ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2025
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: . . . .

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός, έξυπνων ρολογιών και συναφών συσκευών. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Η εξέταση είναι με κλειστά βιβλία. Απαγορεύεται να χρησιμοποιήσετε οτιδήποτε πέραν των θεμάτων και των τετράδιων των λύσεων.
5. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
6. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
7. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
8. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
9. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. *(2 μονάδες)* **(Τσούγκρισμα αυγών)** Μια τετραμελής οικογένεια γιορτάζει το Πάσχα τσουγκρίζοντας αυγά. Κάθε μέλος της οικογένειας έχει ένα αυγό, και αρχικά το νεώτερο μέλος χτυπά το αυγό του με όλα τα υπόλοιπα μέλη, διαδοχικά, μέχρι να σπάσει το δικό του αβγό ή να κερδίσει και τα 3 άλλα μέλη. Κατόπιν, γίνονται τυχόν επιπλέον τσουγκρίσματα αυγών, με αυθαίρετο τρόπο που δεν έχει σημασία. Δίνεται ότι τα 4 αυγά μπορούν να τοποθετηθούν σε γνησίως αύξουσα σειρά ανάλογα του πόσο σκληρά είναι, και όταν δύο αυγά χτυπηθούν, σπάει πάντα και μόνο το λιγότερο σκληρό, χωρίς το άλλο να τραυματιστεί καθόλου. Επίσης, τα αυγά κατανέμονται με τυχαίο τρόπο στα 4 άτομα της οικογένειας, χωρίς προτίμηση στην κατανομή των αβγών. Έστω X η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των αυγών των *άλλων* μελών της οικογένειας που θα σπάσει το νεώτερο μέλος. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$P(X=0), \quad P(X=1), \quad P(X=2), \quad P(X=3).$$

Υπόδειξη: θα διευκολύνει να υπολογίσετε *και* τις $P(X \geq 1)$ και $P(X \geq 2)$.

2. **(Age of Empires II DE)** Σε ένα feudal archer rush 10 τοξότες επιτίθενται σε 10 χωρικούς. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε έναν από τους 10 χωρικούς χωρίς προτίμηση στο χωρικό και ανεξάρτητα από το τι θα κάνουν οι άλλοι τοξότες. Έστω X το πλήθος των χωρικών στους οποίους δεν θα επιτεθεί κανένας τοξότης.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $P(X=0)$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $E(X)$.
   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $P(X=9)$.
   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* (δύσκολο) Να υπολογίσετε την $P(X=8)$.

3. **(Μεγιστοποίηση μέσης τιμής)** Δίνεται η πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ άγνωστες παράμετροι.

(α΄) *(1 μονάδα)* Αν έχει δοθεί ότι η μέση τιμή $E(X)$ μιας Τ.Μ. που ακολουθεί την άνω πυκνότητα ισούται με $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων a, b, για τις οποίες μεγιστοποιείται η μέση τιμή $E(X)$, και ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

4. **(Φιλοδωρήματα)** Ένας barista που εργάζεται στη Μύκονο λαμβάνει από κάθε άτομο που εξυπηρετεί ένα φιλοδώρημα που ισούται με 1 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$), 2 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$), ή 4 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$). Τα φιλοδωρήματα διαφορετικών ατόμων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του φιλοδωρήματος Z που λαμβάνει ο barista από ένα τυχαίο άτομο;

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο barista εξυπηρετήσει 150 άτομα, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το συνολικό φιλοδώρημα να ξεπεράσει τα 320 ευρώ;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Επιπλέον, αν X είναι το πλήθος των ατόμων που δίνουν στον barista φιλοδώρημα ακριβώς 1 ευρώ, ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x)$, όπου $x = 1 \ldots, 150$; Να δοθεί ένας ακριβής τύπος.

(δ΄) *(0.5 μονάδα)* (δύσκολο) Έστω επιπλέον Y το πλήθος των ατόμων που θα δώσουν στον barista 2 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x,\ Y = y)$ για $x, y \geq 0$ και $x + y \leq 150$?

