Στρατηγικές και Παίγνια
Διάλεξη 1

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Εισαγωγή

- Στο μάθημα Επιχειρησιακή Έρευνα είδαμε προβλήματα στα οποία έπρεπε να βελτιστοποιήσουμε μία συνάρτηση (αντικειμενική συνάρτηση) παίρνοντας κατάλληλες αποφάσεις. Σε αυτά τα προβλήματα η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτιόταν μόνο από 'τις δικές μας' αποφάσεις.
- Όμως σε πολλά προβλήματα η ωφέλειά μας εξαρτάται και από τις αποφάσεις των άλλων. Με τέτοια προβλήματα ασχολείται η **Θεωρία Παιγνίων**.
  Παραδείγματα:
  - Τιμολόγηση αγαθών και υπηρεσιών
  - Χρηματοδότηση Έρευνας και Ανάπτυξης
  - Ψήφος στις εκλογές

Ενδιαφέρουσες ερωτήσεις

- Ποιοι είναι οι παίκτες (οντότητες που αποφασίζουν);
- Ποιες είναι οι στρατηγικές (δυνατές αποφάσεις των παικτών);
- Ποια είναι η ωφέλεια κάθε παίκτη ανάλογα με τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν ο ίδιος και οι υπόλοιποι παίκτες;
- Τι θα αποφασίσουν τελικά; Ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν; Ποια είναι η λύση του παιχνιδιού;
- Είναι η λύση μοναδική;
- Είναι το αποτέλεσμα του παιχνιδιού καλό για την κοινωνία; Είναι κοινωνικά βέλτιστο;
- Τι γίνεται αν οι παίκτες αλληλεπιδρούν πάνω από μία φορά;
- Τι γίνεται αν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τα χαρακτηριστικά των παικτών;

Βιβλιογραφία

- ⋆ P. K. Dutta – Strategies and Games, The MIT Press
- R. S. Gibbons – Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press
- Ε.Φ. Μαγείρου – Παίγνια και Αποφάσεις, Εκδόσεις ΚΡΙΤΙΚΗ

Περιεχόμενα του μαθήματος

Ενότητα 1: Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων: Κεφάλαια 1-2
Ενότητα 2: Θεωρητικό Πλαίσιο Διαμόρφωσης Παιγνίου: Κεφάλαια 3-5
Ενότητα 3: Στατικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης – Εφαρμογές: Κεφάλαια 6-7
Ενότητα 4: Μεικτές Στρατηγικές, Συμμετρικά Παίγνια, και Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος: Κεφάλαια 8-10
Ενότητα 5: Παίγνια σε Εκτεταμένη Μορφή: Κεφάλαια 11-13 και 15-16
Ενότητα 6: Δυναμικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης: Κεφάλαιο 18
Ενότητα 7: Παίγνια Ελλιπούς Πληροφόρησης (Ασύμμετρης Πληροφόρησης): Κεφάλαια 19-20
Ενότητα 8: Δημοπρασίες (Αυςτιονς): Κεφάλαιο 23

Βαθμολογία

Βαθμός=
(Τελική βαθμολογία)×0.9+
(Μέσος όρος βαθμολογίας ασκήσεων)×0.1

Ενότητα 1:
Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

1.1. Αρχική ματιά στις εφαρμογές

(Κεφάλαιο 1)

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(n, m)

- Έχουμε 2 στοίβες με ξυλάκια. Η 1η στοίβα έχει n και η 2η στοίβα έχει m ξυλάκια.
- Υπάρχουν 2 παίκτες: ο I και ο II.
- Πρώτα παίζει ο I, μετά ο II, μετά πάλι ο I, κτλ.
- Κάθε παίκτης, όταν έρθει η σειρά του, διαλέγει στοίβα και παίρνει από αυτήν όσα ξυλάκια θέλει.
- Κερδίζει αυτός που θα πάρει το τελευταίο ξυλάκι. Ο χαμένος δίνει 1 στον νικητή.
- Αν $n = m$, το παιχνίδι λέγεται ισορροπημένο, αλλιώς λέγεται μη-ισορροπημένο.

