6.6

Friday, May 10, 2024 4:21 PM

ΠΟΛΛΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

$$X_1, X_2, \ldots X_m$$

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΤΥΠΟΙ:

1) $E\left[\sum_{i=1}^{m} a_i X_i + b\right] = a_i \sum_{i=1}^{m} E(X_i) + b$

2) ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E(X_i)$$

3)

$$\cancel{VAR\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{m} VAR(X_i) + 2\sum_{1 \le i < j \le m} COV(X_i, X_j)}$$

4) $X_1, X_2 \ldots X_m$ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ

$$E\left[g_1(X_1) g_2(X_2) \ldots g_m(X_m)\right] =$$

$$E\left[g_1(X_1)\right] E\left[g_2(X_2)\right] \ldots E\left[g_m(X_m)\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{m} E\left[g_k(X_k)\right]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.29 (STAT PROBLEM)

N ΑΤΟΜΑ

X = # ΑΤΟΜΩΝ ΠΟΥ ΦΕΥΓΟΥΝ ΜΕ ΔΙΚΟ ΤΟΥΣ ΚΑΠΕΛΟ

$E(X) = ;$

$X_i = \{ 1,$ i ΑΤΟΜΟ ΦΥΓΕΙ ΜΕ ΤΟ ΚΑΠΕΛΟ ΤΟΥ,

$$X_i = \begin{cases} 1, & i \text{ ΑΤΟΜΟ ΦΥΓΕΙ ΜΕ ΤΟ ΚΑΠΕΛΟ ΤΟΥ,} \\ 0, & \text{ΑΛΛΙΩΣ.} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, N$

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & 1/N, \\ 0, & 1 - \frac{1}{N}. \end{cases} \qquad E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{N} + 0\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}$$

3 ΑΤΟΜΑ

→	123	3
	132	1
	213	1
	231	0
→	312	0
	321	1

$$\frac{1}{6} \cdot (3 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0) = 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.27

$X \sim \text{ΔΙΩΝ}(N, p)$ $\quad E(X) = N \cdot p, \quad VAR(X) = Np(1-p)$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ΠΕΙΡΑΜΑ } i \text{ ΕΠΙΤΥΧΗΜΕΝΟ,} \\ 0, & \text{—"— —"— ΑΠΟΤΥΧΗΜΕΝΟ.} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = N \cdot p$$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \ldots$$

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} VAR(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p(1-p) = Np(1-p)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.30

N ΑΝΤΡΟΓΥΝΑ $\qquad\qquad$ k ΠΕΘΑΙΝΟΥΝ $\qquad$ ΣΟΑ ΣΟΥ $k=30$

N ΑΝΤΡΕΣ $\qquad$ N ΓΥΝΑΙΚΕΣ

Z = # ΠΛΗΘΟΣ ΖΕΥΓΩΝ ΠΟΥ ΕΠΙΒΙΩΝΟΥΝ

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{ΕΠΙΒΙΩΝΕΙ ΤΟ ΖΕΥΓΟΣ } i, \\ 0, & \text{ΑΛΛΙΩΣ}, \end{cases}$$

$$M_i = \begin{cases} 1, & \text{ΕΠΙΒΙΩΝΕΙ Ο ΑΝΤΡΑΣ } i, \\ 0, & \text{ΑΛΛΙΩΣ}, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} 1, & \text{ΕΠΙΒΙΩΝΕΙ Η ΓΥΝΑΙΚΑ } i, \\ 0, & \text{ΑΛΛΙΩΣ}. \end{cases}$$

$i=1,\dots,30 \qquad\qquad Z_i = M_i \cdot F_i$

$$Z = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

$$E(Z) = E\left[\sum_{i=1}^{N} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E(Z_i) = N\,\frac{2N-k}{2N}\left(\frac{2N-1-k}{2N-1}\right)$$

$$E(Z_1) = P(Z_1=1)\cdot 1 + P(Z_1=0)\cdot 0 =$$

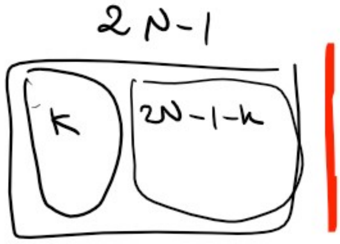
$$P(Z_1=1) = P(M_1=1, F_1=1)$$

$$= P(M_1=1)\,P(F_1=1 \mid M_1=1)$$

$$\frac{2N-k}{2N}\cdot\frac{2N-1-k}{2N-1}$$

$2N-1$

$$\frac{}{2N} \cdot \frac{}{2N-1}$$



$$VAR(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$E(Z^2) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Z_i\right)^2\right] =$$

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} Z_j\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E(Z_i Z_j)$$

$$E(Z_i Z_j) = 1\, P(Z_i Z_j = 1) + 0\, P(Z_i Z_j = 0)$$

$$= P(Z_i Z_j = 1)$$

1) $i \neq j$

$$P(Z_i Z_j = 1) = P\left(M_i f_i M_j f_j = 1\right)$$

$$= \frac{2N-k}{2N} \cdot \frac{2N-k-1}{2N-1} \cdot \frac{2N-k-2}{2N-2} \cdot \frac{2N-k-3}{2N-3}$$

2) $i = j$ $\quad P(Z_i Z_i = 1) = P(M_i = f_i = 1)$