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \Delta\iota\omega\nu(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \Gamma\varepsilon\omega\mu(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \Upsilon\pi\varepsilon\rho(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \, \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m-k), \; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X)=\theta, \quad \mathrm{VAR}(X)=\theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X)=\mu, \quad \mathrm{VAR}(X)=\sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint\limits_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\right)dx, \\ \int_c^d\left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\right)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y)=0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)+b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0\Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1,X_2,\ldots\ \text{ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N=\mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i)=\sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2024-2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. *(2 μονάδες)* **(Τσούγκρισμα αυγών)** Μια τετραμελής οικογένεια γιορτάζει το Πάσχα τσουγκρίζοντας αυγά. Κάθε μέλος της οικογένειας έχει ένα αυγό, και αρχικά το νεώτερο μέλος χτυπά το αυγό του με όλα τα υπόλοιπα μέλη, διαδοχικά, μέχρι να σπάσει το δικό του αβγό ή να κερδίσει και τα 3 άλλα μέλη. Κατόπιν, γίνονται τυχόν επιπλέον τσουγκρίσματα αυγών, με αυθαίρετο τρόπο που δεν έχει σημασία. Δίνεται ότι τα 4 αυγά μπορούν να τοποθετηθούν σε γνησίως αύξουσα σειρά ανάλογα του πόσο σκληρά είναι, και όταν δύο αυγά χτυπηθούν, σπάει πάντα και μόνο το λιγότερο σκληρό, χωρίς το άλλο να τραυματιστεί καθόλου. Επίσης, τα αυγά κατανέμονται με τυχαίο τρόπο στα 4 άτομα της οικογένειας, χωρίς προτίμηση στην κατανομή των αβγών. Έστω X η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των αυγών των *άλλων* μελών της οικογένειας που θα σπάσει το νεώτερο μέλος. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες

$$P(X=0),\quad P(X=1),\quad P(X=2),\quad P(X=3).$$

Υπόδειξη: θα διευκολύνει να υπολογίσετε *και* τις $P(X\geq 1)$ και $P(X\geq 2)$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει μόνο τις τιμές $0,1,2,3$. Παρατηρούμε επίσης πως $P(X=0)$ όταν το νεώτερο μέλος έχει ασθενέστερο αυγό από τον πρώτο του αντίπαλο. Αυτό γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, λόγω συμμετρίας. Επίσης $X\geq 1$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος κερδίσει το πρώτο τσούγκρισμα, που επίσης έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Επιπλέον, $X\geq 2$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος έχει το πιο δυνατό αυγό από τα επόμενα δύο μέλη, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, λόγω συμμετρίας, και $X=3$ αν και μόνο αν το νεώτερο μέλος έχει το πιο δυνατό αυγό από όλα τα μέλη, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, και πάλι λόγω συμμετρίας. Επομένως:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{1}{2},\\
P(X=1) &= P(X\geq 1)-P(X\geq 2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\\
P(X=2) &= P(X\geq 2)-P(X=3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\\
P(X=3) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως επειδή υπάρχουν μόλις $4!=24$ διατάξεις της δύναμης των αβγών, όλες ισοπίθανες, είναι εύκολο να υπολογίσουμε την μάζα της X ακόμα και με απλή απαρίθμηση των αποτελεσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της X. Πράγματι, έστω Y_i, $i=1,2,3,4$ οι δυνάμεις των αυγών των μελών, όπου 1 είναι το νεότερο μέλος και οι δυνάμεις συμβολίζονται με A,B,C,D, όπου A είναι το ασθενέστερο αυγό και D το ισχυρότερο. Υπάρχουν 24 ισοπίθανα αποτελέσματα $Y_1Y_2Y_3Y_4$, που παρατίθενται παρακάτω, και σε παρένθεση ακολουθεί η τιμή του X:

ABCD (0),	BCDA (0),	CDAB (0),	DABC (3),
ABDC (0),	BDCA (0),	DCAB (3),	CABD (2),
ACBD (0),	CBDA (1),	BDAC (0),	DACB (3),
ACDB (0),	CDBA (0),	DBAC (3),	BACD (1),
ADBC (0),	DBCA (3),	BCAD (0),	CADB (1),
ADCB (0),	DCBA (3),	CBAD (2),	BADC (1),

και με απλή απαρίθμηση καταλήγουμε στις άνω πιθανότητες.

