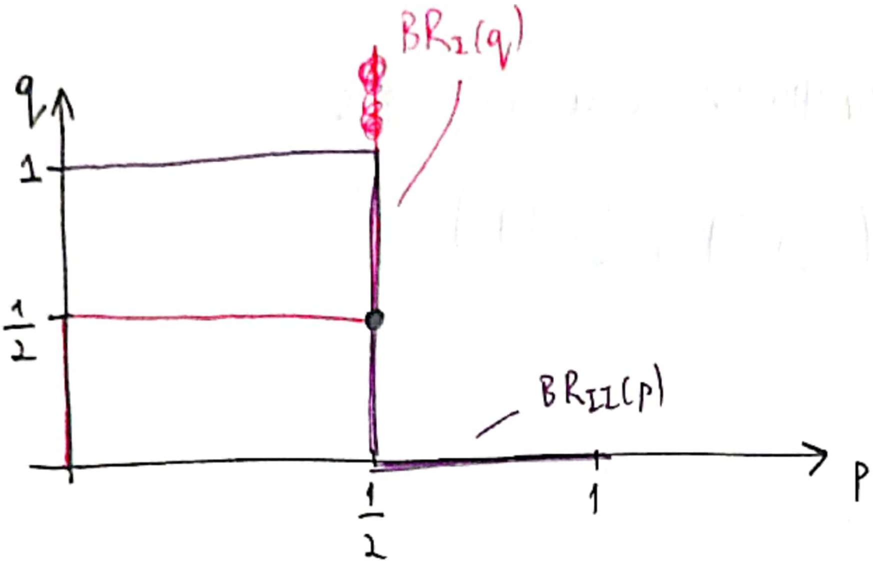
Τότε $BR_I(q) = \{(t_1)\} = \{(0,1)\}$

- Αν $h_I((h_1), q) = h_I((t_1), q) \iff 3q-1 = -3q+2$

$\iff 6q = 3 \iff q = \frac{1}{2}$

Τότε , $BR_I(q) = \{(p, 1-p) , p \in [0,1]\}$

Άρα, $\underline{BR_I(q)} = \begin{cases} (1,0) & , \text{ αν } q > \frac{1}{2} \\ (0,1) & , \text{ αν } q < \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0,1] & , \text{ αν } q = \frac{1}{2} \end{cases}$



Βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση του ΙΙ στη στρατηγική $p = (p, 1-p)$ του Ι, $BR_{II}(p)$.

Αν ο ΙΙ ακολουθήσει την (h_2) θα έχει αναμ. πληρωμή

$h_{II}(p, (h_2)) = p \cdot (-1) + (1-p) \cdot 2 = 2 - 3p$

Αν ο ΙΙ ακολ. την (t_2) θα έχει αναμεν. πληρωμή:

$$h_{II}(p, (t_2)) > 2p + (1-p)(-1)$$
$$= 3p - 1$$

- Αν $h_{II}(p, (h_2)) > h_{II}(p, (t_2)) \Longleftrightarrow 2 - 3p > 3p - 1 \Longleftrightarrow p < \frac{1}{2}$

  Τότε $BR_{II}(p) = \{(h_2)\} = \{(1,0)\}$

- Αν $h_{II}(p, (h_2)) < h_{II}(p, (t_2)) \Longleftrightarrow p > \frac{1}{2}$

  τότε $BR_{II}(p) = \{(t_2)\} = \{(0,1)\}$

- Αν $h_{II}(p, (h_2)) = h_{II}(p, (t_2)) \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$

  Τότε $BR_{II}(p) = \{(q, 1-q) : q \in [0,1]\}$

Άρα,

$$BR_{II}(p) = \begin{cases} \{(1,0)\} & , p < \frac{1}{2} \\ \{(0,1)\} & , p > \frac{1}{2} \\ \{(q,1-q) , q \in [0,1]\} & , p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το σημείο τομής των γραφημάτων είναι το ΣΣΙ.

Εδώ: ΣΣΙ : $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$