Θα προσπαθήσουμε πρώτα να βρούμε τη λύση στο ισορροπημένο παιχνίδι και μετά στο μη-ισορροπημένο.

Nim$(1, 1)$

$\boxed{}$ $\boxed{}$

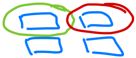
Ξεκινάει ο παίκτης Ι.
Θα πάρει ένα ξυλάκι από μία στοίβα.
Μετά παίζει ο παίκτης ΙΙ.
Παίρνει το ξυλάκι από την άλλη στοίβα και κερδίζει
1 ε

Άρα, στο Nim(1,1) αλλά και σε οποιοδήποτε παιχνίδι οδηγηθεί στο Nim(1,1), ο παίκτης που παίρνει πρώτος χάνει.

Nim(2, 2)

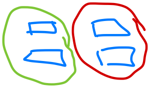
Ξεκινάει ο Ι.

- Αν πάρει 1 ξυλάκι,



ο ΙΙ θα πάρει ένα ξυλάκι από την άλλη στοίβα για να οδηγήσει το παιχνίδι στο Nim(1,1) και να κερδίσει.

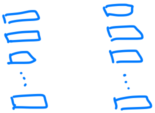
- Αν πάρει 2 ξυλάκια



ο ΙΙ θα πάρει τα 2 ξυλάκια από την άλλη στοίβα και θα νικήσει.

Στο Nim(2,2) θα χάσει ο Ι (που ξεκινάει πρώτος)
Και σε οποιοδήποτε παιχνίδι καταλήγει στο Nim(2,2) θα χάσει ο παίκτης που παίζει πρώτος.

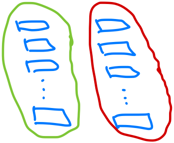
$\mathbf{Nim}(n,n), n \geq 3$



Παίζει ο παίκτης Ι.

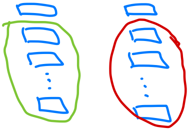
- Αν ο Ι τραβήξει n ξυλάκια,

  ο ΙΙ θα πάρει όλα τα ξυλάκια από την άλλη στοίβα και θα κερδίσει.



- Αν ο Ι πάρει n−1 ξυλάκια,

  ο ΙΙ θα πάρει n−1 από την άλλη στοίβα, θα οδηγήσει το παιχνίδι στο Nim(1,1) και θα κερδίσει.



Γενικά, όσα ξυλάκια πάρει ο Ι, τόσα ξυλάκια θα πάρει ο ΙΙ από την άλλη στοίβα για να οδηγηθούν σε ισορροπημένο παιχνίδι και να χάσει ο Ι

Μη-ισορροπημένο παιχνίδι: **Nim**(n, m)

Nim (2,1)

Ξεκινάει ο Ι. Θα πάρει 1 ξυλάκι από την αριστερή στοίβα για να οδηγήσει το παιχνίδι στο Nim(1,1) στο οποίο σειρά έχει ο ΙΙ. Άρα ο ΙΙ θα χάσει.

Γενικά, στο Nim(n,m) με $n>m$, ο Ι θα τραβήξει $n-m$ ξυλάκια και θα οδηγήσει το παιχνίδι σε ισορροπία, δηλαδή στο Nim(m,m). Ο παίκτης ΙΙ που έχει σειρά και είναι ο πρώτος που θα παίξει στο ισορροπημένο πλέον παιχνίδι, θα χάσει.

Άρα, στο Nim(n,m), χάνει ο παίκτης που παίζει δεύτερος.

Παράδειγμα: Παιχνίδι των Shapley και Shubit

- Υπάρχουν 3 παίκτες: Α, Β και Γ.
- Κάθε παίκτης έχει ένα μπαλόνι και ένα όπλο με το οποίο πυροβολεί τα μπαλόνια των άλλων.
- Ο παίκτης που θα πυροβολήσει προκύπτει με κλήρωση (κίνηση της φύσης).
- Αυτός που θα κληρωθεί επιλέγει ποιο μπαλόνι θα στοχεύσει.
- Αν αστοχήσει, το παιχνίδι ξεκινάει από την αρχή. Αν ευστοχήσει, ο χτυπημένος φεύγει και το παιχνίδι συνεχίζεται με αυτούς που έχουν μείνει.
- Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Α είναι α.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Β είναι β.
  Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο ο Γ είναι γ.
- Έστω $\alpha > \beta > \gamma$.
- Κάθε παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να επιβιώσει.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Ποιά θα είναι η πιθανότητα επιβίωσης κάθε παίκτη τελικά;

