Μάθημα 05

3.2. Tragedy of commons
(Κεφάλαιο 7)

Περιγραφή προβλήματος

- Υπάρχει ένας πόρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από όλους. Διαθεσιμότητα πόρου y μονάδες, $y>0$.
- Ο πόρος είναι περιορισμένος και υπάρχει περίπτωση να εξαντληθεί λόγω υπερκατανάλωσης.
- Όσο αυξάνεται η κατανάλωση σε μια περίοδο, τόσο μειώνεται η διαθεσιμότητα στο μέλλον.
- N παίκτες, πρόβλημα 2 περιόδων.
- Στην 1η περίοδο κάθε παίκτης αποφασίζει πόσες μονάδες αγαθού θα ζητήσει. Άρα,
  $S_i = \{ c_i : c_i \in [0, y] \}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.
- Αν $c_1 + c_2 + \cdots + c_n > y$, ο καθένας θα πάρει $\frac{y}{n}$ και η διαθεσιμότητα θα γίνει 0. Άρα, στη 2η περίοδο δε θα πάρουν τίποτα.
- Αν $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \leq y$, ο καθένας θα πάρει ότι ζήτησε. Στην αρχή της 2ης περιόδου η διαθεσιμότητα θα είναι $y - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$ και θα μοιραστεί στους παίκτες.
- Η συνάρτηση ωφέλειας κάθε παίκτη είναι λογαριθμική.

2 παίκτες - ατομική ωφέλεια

Παιχνίδι 2 παικτών, θέλουμε τα Σ.Σ.Ι.

Περιγραφή παιχνιδιού

Παίκτες: I και II

Στρατηγικές: $S_I = \{ c_1 : c_1 \in [0, y] \}$
$S_{II} = \{ c_2 : c_2 \in [0, y] \}$

Πληρωμές:

$$\Pi_I(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , c_1 + c_2 \le y \\ \log \dfrac{y}{2} + \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \log x}_{= -\infty} & , c_1 + c_2 > y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_I(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , 0 < c_1 < y - c_2 \\ -\infty & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ομοίως,

$$\Pi_{II}(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_2 + \log \dfrac{y-(c_1+c_2)}{2} & , 0 < c_2 < y - c_1 \\ -\infty & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογισμός βέλτιστων αποκρίσεων

Βέλτιστη απόκριση του I στη στρατηγική c_2 του II:
$BR_I(c_2)$

$$BR_I(c_2) = \underset{c_1 \in S_I}{\arg\max} \{\Pi_I(c_1, c_2)\} =$$

$$= \underset{c_1 \in (0, y-c_2)}{\arg\max} \{\Pi_I(c_1, c_2)\}$$

$$\Pi_I(c_1, c_2) = \log c_1 + \log \frac{y-(c_1+c_2)}{2}, \quad c_1 \in (0, y-c_2)$$

Άρα
$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}} \cdot \frac{1}{2}(-1) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-(c_1+c_2)}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_I(c_1, c_2)}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(y-(c_1+c_2))^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Pi_I(c_1, c_2)$ κοίλη ως προς $c_1 \in (0, y-c_2)$.

$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-(c_1+c_2)} = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = y - c_1 - c_2 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{y-c_2}{2}$$

Άρα, $BR_I(c_2) = \frac{y-c_2}{2}$

Ομοίως, λόγω συμμετρίας,

$$BR_{II}(c_1) = \frac{y - c_1}{2}$$

ΣΣΙ.

(c_1^*, c_2^*) ΣΣΙ $\iff \begin{cases} c_1^* \in BR_I(c_2^*) \\ c_2^* \in BR_{II}(c_1^*) \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} c_1^* = \dfrac{y - c_2^*}{2} \\ c_2^* = \dfrac{y - c_1^*}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2^* = y - 2c_1^* \\ c_2^* = \dfrac{y - c_1^*}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} c_2^* = y - 2c_1^* \\ y - 2c_1^* = \dfrac{y - c_1^*}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2^* = y - 2c_1^* \\ c_1^* = \dfrac{y}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2^* = y/3 \\ c_1^* = y/3 \end{cases}$$

Άρα, το ΣΣΙ είναι το

$$(c_1^*, c_2^*) = (y/3, y/3).$$

Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από ΣΣΙ

- Στην πρώτη περίοδο, κάθε παίκτης θα καταναλώσει $c_1^* = c_2^* = y/3$
- Η διαθέσιμη ποσότητα στη δεύτερη περίοδο θα είναι $y - y/3 - y/3 = y/3$.

  Άρα, κάθε παίκτης στη δεύτερη περίοδο θα καταναλώσει $\frac{y}{6}$.
- Η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι

  $$\log\frac{y}{3} + \log\frac{y}{6} = \log\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{6} = \log\frac{y^2}{18}$$

2 παίκτες - κοινωνική βελτιστοποίηση

Ίδιο πρόβλημα με πριν, αλλά τώρα οι παίκτες συνεργάζονται με σκοπό τη μεγιστοποίηση της συνολικής πληρωμής.

