

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.
 - (α') (0.5 μονάδα) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.
 - (β') (0.5 μονάδα) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;
 - (γ') (1 μονάδα) Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;
2. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.
 - (α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y .
 - (β') (1 μονάδα) Ποια είναι η μέση τιμή των θερμίδων που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ') (0.5 μονάδα) Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

3. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1, 2], \\ 0, & x \notin [1, 2], \end{cases}$$

μιας Τ.Μ. X , όπου το $c \in \mathbb{R}$ είναι παράμετρος.

(α') (0.5 μονάδα) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου c .

(β') (1 μονάδα) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

(γ') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

(δ') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε ένα t τέτοιο ώστε $P(X \leq t) = P(X \geq t)$.

4. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα κόκκινο αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α') (0.5 μονάδα) Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X .

(β') (1 μονάδα) Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ') (1 μονάδα) Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots,$$

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N : $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N : $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
 Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k , Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N : $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$

$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$

$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$

$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1-p, \quad p_X(1) = p, \quad E(X) = p, \quad \text{VAR}(X) = p(1-p),$$

$$X \sim \text{Διων}(N, p), \quad p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad E(X) = Np, \quad \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$

$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \quad p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad E(X) = 1/p, \quad \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \quad P(X \geq m+n | X > n) = P(X \geq m), \quad m \geq 1, n \geq 0,$$

$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \quad p_X(m) = \frac{\binom{k}{m} \binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad E(X) = \frac{nk}{N}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(X) = \lambda, \quad \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \quad \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$

$$\text{COV}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y), \quad \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(m-k), \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_c^t f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

$$P(X \in B) = \int_B f(t) dt, \quad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx, \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$X \sim U[a, b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \gamma \alpha x \in [a, b], \\ 0, & \gamma \alpha x \notin [a, b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X \sim \text{E}\kappa\theta(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \gamma \alpha x \geq 0, \\ 0, & \gamma \alpha x < 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x/\theta}, & x \geq 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \text{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \gamma \alpha x \in \mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \text{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$Z \sim N(0, 1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$R = \{(x, y) : a \leq y \leq b, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

$$P[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{XY}(x, y) dA, \quad P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f_{XY}(x, y) dA = \begin{cases} \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x, y) dy \right) dx, \\ \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x, y) dx \right) dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy,$$

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E\left(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A, B \Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t) dt,$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$X \geq 0, c > 0 \Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \quad c > 0 \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \quad E(X_i) = \mu, \quad \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, P(|\bar{X}_N - \mu| < \epsilon) \rightarrow 1, & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = \mu) = 1, \end{cases}$$

$$\text{VAR}(X_i) = \sigma^2, \quad \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P(a \leq \bar{S}_N \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \leq a) \rightarrow \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty, \\ P(\bar{S}_N \geq a) \rightarrow 1 - \Phi(a), & \text{καθώς } N \rightarrow \infty. \end{cases}$$