2. **(Age of Empires II DE)** Σε ένα feudal archer rush 10 τοξότες επιτίθενται σε 10 χωρικούς. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε έναν από τους 10 χωρικούς χωρίς προτίμηση στο χωρικό και ανεξάρτητα από το τι θα κάνουν οι άλλοι τοξότες. Έστω X το πλήθος των χωρικών στους οποίους δεν θα επιτεθεί κανένας τοξότης.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $P(X=0)$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $E(X)$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την $P(X=9)$.

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* (δύσκολο) Να υπολογίσετε την $P(X=8)$.

Λύση:

(α΄) Κάθε ένας από τους 10 τοξότες έχει 10 διαφορετικές επιλογές για το στόχο του. Άρα, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 10^{10} δυνατά αποτελέσματα. Για να υπολογίσουμε το μέγεθος του ενδεχόμενου $X = 0$, παρατηρούμε πως για να πραγματοποιηθεί πρέπει ο κάθε τοξότης να επιλέξει διαφορετικό στόχο. Επομένως, ο πρώτος τοξότης έχει 10 επιλογές, ο δεύτερος έχει 9 επιλογές, κοκ, και εν τέλει ο τελευταίος έχει μια επιλογή. Τελικά,

$$P(X=0) = \frac{10!}{10^{10}}.$$

(β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 10$, Τ.Μ. που ισούνται με 1 όταν ο χωρικός i δεν δέχεται επίθεση από κανένα τοξότη. Παρατηρούμε πως $P(X_i = 1) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$, επομένως

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = 10 \times \left(1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 0 \times \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right)\right) = 10\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \simeq 10e^{-1}.$$

(γ΄) Θα έχουμε $X = 9$ αν και μόνο αν όλοι οι τοξότες επιτεθούν στον ίδιο χωρικό. Η πιθανότητα να επιτεθούν στον πρώτο χωρικό όλοι είναι $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$, και επειδή υπάρχουν 10 χωρικοί, προκύπτει ότι τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$10\left(\frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10^9}.$$

(δ΄) Θα έχουμε $X = 8$ αν όλοι οι τοξότες στοχεύσουν *και* τους δύο χωρικούς ενός συγκεκριμένου ζεύγους χωρικών, από ένα σύνολο $\binom{10}{2}$ ζευγών. Η πιθανότητα να επιτεθούν οι τοξότες σε 2 συγκεκριμένους χωρικούς ισούται με την πιθανότητα όλα τα βέλη να καταλήξουν σε αυτούς τους δύο, που ισούται με $\left(\frac{2}{10}\right)^{10}$ αν αφαιρεθεί η πιθανότητα να καταλήξουν όλα τα βέλη σε κάποιον συγκεκριμένο από αυτούς τους δύο, που ισούται με $2\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$. Συνδυάζοντας τα άνω, έχουμε

$$P(X=8) = \binom{10}{2}\left(\left(\frac{2}{10}\right)^{10} - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right).$$

3. **(Μεγιστοποίηση μέσης τιμής)** Δίνεται η πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ άγνωστες παράμετροι.

