ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2023-2024
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2023-2024

1. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

   Λύση:

   (α΄) Υπάρχουν συνολικά $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί, εκ των οποίων $\binom{12}{5}$ περιλαμβάνουν μόνο φιγούρες, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

   $$p = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}.$$

   Εναλλακτικά, έστω πως επιλέγουμε τα φύλλα διαδοχικά και έστω A_i, $i = 1, \ldots, 5$ το ενδεχόμενο η επιλογή μας i να είναι φιγούρα. Θα έχουμε

   $$\begin{aligned} p &= P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4) \\ &= \frac{12}{52} \times \frac{11}{51} \times \frac{10}{50} \times \frac{9}{49} \times \frac{8}{48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

   (β΄) Έστω Y το πλήθος από φιγούρες που θα βρεθούν στα 5 φύλλα. Παρατηρούμε πως το πλήθος των συνδυασμών 5 φύλλων με k φιγούρες είναι $\binom{12}{k}\binom{40}{5-k}$, καθώς έχουμε $\binom{12}{k}$ τρόπους να επιλέξουμε k φιγούρες και $\binom{40}{5-k}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα φύλλα, ώστε να φτιάξουμε ένα συνδυασμό 5 φύλλων. Επομένως,

   $$p_Y(k) = \frac{\binom{12}{k}\binom{40}{5-k}}{\binom{52}{5}},$$

   και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

   $$p_Y(3) + p_Y(4) + p_Y(5) = \frac{\binom{12}{3}\binom{40}{2}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{4}\binom{40}{1}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{5}\binom{40}{0}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.0739.$$

2. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα ($\heartsuit$), ένα σπαθί ($\clubsuit$), ένα καρό ($\diamondsuit$) και ένα μπαστούνι ($\spadesuit$). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:

   $$A\clubsuit,\ A\diamondsuit,\ A\spadesuit,\ A\heartsuit,\ K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\spadesuit,\ K\heartsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\spadesuit,\ Q\heartsuit,\ J\clubsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ J\heartsuit.$$

   Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Είναι οι Τ.Μ. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ΄) *(1.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y.

   Λύση:

   (α΄) Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli I_i, $i = 1, 2, 3$, ίσες με 1 αν το φύλλο i που επιλέγουμε είναι ρήγας και 0 αλλιώς. Η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με

   $$E\left(\sum_{i=1}^{3} I_i\right) = 3 \times \left(1 \times \frac{4}{16} + 0 \times \frac{12}{16}\right) = \frac{3}{4}.$$

Εναλλακτικά, αλλά με περισσότερες πράξεις, παρατηρούμε πως

$$P(X=k)=\frac{\binom{4}{k}\binom{12}{3-k}}{\binom{16}{3}},$$

όπου $k=0,1,2,3$. Πράγματι, έχουμε $\binom{4}{k}$ τρόπους για να επιλέξουμε k ρηγάδες από τους διαθέσιμους 4 και $\binom{12}{3-k}$ τρόπους για να επιλέξουμε άλλα $3-k$ φύλλα από τα υπόλοιπα 12 διαθέσιμα φύλλα για να φτιάξουμε μια τριάδα φύλων. Επομένως, η μέση τιμή $E(X)$ ισούται με

$$E(X)=0\times\frac{\binom{4}{0}\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}}+1\times\frac{\binom{4}{1}\binom{12}{2}}{\binom{16}{3}}+2\times\frac{\binom{4}{2}\binom{12}{1}}{\binom{16}{3}}+3\times\frac{\binom{4}{3}\binom{12}{0}}{\binom{16}{3}}=\frac{3}{4}.$$

(β´) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, παρατηρήστε πως υπάρχουν $\binom{16}{3}$ συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε. Από αυτούς, ακριβώς 4 έχουν 3 ρηγάδες, καθώς έχουμε 4 επιλογές για το ποιος ρήγας δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό. Έχουμε επίσης 4 συνδυασμούς μόνο με κούπες (γιατί έχουμε 4 τρόπους να αποφασίσουμε ποια κούπα δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό). Όμως δεν υπάρχει κανένας συνδυασμός που να έχει και 3 ρηγάδες και 3 κούπες. Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(X=3)=\frac{4}{\binom{16}{3}},\quad P(Y=3)=\frac{4}{\binom{16}{3}},\quad P(X=3,Y=3)=0.$$

Έχουμε, λοιπόν, $P(X=x,Y=y)\neq P(X=x)P(Y=3)$, για κάποιο συνδυασμό x,y και, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι Τ.Μ. X, Y δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(γ´) Οι X και Y μπορούν να λάβουν τις τιμές $0,1,2,3$. Παρατηρούμε πως

$$P(X=2,Y=3)=P(X=3,Y=2)=P(X=3,Y=3)=0.$$

Πράγματι, αφού υπάρχει μόνο ένας ρήγας κούπα, δεν μπορούμε να έχουμε στα 3 φύλλα που θα επιλέξουμε ούτε 2 ρηγάδες και μόνο κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και 2 κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και μόνο κούπες.