Συνάρτηση πληρωμής

$$\pi(c_1, c_2) = \pi_I(c_1, c_2) + \pi_{II}(c_1, c_2)$$

$$= \begin{cases} \log c_1 + \log c_2 + 2\log \frac{y-(c_1+c_2)}{2} & , c_1 + c_2 \leq y \\ \log \frac{y}{2} + \log \frac{y}{2} + \underbrace{2\lim_{x \to 0^+} x}_{=-\infty} & , c_1 + c_2 > y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi(c_1, c_2) = \begin{cases} \log c_1 + \log c_2 + 2\log \frac{y-(c_1+c_2)}{2} & , \begin{array}{l} c_1 > 0, c_2 > 0 \\ c_1 + c_2 < y, \end{array} \\ -\infty & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εύρεση κοινωνικά βέλτιστης στρατηγικής

$$\begin{array}{ll} \max & \pi(c_1, c_2) \\ \text{υπό} & c_1 + c_2 < y \\ & c_1 > 0 \\ & c_2 > 0 \end{array}$$

$$\nabla \pi(c_1, c_2) = \left(\frac{1}{c_1} + 2\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{c_2} + 2\frac{1}{\frac{y-(c_1+c_2)}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}, \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)} \right)$$

$$H\pi(c_1,c_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_1^2} - \frac{2}{(y-(c_1+c_2))^2} & -\frac{2}{(y-(c_1+c_2))^2} \\ -\frac{2}{(y-(c_1+c_2))^2} & -\frac{1}{c_2^2} - \frac{2}{(y-(c_1+c_2))^2} \end{bmatrix}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο $-H\pi(c_1,c_2)$ είναι θετικά ορισμένος. Άρα ο $H\pi(c_1,c_2)$ είναι αρνητικά ορισμένος και η $\pi(c_1,c_2)$ είναι κοίλη. Οπότε, αν βρω τοπικό μέγιστο, θα είναι και ολικό μέγιστο.

$$\nabla\pi(c_1,c_2) = (0,0) \iff$$

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}, \frac{1}{c_2} - \frac{2}{y-(c_1+c_2)}\right) = (0,0) \iff$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{2}{y-(c_1+c_2)} \\ \frac{1}{c_2} = \frac{2}{y-(c_1+c_2)} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{y-c_2}{3} \\ c_1 = y-3c_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} c_1 = y-3c_2 \\ \frac{y-c_2}{3} = y-3c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = y-3c_2 \\ c_2 = \frac{y}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{y}{4} \\ c_2 = \frac{y}{4} \end{cases}$$

Άρα, η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι $(\hat{c}_1, \hat{c}_2) = \left(\frac{y}{4}, \frac{y}{4}\right)$

Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από κοινωνικό βέλτιστο

- Στην πρώτη περίοδο, κάθε παίκτης θα καταναλώσει
  $$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = y/4 < y/3 = c_1^* = c_2^*$$
- Η διαθέσιμη ποσότητα στη δεύτερη περίοδο θα είναι
  $$y - y/4 - y/4 = y/2.$$
  Άρα, κάθε παίκτης στη δεύτερη περίοδο θα καταναλώσει $\frac{y}{4} > \frac{y}{6}$
- Η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι
  $$\log\frac{y}{4} + \log\frac{y}{4} = \log\frac{y}{4}\cdot\frac{y}{4} = \log\frac{y^2}{16} > \log\frac{y^2}{18}$$

N παίκτες - Ατομική βελτιστοποίηση

Ίδιο παιχνίδι αλλά με N παίκτες.
Επειδή το παιχνίδι είναι συμμετρικό θα ψάξουμε συμμετρικά ΣΣΙ.

$$(c, c, \dots, c) \text{ ΣΣΙ} \iff c \in BR_1(\underbrace{c, c, \dots, c}_{\text{στρατηγική των } N-1})$$

Συνάρτηση πληρωμής του 1

$$\pi_1(c_1, c, c, \dots, c) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y - [(N-1)c + c_1]}{N}, & \text{αν } c_1 + (N-1)c \le y \\ \log\dfrac{y}{N} + (-\infty), & \text{αν } c_1 + (N-1)c > y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Pi_I(c_1, c, \ldots, c) = \begin{cases} \log c_1 + \log \dfrac{y-[(N-1)c+c_1]}{N}, & 0 < c_1 < y-(N-1)c \\ -\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Βέλτιστη απόκριση του I στην $(c, c, \ldots, c)$

Θέλουμε

$$BR_I(c,c,\ldots,c) = \underset{c_1 \in S_I}{\arg\max} \{\Pi_I(c_1, c, c, \ldots, c)\}$$

$$= \underset{c_1 \in [0, y-c_2]}{\arg\max} \{\Pi_I(c_1, c, c, \ldots, c)\}$$

$$\Pi_I(c_1, c, c, \ldots, c) = \log c_1 + \log \frac{y-[(N-1)c+c_1]}{2}, \quad 0 < c_1 < y-(N-1)c$$