(α΄) *(1 μονάδα)* Αν έχει δοθεί ότι η μέση τιμή $E(X)$ μιας Τ.Μ. που ακολουθεί την άνω πυκνότητα ισούται με $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων a, b, για τις οποίες μεγιστοποιείται η μέση τιμή $E(X)$, και ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

Λύση: Παρατηρούμε καταρχάς ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 (ax+b)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{ax^2}{2} + bx\right)' dx = \frac{a}{2} + b = 1.$$

Επιπλέον,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2 + bx)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right)' dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

(α΄) Αν δίνεται ότι $E(X) = \frac{3}{5}$, τότε ισχύει το ακόλουθο απλό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\frac{a}{2} + b = 1, \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{3}{5},$$

από το οποίο εύκολα προκύπτει πως

$$a = \frac{6}{5}, \quad b = \frac{2}{5}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$E(X) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{12} + \frac{1}{2}.$$

Επομένως, για να μεγιστοποιήσουμε την μέση τιμή θέλουμε το a να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Όμως, το $b = 1 - \frac{a}{2} \geq 0$, ειδάλλως η πυκνότητα θα λαμβάνει και αρνητικές τιμές, για μικρά x. Επομένως, για να μεγιστοποιηθεί η μέση τιμή πρέπει

$$b = 0, \quad a = 2, \quad E(X) = \frac{2}{3}.$$

4. **(Φιλοδωρήματα)** Ένας barista που εργάζεται στη Μύκονο λαμβάνει από κάθε άτομο που εξυπηρετεί ένα φιλοδώρημα που ισούται με 1 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$), 2 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$), ή 4 ευρώ (με πιθανότητα $\frac{1}{4}$). Τα φιλοδωρήματα διαφορετικών ατόμων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του φιλοδωρήματος Z που λαμβάνει ο barista από ένα τυχαίο άτομο;

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο barista εξυπηρετήσει 150 άτομα, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα το συνολικό φιλοδώρημα να ξεπεράσει τα 320 ευρώ;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Επιπλέον, αν X είναι το πλήθος των ατόμων που δίνουν στον barista φιλοδώρημα ακριβώς 1 ευρώ, ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x)$, όπου $x = 1 \ldots, 150$; Να δοθεί ένας ακριβής τύπος.

(δ΄) *(0.5 μονάδα)* (δύσκολο) Έστω επιπλέον Y το πλήθος των ατόμων που θα δώσουν στον barista 2 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = x,\ Y = y)$ για $x, y \geq 0$ και $x + y \leq 150$?

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 2, \\ E(Z^2) &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}, \\ \mathrm{VAR}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{11}{2} - 2^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P\left(\sum_{i=1}^{150} X_i > 320\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \times E(X)}{\sqrt{150 \times \mathrm{VAR}(X)}} > \frac{320 - 150 \times E(X)}{\sqrt{150 \times \mathrm{VAR}(X)}}\right)$$
$$\simeq P\left(Z > \frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right).$$

(γ΄) Κάθε άτομο θα δώσει φιλοδώρημα στον barista με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ανεξάρτητα από τα άλλα 150 άτομα. Επομένως, το πλήθος των ατόμων που θα του δώσουν φιλοδώρημα 1 ευρώ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 150$ και $p = \frac{1}{2}$, και

$$P(X = x) = \binom{150}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{150-x} = \binom{150}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{150}.$$

(δ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον πολυωνυμικό συντελεστή. Υπάρχουν $\binom{150}{x, y, 150-x-y}$ τρόποι για να μοιραστούν τα x φιλοδωρήματα του 1 ευρώ, τα y φιλοδωρήματα των 2 ευρώ και τα $150 - x - y$ φιλοδωρήματα των 4 ευρώ, και κάθε τρόπος έχει πιθανότητα να προκύψει

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{150-x-y},$$

επομένως

$$P(X = x,\ Y = y) = \binom{150}{x, y, 150-x-y}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{150-x-y} = \binom{150}{x, y, 150-x-y}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{150-x}.$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025
ΟΝΟΜΑ ΚΑΙ ΕΠΩΝΥΜΟ ΦΟΙΤΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ....

