ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

2. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα ($\heartsuit$), ένα σπαθί ($\clubsuit$), ένα καρό ($\diamondsuit$) και ένα μπαστούνι ($\spadesuit$). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:

$$A\clubsuit,\ A\diamondsuit,\ A\spadesuit,\ A\heartsuit,\ K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\spadesuit,\ K\heartsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\spadesuit,\ Q\heartsuit,\ J\clubsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ J\heartsuit.$$

   Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Είναι οι Τ.Μ. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ΄) *(1.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y.

3. **(Πυρκαγιές)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K\left[25-(x-40)^2\right], & 35 \le x \le 45, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β΄) *(1 μονάδα)* Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

4. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαία αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Προέδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0\, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\})\ \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\ p_X(1) = p,\ E(X) = p,\ \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\ p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ E(X) = Np,\ \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\ p_X(k) = (1-p)^{k-1}p,\ E(X) = 1/p,\ \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2,\ P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\ m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\ p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X) = \frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X) = \lambda,\ \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\ \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)\ \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(m-k),\ m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx, \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\right)dx, \\ \int_c^d\left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\right)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N (X_i-\mu) = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$