Για κάθε ένα από τους υπόλοιπους συνδυασμούς τιμών, πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα συνδυαστικής. Παρατηρούμε, καταρχάς, πως υπάρχουν συνολικά $\binom{16}{3}$ τρόποι για να λάβουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από 16 φύλλα. Επιπλέον,

i. Υπάρχουν 9 φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, και $\binom{9}{3}$ τρόποι να τα επιλέξουμε, επομένως

$$P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}.$$

ii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα και μόνο μια κούπα, έχουμε 3 επιλογές για το φύλλο που είναι μεν κούπα αλλά όχι ρήγας και $\binom{9}{2}$ επιλογές για τα φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα. Επομένως

$$P(X=0,Y=1)=\frac{3\times\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}.$$

iii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα αλλά να επιλέξουμε 2 κούπες, έχουμε 3 επιλογές για την κούπα που δεν θα επιλέξουμε (παρατηρήστε ότι ο ρήγας κούπα σίγουρα δεν θα επιλεγεί), και 9 επιλογές για το φύλλο που δεν θα είναι ούτε κούπα ούτε ρήγας. Επομένως,

$$P(X=0,Y=2)=\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

iv. Μόνο ένας συνδυασμός έχει μόνο κούπες και κανένα ρήγα. Επομένως,

$$P(X=0,Y=3)=\frac{1}{\binom{16}{3}}.$$

v. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς μια κούπα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλα δύο φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, κάτι που γίνεται με $\binom{9}{2}$ τρόπους, είτε να επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους), μια κούπα που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) και τέλος ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{9}{2}+3\times 3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vi. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς δύο κούπες με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους) και δύο κούπες που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, μια κούπα ακόμα (γίνεται με 3 τρόπους) και ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X=1, Y=2) = \frac{3\times 3 + 3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vii. Θα επιλέξουμε ένα ρήγα και 3 κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλες δύο κούπες από τις 3 διαθέσιμες. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους. Επομένως

$$P(X=1, Y=3) = \frac{3}{\binom{16}{3}}.$$

viii. Θα επιλέξουμε δύο ρηγάδες και δύο κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, ακόμα ένα ρήγα από τους 3 διαθέσιμους, και ακόμα μια κούπα από τις 3 διαθέσιμες. Επομένως,

$$P(X=2, Y=2) = \frac{3\times 3}{\binom{16}{3}}.$$

Τέλος, λόγω συμμετρίας, θα πρέπει $P(X=i, Y=j) = P(X=j, Y=i)$, δηλαδή η από κοινού μάζα πιθανότητας είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Χρησιμοποιώντας αυτή τη συμμετρία, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα:

y x	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$
1	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{\binom{9}{2}+3\times 3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3+3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$
2	$\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3+3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3}{\binom{16}{3}}$	0
3	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$	0	0

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι τόσο οι γραμμές όσο και οι στήλες αθροίζονται στην μάζα πιθανότητας που έχει δοθεί στο πρώτο σκέλος.

3. **(Πυρκαγιές)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K\left[25-(x-40)^2\right], & 35 \le x \le 45, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β΄) *(1 μονάδα)* Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{35}^{45} K\left[25-(x-40)^2\right]\,dx = K\int_{35}^{45}\left[25x - \frac{(x-40)^3}{3}\right]'\,dx \\ &= K\left[25x - \frac{(x-40)^3}{3}\right]_{35}^{45} = K\left[25\times 45 - \frac{125}{3} - 25\times 35 - \frac{125}{3}\right] = \frac{500K}{3}, \end{aligned}$$

επομένως, καθώς το άνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μονάδα, έχουμε $K = \frac{3}{500}$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η ζητούμενη αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = K\int_{35}^{45} e^{x-40}\left[25-(x-40)^2\right]\,dx \\ &= 25K\int_{35}^{45} e^{x-40}\,dx - K\int_{35}^{45} e^{x-40}(x-40)^2\,dx = 25K(e^5-e^{-5}) - K\int_{-5}^{5} e^t t^2\,dt, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα κάναμε την αντικατάσταση $t = x - 40$. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^{5} e^t t^2\, dt &= \int_{-5}^{5} (e^t)' t^2\, dt = \left[e^t t^2\right]_{-5}^{5} - 2\int_{-5}^{5} e^t t\, dt = 25(e^5 - e^{-5}) - 2\left[te^t\right]_{-5}^{5} + 2\int_{-5}^{5} e^t\, dt \\
&= 25(e^5 - e^{-5}) - 10e^5 - 10e^{-5} + 2e^5 - 2e^{-5} = 17e^5 - 37e^{-5}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$E(g(X)) = 25K(e^5 - e^{-5}) - K(17e^5 - 37e^{-5}) = \frac{3}{500}\left(8e^5 + 12e^{-5}\right).$$

4. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαία αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

(α΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Προέδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

Λύση:

(α΄) Έστω A το ενδεχόμενο ο Πρόεδρος να είναι ξεκούραστος και B να κάνει 2 σαρδάμ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\
&= \frac{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6}{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6 + \binom{3}{2}0.5^2 0.5^{3-2}0.4} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

(β΄) Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχει μέση τιμή $\mu = Np = \frac{1}{2}$ και διασπορά $\sigma^2 = Np(1-p) = \frac{3}{8}$.

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$, το πλήθος από σαρδάμ που θα κάνει ο Πρόεδρος την μέρα i. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 55\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0.2071.
\end{aligned}$$