Σημαντικές Οδηγίες - ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΤΕΣ

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός, έξυπνων ρολογιών και συναφών συσκευών. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Η εξέταση είναι με κλειστά βιβλία. Απαγορεύεται να χρησιμοποιήσετε οτιδήποτε πέραν των θεμάτων και των τετράδιων των λύσεων.
5. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
6. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
7. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
8. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
9. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
10. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα υπάρξει συμπληρωματική εξέταση και θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Γιγαντιαίο Πάντα)** Έστω Τ.Μ. X που εκφράζει τα κιλά από μπαμπού που τρώει ένα γιγαντιαίο πάντα κάθε μέρα. Όταν το γιγαντιαίο πάντα είναι ευδιάθετο, κάτι που συμβαίνει κάθε μέρα ανεξάρτητα από τις άλλες, με πιθανότητα $p = 0.25$, τότε η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 = 4$. Αντίθετα, αν το γιγαντιαίο πάντα δεν είναι ευδιάθετο, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $1-p = 0.75$, τότε η X ακολουθεί και πάλι την κατανομή Poisson, αλλά με παράμετρο $\lambda_2 = 2$.
   (α΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ένα γιγαντιαίο πάντα έφαγε σε μια μέρα $X = 5$ κιλά μπαμπού, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν ευδιάθετο;
   (β΄) *(1 μονάδα)* Υποθέτουμε τώρα ότι δεν γνωρίζουμε, για τη σημερινή ημέρα, αν το γιγαντιαίο πάντα είναι ευδιάθετο, ούτε πόσα κιλά μπαμπού έφαγε. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X για τη σημερινή ημέρα;
2. **(Fortune cookies)** Τρεις φίλοι επισκέπτονται ένα κινεζικό εστιατόριο και στο τέλος του γεύματος προσφέρεται στον καθένα τους από ένα κουλουράκι τύχης. Τα κουλουράκια είναι 10 ειδών, και ο κάθε ένας φίλος λαμβάνει οποιοδήποτε ένα από τα 10 είδη με πιθανότητα $\frac{1}{10}$ και ανεξάρτητα από το ποια είδη έλαβαν οι άλλοι δύο. Έστω A το είδος που γράφει "Θα κοπείς σε όλα τα μαθήματα το Σεπτέμβριο" και B το είδος που γράφει "Θα περάσεις όλα τα μαθήματα το Σεπτέμβριο". Έστω X το συνολικό πλήθος από κουλουράκια του είδους A που θα λάβουν μαζί και οι τρεις φίλοι, και έστω παρομοίως Y το συνολικό πλήθος από κουλουράκια του είδους B που θα λάβουν μαζί και οι τρεις φίλοι.
   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Τ.Μ. X;
   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y;

(γ΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η πιθανότητα οι 3 φίλοι να πάρουν περισσότερα κουλουράκια είδους A παρά κουλουράκια είδους B; Αρκεί να δώσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την από κοινού μάζα πιθανότητας του προηγούμενου σκέλους.

3. **(Κινέζικο ραντεβού)** Δύο φίλοι, ένας ασυνεπής Έλληνας και ένας συνεπής Κινέζος, δίνουν ραντεβού σε ένα εστιατόριο, για την ώρα $t = 0$. Ο Έλληνας θα φτάσει μετά από ένα τυχαίο χρόνο T που ακολουθεί την πυκνότητα πιθανότητας

$$f(t) = \begin{cases} K \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

όπου $K \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο Κινέζος αποφασίσει να φτάσει στο εστιατόριο τη χρονική στιγμή 0, ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του χρόνου που θα αναμένει τον Έλληνα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Εναλλακτικά, αν ο Κινέζος αποφασίσει να φτάσει στο εστιατόριο μια συγκεκριμένη, μη τυχαία χρονική στιγμή $A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να δώσετε μια έκφραση για την Τ.Μ. Z που εκφράζει το χρόνο που θα περιμένει ο φίλος που θα φτάσει πρώτος τον φίλο που θα φτάσει δεύτερος. Η έκφραση για το Z πρέπει να περιέχει τα T, A. Δεν χρειάζεται να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή $E(Z)$.