Έστω T: το αρχικό παιχνίδι των 3 παικτών

T_{AB}: το υποπαιχνίδι των A και B

$T_{A\Gamma}$: » » » A και Γ

$T_{B\Gamma}$: » » » B και Γ

T_{AB} Αρχικά θα γίνει κλήρωση.
Ο παίκτης που θα κληρωθεί θα χτυπήσει τον άλλον.

P_{AB}: πιθανότητα να επιβιώσει ο A στο υποπαιχνίδι T_{AB}

P_{BA}: πιθανότητα να επιβιώσει ο B στο T_{AB}

$$P_{AB} = \frac{1}{2}\cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2}(1-a)\cdot P_{AB} + \frac{1}{2}\cdot b \cdot 0 + \frac{1}{2}(1-b)P_{AB}$$

$$\Rightarrow 2P_{AB} - (1-a)P_{AB} - (1-b)P_{AB} = a \Rightarrow$$

$$(a+b)P_{AB} = a \Rightarrow P_{AB} = \frac{a}{a+b}, \text{ τότε } P_{BA} = \frac{b}{a+b}.$$

Αντίστοιχα,

$T_{A\Gamma}$ $\quad P_{A\Gamma} = \frac{a}{a+\gamma}$, $P_{\Gamma A} = \frac{\gamma}{a+\gamma}$

$T_{B\Gamma}$ $\quad P_{B\Gamma} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}$, $P_{\Gamma B} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$

Στο αρχικό παιχνίδι:

T Θα κληρωθεί αρχικά ένας παίκτης.

Έστω ο κληρώνεται ο A. Ο A σκέφτεται:

- Η πιθανότητα ευστοχίας είναι η ίδια όποιον και να διαλέξω.
- Αν αστοχήσω, το παιχνίδι ξεκινάει από την αρχή.
- Αν ευστοχήσω, αυτός που σημαδεύω θα φύγει και θα μείνει ο άλλος.

έχουμε $P_{AB} < P_{A\Gamma}$

$$\frac{a}{a+\beta} < \frac{a}{a+\gamma}$$

Επειδή $p_{A\Gamma} > p_{AB}$, θα προτιμήσει σε περίπτωση εύστοχίας να παίξει με τον Γ. Άρα, θα προτιμήσει να στοχεύσει τον Β αν κληρωθεί.

Το ίδιο θα κάνουν και άλλοι.

Όποιος κληρωθεί στο Τ, στοχεύει το πιο εύστοχο αντίπαλο.

p_A: πιθανότητα να επιβιώσει ο Α στο Τ.

Υπολογισμός p_A, p_B, p_Γ

$$p_A = \frac{1}{3}\cdot \alpha \overbrace{p_{A\Gamma}}^{=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \frac{1}{3}(1-\alpha)\, p_A + \frac{1}{3}\beta\cdot 0 + \frac{1}{3}(1-\beta)\, p_A$$

$$+ \frac{1}{3}\gamma\cdot 0 + \frac{1}{3}(1-\gamma)\, p_A \Rightarrow$$

$$3p_A - (1-\alpha)p_A - (1-\beta)p_A - (1-\gamma)p_A = \frac{\alpha^2}{\alpha+\gamma} \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)p_A = \frac{\alpha^2}{\alpha+\gamma} \Rightarrow p_A = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$\boxed{\text{Παράδοξο!}}$

Αντίστοιχα, $p_B = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $p_\Gamma = \frac{\gamma(2\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

Υπάρχει μεγάλο εύρος τιμών με $p_A < p_B < p_\Gamma$

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου

- 2 ληστές: ο I και ο II.
- Η αστυνομία τους συλλαμβάνει και τους ανακρίνει χωριστά. Τους προτείνει τα εξής:
  - Αν ομολογήσουν και οι δύο, θα πάνε φυλακή 5 χρόνια.
  - Αν δεν ομολογήσει κανένας, θα πάνε φυλακή 1 χρόνο.
  - Αν ομολογήσει μόνο ο ένας, αυτός που ομολόγησε θα απελευθερωθεί και ο άλλος θα πάει φυλακή 10 χρόνια.