$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c, \ldots, c)}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{\frac{y-[(N-1)c+c_1]}{2}} \cdot \frac{1}{2}(-1) =$$

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{y-[(N-1)c+c_1]}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_I(c_1, c, \ldots, c)}{\partial c_1^2} = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(y-[(N-1)c+c_1])^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Pi_I(c_1, c, c, \ldots, c)$ κοίλη ως προς $c_1 \in (0, y-(N-1)c)$

$$\frac{\partial \Pi_I(c_1, c, \ldots, c)}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{y-(N-1)c}{2}.$$

Εύρεση ΣΣΙ

$(c, c, \dots, c)$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow$ $c \in BR_i(c, c, \dots, c) \Leftrightarrow$

$$c = \frac{y - (N-1)c}{2} \Leftrightarrow$$

$$2c = y - (N-1)c \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{y}{N+1}$$

Άρα, ΣΣΙ

$$(c_1^*, c_2^*, \dots, c_N^*) = \left(\frac{y}{N+1}, \frac{y}{N+1}, \dots, \frac{y}{N+1}\right)$$

Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από ΣΣΙ.

- Στην πρώτη περίοδο, κάθε παίκτης θα καταναλώσει $c_i^* = y/_{N+1}$, $i = 1, 2, \dots, N$
- Η διαθέσιμη ποσότητα στη δεύτερη περίοδο θα είναι $y - N\frac{y}{N+1} = \frac{y}{N+1}$

  Άρα, κάθε παίκτης στη δεύτερη περίοδο θα καταναλώσει $\frac{y}{N(N+1)}$
- Η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι
  $\log\frac{y}{N+1} + \log\frac{y}{N(N+1)} = \log\frac{y}{N}\frac{y}{N(N+1)} = \log\frac{y^2}{N(N+1)^2}$

N παίκτες - κοινωνική βελτιστοποίηση

Ίδιο πρόβλημα με πριν, αλλά τώρα οι N παίκτες συνεργάζονται με σκοπό τη μεγιστοποίηση της συνολικής πληρωμής.

Θα ψάξουμε πάλι συμμετρική στρατηγική. $(\hat{c}, \hat{c}, \dots, \hat{c})$

Συνάρτηση πληρωμής

$$\pi(c, c, c, \dots, c) = N \cdot \pi_{\varepsilon}(c, c, \dots, c)$$

$$= \begin{cases} N\log c + N\log \dfrac{y-Nc}{N}, & Nc \le y \\ N\log \dfrac{y}{N} + (-\infty), & Nc > y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\pi(c, c, \dots, c)}_{\varphi(c)} = \begin{cases} N\log c + N\log \dfrac{y-Nc}{N}, & 0 < c < \dfrac{y}{N} \\ -\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εύρεση κοινωνικά βέλτιστης στρατηγικής

Θέλουμε $\max \varphi(c)$

υπό $0 < c < \dfrac{y}{N}$

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial c} = N\frac{1}{c} + N\frac{1}{\frac{y-Nc}{N}} \cdot (-1) = \frac{N}{c} - \frac{N^2}{y-Nc}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(c)}{\partial c^2} = -\frac{N}{c^2} + \frac{N^2}{(y-Nc)^2}(-N) = -\frac{N}{c^2} - \frac{N^3}{(y-Nc)^2} < 0$$

Άρα $\varphi(c)$ κοίλη στο $0 < c < Nc$.

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial c} = 0 \iff \frac{N}{c} - \frac{N^2}{y - Nc} = 0 \iff$$

$$Ny - N^2 c = N^2 c \iff$$

$$Ny = 2N^2 c \iff$$

$$c = \frac{y}{2N}$$

Άρα $\hat{c} = \frac{y}{2N}$

<u>Χαρακτηριστικά συστήματος κάτω από κοινωνικό βέλτιστο</u>

- Στην πρώτη περίοδο, κάθε παίκτης θα καταναλώσει
  $\hat{c} = \frac{y}{2N} < \frac{y}{N+1} = c_i^*$
- Η διαθέσιμη ποσότητα στη δεύτερη περίοδο θα είναι
  $y - N\cdot\hat{c} = y - N\cdot\frac{y}{2N} = \frac{y}{2}$

  Άρα, κάθε παίκτης στη δεύτερη περίοδο θα καταναλώσει $\frac{y}{2N} > \frac{y}{N(N+1)}$
- Η πληρωμή κάθε παίκτη θα είναι
  $\log\frac{y}{2N} + \log\frac{y}{2N} = \log\frac{y}{2N}\cdot\frac{y}{2N} = \log\frac{y^2}{4N^2} > \log\frac{y^2}{N\cdot(N+1)^2}$