(ε΄) *(0.5 μονάδα)* Για ποια τιμή του A ελαχιστοποιείται η αναμενόμενη τιμή $E(Z)$;

4. **(Σινικό Τείχος)** Οι πιο πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές ανεβάζουν το συνολικό μήκος του ξακουστού Σινικού Τείχους στα 20700 χιλιόμετρα. Ένας περιηγητής αποφασίζει να περπατήσει χωρίς διακοπή καθ' όλο αυτό το μήκος, διανυκτερεύοντας απλώς όπου σταμάτησε κάθε βράδυ. Τις ημέρες που βρέχει ο περιηγητής περπατά 20 χιλιόμετρα. Τις ημέρες που δεν βρέχει περπατά 40 χιλιόμετρα. Κάθε μέρα θα βρέξει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και δεν θα βρέξει με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της απόστασης που διανύει ο περιηγητής σε μια μέρα;

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της απόστασης που διανύει ο περιηγητής σε 3 συνεχόμενες ημέρες; (Υπόδειξη: αρχικά, προσδιορίστε τις τιμές που μπορεί να λάβει αυτή η Τ.Μ.)

(γ΄) *(1 μονάδα)* Αν ο περιηγητής έχει στη διάθεσή του 600 ημέρες, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα μπορέσει να καλύψει όλο το μήκος του Σινικού Τείχους; Πρέπει να κάνετε μια αιτιολογημένη προσέγγιση.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad (A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B',$$
$$P(A)\geq 0\;\forall A\in\mathcal{F},\quad P(\Omega)=1,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow P(_1\cup{}_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$
$$P(A')=1-P(A),\quad P(\emptyset)=0,\quad P(A)\leq 1,\quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B),\quad P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)\leq P(A)+P(B),\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A'\cap B)+P(A'\cap B'\cap C),$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}),$$
$$P()=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B'),\quad P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')},$$
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)}\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}).$$
$$A,B\text{ ανεξάρτητα}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

$$p_X(x)=P(X=x)=P(\{\omega:X(\omega)=x\})\;\forall x\in S_X,\quad F_X(x)=P(X\leq x),\quad \lim_{t\to x^-}F(t)=P(X<x),\quad E(X)=\sum_{x\in S_X}xp_X(x),$$
$$E(g(X))=\sum_{x\in S_X}g(x)p_X(x),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad E(\sum_{i=1}^n a_ig_i(X))=\sum_{i=1}^n a_iE(g_i(X)),$$
$$\sigma^2=\mathrm{VAR}(X)=E\big[(X-\mu)^2\big]=E(X^2)-(E(X))^2,\quad \mathrm{VAR}(aX+b)=a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{k=0}^\infty kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{k=0}^\infty {}^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!},\quad (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
$$X\sim\mathrm{Bern}(p),\quad p_X(0)=1-p,\ p_X(1)=p,\ E(X)=p,\ \mathrm{VAR}(X)=p(1-p),$$
$$X\sim\Delta\iota\omega\nu(N,p),\ p_X(k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k},\ E(X)=Np,\ \mathrm{VAR}(X)=Np(1-p),$$
$$X\sim\Gamma\varepsilon\omega\mu(p),\ p_X(k)=(1-p)^{k-1}p,\ E(X)=1/p,\ \mathrm{VAR}(X)=(1-p)/p^2,\ P(X\geq m+n|X>n)=P(X\geq m),\ m\geq 1,n\geq 0,$$
$$X\sim\Upsilon\pi\varepsilon\rho(N,k,n),\ p_X(m)=\frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=\frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X\sim\mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X)=\lambda,\ \mathrm{VAR}(X)=\lambda.$$