Τι θα επιλέξουν να κάνουν οι παίκτες; Πόσα χρόνια θα μπει ο καθένας στη φυλακή τελικά;

Ι \ ΙΙ	Ο	Δ.Ο
Ο	(5,5)	(0,10)
Δ.Ο	(10,0)	(1,1)

Για τον παίκτη Ι, σκεφτόμαστε:

Αν ο ΙΙ ομολογήσει, τον Ι τον συμφέρει να ομολογήσει

Αν ο ΙΙ δεν ομολογήσει, τον Ι τον συμφέρει να ομολογήσει

Ο Ι θα ομολογήσει.

Αντίστοιχα, για τον ΙΙ:

Αν ο Ι ομολογήσει, τον ΙΙ τον συμφέρει να ομολογήσει.

Αν ο Ι δεν ομολογήσει, τον ΙΙ τον συμφέρει να ομολογήσει.

Ο ΙΙ θα ομολογήσει. Τελικά, ομολογούν και οι 2 και φυλακίζονται για 5 χρόνια.

1.2. Μαθηματική διατύπωση παιγνίων

(Κεφάλαιο 2)

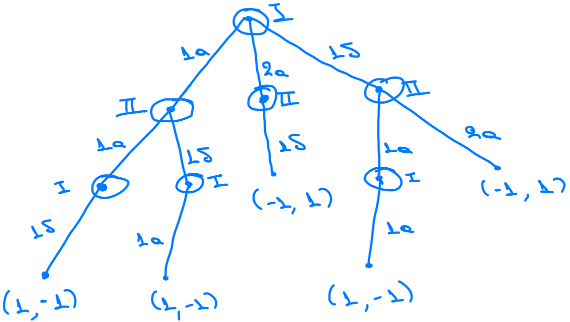
Βασικά στοιχεία

- **Ποιος;**
  Παίκτες = στρατηγικές οντότητες που αποφασίζουν.
- **Πότε;**
  Με ποια σειρά αποφασίζουν οι παίκτες.
- **Τι;**
  Στρατηγικές παικτών = οι δυνατές αποφάσεις τους.
- **Πόσο;**
  Η ωφέλεια αν παίξουν συγκεκριμένες στρατηγικές.

Μορφές παρουσίασης παιγνίου

- **Εκτεταμένη μορφή**
  Σε μορφή δέντρου.
- **Κανονική μορφή**
  Σε μορφή πίνακα.

Παράδειγμα: Παιχνίδι Nim(2, 1) σε εκτεταμένη μορφή

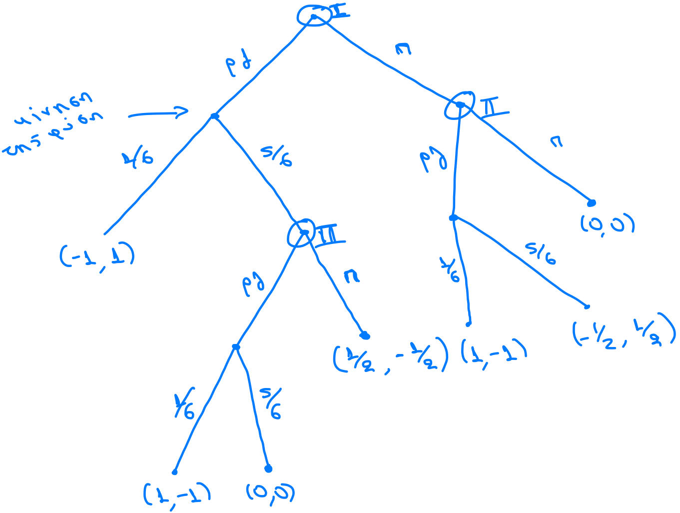


- Στις κορυφές που αποφασίζει κάποιος παίκτης, βάζουμε το όνομά του.
- Σε κάθε ακμή αναγράφουμε την αντίστοιχη στρατηγική
- Στις τερματικές κορυφές βάζουμε τις πληρωμές