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)\quad\forall x\in S_X,\ \forall y\in S_Y,\quad p_X(x)=\sum_{y\in S_Y}p_{XY}(x,y),\quad p_Y(y)=\sum_{x\in S_X}p_{XY}(x,y),$$
$$E(g(X,Y))=\sum_{x,y}g(x,y)p_{XY}(x,y),\quad E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,\quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y))=\sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\mathrm{COV}(X,Y),$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)\;\forall A,B\Leftrightarrow p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\;\forall x,y,$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Rightarrow E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y)),\quad \mathrm{COV}(X,Y)=0,\quad p_{X+Y}(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_X(k)p_Y(m-k),\ m\in\mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i+b)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)+b,\quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{VAR}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx,\; \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx,\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N (X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^N X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2024-2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. **(Γιγαντιαίο Πάντα)** Έστω Τ.Μ. X που εκφράζει τα κιλά από μπαμπού που τρώει ένα γιγαντιαίο πάντα κάθε μέρα. Όταν το γιγαντιαίο πάντα είναι ευδιάθετο, κάτι που συμβαίνει κάθε μέρα ανεξάρτητα από τις άλλες, με πιθανότητα $p = 0.25$, τότε η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 = 4$. Αντίθετα, αν το γιγαντιαίο πάντα δεν είναι ευδιάθετο, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $1-p = 0.75$, τότε η X ακολουθεί και πάλι την κατανομή Poisson, αλλά με παράμετρο $\lambda_2 = 2$.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ένα γιγαντιαίο πάντα έφαγε σε μια μέρα $X = 5$ κιλά μπαμπού, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν ευδιάθετο;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Υποθέτουμε τώρα ότι δεν γνωρίζουμε, για τη σημερινή ημέρα, αν το γιγαντιαίο πάντα είναι ευδιάθετο, ούτε πόσα κιλά μπαμπού έφαγε. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X για τη σημερινή ημέρα;

   Λύση:

   (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο το γιγαντιαίο πάντα να είναι ευδιάθετο. Δίνεται ότι

   $$P(A) = 0.25, P(A') = 0.75, P(X = 5|A) = e^{-4}\frac{4^5}{5!}, P(X = 5|A') = e^{-2}\frac{2^5}{5!}.$$

   Εφαρμόζοντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε ότι

   $$\begin{aligned} P(A|X=5) &= \frac{P(X=5|A)P(A)}{P(X=5|A)P(A) + P(X=5|A')P(A')} \\ &= \frac{\left(e^{-4}\frac{4^5}{5!}\right) \times 0.25}{\left(e^{-4}\frac{4^5}{5!}\right) \times 0.25 + \left(e^{-2}\frac{2^5}{5!}\right) \times 0.75} \simeq 0.5908. \end{aligned}$$

   (β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα της Ολικής Πιθανότητας:

   $$P(X = k) = P(X = k|A)P(A) + P(X = k|A')P(A') = 0.25 \times e^{-4}\frac{4^k}{k!} + 0.75 \times e^{-2}\frac{2^k}{k!},$$

   όπου $k = 0, 1, \ldots$.

2. **(Fortune cookies)** Τρεις φίλοι επισκέπτονται ένα κινεζικό εστιατόριο και στο τέλος του γεύματος προσφέρεται στον καθένα τους από ένα κουλουράκι τύχης. Τα κουλουράκια είναι 10 ειδών, και ο κάθε ένας φίλος λαμβάνει οποιοδήποτε ένα από τα 10 είδη με πιθανότητα $\frac{1}{10}$ και ανεξάρτητα από το ποια είδη έλαβαν οι άλλοι δύο. Έστω A το είδος που γράφει "Θα κοπείς σε όλα τα μαθήματα το Σεπτέμβριο" και B το είδος που γράφει "Θα περάσεις όλα τα μαθήματα το Σεπτέμβριο". Έστω X το συνολικό πλήθος από κουλουράκια του είδους A που θα λάβουν μαζί και οι τρεις φίλοι, και έστω παρομοίως Y το συνολικό πλήθος από κουλουράκια του είδους B που θα λάβουν μαζί και οι τρεις φίλοι.