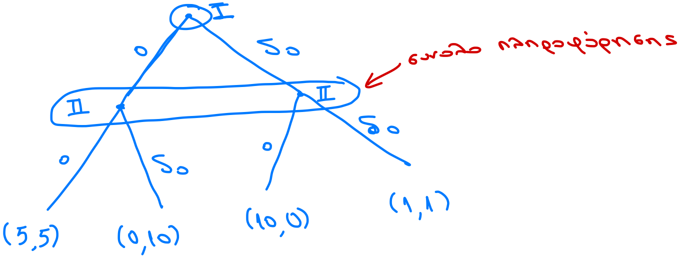
Παράδειγμα: Ρώσικη ρουλέτα σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: Ι και ΙΙ.
- Αρχικά βάζει ο καθένας 1 Ευρώ.
- Ο παίκτης Ι έχει 2 επιλογές.
  1η επιλογή: Βάζει άλλο ένα Ευρώ και περνάει στην επόμενη φάση.
  2η επιλογή: Ρίχνει ένα ζάρι. Αν το ζάρι φέρει 1, ο Ι χάνει και ο ΙΙ παίρνει τα χρήματα. Αν το ζάρι φέρει 2-6, ο Ι περνάει στην επόμενη φάση.
- Αν ο Ι περάσει, παίζει ο ΙΙ με τον ίδιο τρόπο.
- Αν περάσουν και οι δύο, το παιχνίδι τελειώνει και οι παίκτες μοιράζονται τα χρήματα.

Θέλουμε να διοατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.


I
π
κίνηση της φύσης
1/6
5/6
(-1, 1)
II
π
1/6
5/6
(1, -1)
(0, 0)
(1/2, -1/2)
(1, -1)
(-1/2, 1/2)
(0, 0)

Παράδειγμα: Το δίλημμα του φυλακισμένου σε εκτεταμένη μορφή

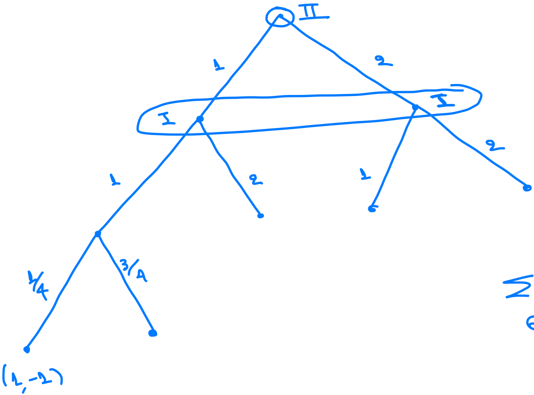


Σύνολο πληροφόρησης: το υποσύνολο των κορυφών στις οποίες αποφασίζει ο ίδιος παίκτης και έχει ακριβώς την ίδια πληροφορία πριν πάρει την απόφασή του.

Παράδειγμα: Παιχνίδι αναζήτησης σε εκτεταμένη μορφή

- Υπάρχουν 2 παίκτες: Ι και ΙΙ.
  Παίκτης Ι: Αντιτορπιλικό.
  Παίκτης ΙΙ: Υποβρύχιο.
- Αρχικά, ο ΙΙ κρύβεται στη θέση 1 ή στη θέση ~~ΙΙ~~. 2
- Ο Ι ψάχνει να βρει τον ΙΙ εώς 2 φορές.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 1 είναι $\frac{1}{4}$.
  Η πιθανότητα εντοπισμού στη θέση 2 είναι $\frac{1}{2}$.
- Ο Ι έχει δυνατότητα να αλλάξει θέση πριν τη 2η αναζήτηση.
- Αν ο Ι βρει τον ΙΙ, ο Ι κερδίζει μία μονάδα και ο ΙΙ χάνει μία μονάδα.
  Αν ο Ι δεν εντοπίσει τον ΙΙ, κερδίζουν και οι δύο 0 μονάδες.

Θέλουμε να διοατυπώσουμε το παιχνίδι σε εκτεταμένη μορφή.



Συνεχίζεται στην επόμενη διάλεξη...