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Τ.Μ. X;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y;

   (γ΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η πιθανότητα οι 3 φίλοι να πάρουν περισσότερα κουλουράκια είδους A παρά κουλουράκια είδους B; Αρκεί να δώσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την από κοινού μάζα πιθανότητας του προηγούμενου σκέλους.

   Λύση:

   (α΄) Κάθε ένας από τους 3 φίλους θα λάβει ένα κουλουράκι είδους A με πιθανότητα $\frac{1}{10}$ ανεξάρτητα από τους άλλους. Επομένως, η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = \frac{1}{10}$ (η πιθανότητα της επιτυχίας), επομένως

   $$P(X = x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

(β΄) Καταρχάς παρατηρούμε πως $x, y = 0, 1, 2, 3$, και πως όταν $x + y > 3$, τότε $P(X = x, Y = y) = 0$, καθώς οι τρεις φίλοι θα λάβουν 3 κουλουράκια, και επομένως τα κουλουράκια ειδών A και B θα είναι έως 3.

Για τις περιπτώσεις όπου $x, y = 0, 1, 2, 3$, αλλά $x + y \leq 3$, παρατηρούμε πως:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y|X = x),$$

όπου η πιθανότητα $P(X = x)$ έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος. Σχετικά με την δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = y|X = x)$, παρατηρούμε ότι με δεδομένο ότι x από τα κουλουράκια είναι είδους A, μένουν $3 - x$ κουλουράκια, καθένα εκ των οποίων θα είναι είδους B με πιθανότητα $\frac{1}{9}$. Έχουμε, επομένως, και πάλι την διωνυμική κατανομή, αλλά με παραμέτρους $N = 3 - x$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = \frac{1}{9}$ (πιθανότητα επιτυχίας). Επομένως,

$$P(Y = y|X = x) = \binom{3-x}{y}\left(\frac{1}{9}\right)^y\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{3-x-y},$$

και τελικά

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= \binom{3}{x}\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{3-x}\binom{3-x}{y}\left(\frac{1}{9}\right)^y\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{3-x-y} \\ &= \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!} \times \frac{8^{3-x-y}}{10^3}, \end{aligned}$$

όταν $x, y = 0, 1, 2, 3$ και $x + y \leq 3$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν

$$\binom{3}{x, y, 3-x-y} = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}$$

τρόποι για να μοιραστούν τα κουλουράκια σε x κουλουράκια είδους A, y κουλουράκια είδους B, και $3 - x - y$ κουλουράκια άλλων ειδών, και κάθε ένας από τους τρόπους αυτούς έχει πιθανότητα να προκύψει ίση με

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^y\left(\frac{8}{10}\right)^{3-x-y} = \frac{8^{3-x-y}}{10^3},$$

όταν $x, y = 0, 1, 2, 3$ και $x + y \leq 3$.

(γ΄) Θα πρέπει να προσθέσουμε τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων που αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο $X > Y$:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) \\ &\simeq 0.2200. \end{aligned}$$

3. **(Κινέζικο ραντεβού)** Δύο φίλοι, ένας ασυνεπής Έλληνας και ένας συνεπής Κινέζος, δίνουν ραντεβού σε ένα εστιατόριο, για την ώρα $t = 0$. Ο Έλληνας θα φτάσει μετά από ένα τυχαίο χρόνο T που ακολουθεί την πυκνότητα πιθανότητας

$$f(t) = \begin{cases} K\cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

όπου $K \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο Κινέζος αποφασίσει να φτάσει στο εστιατόριο τη χρονική στιγμή 0, ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του χρόνου που θα αναμένει τον Έλληνα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Εναλλακτικά, αν ο Κινέζος αποφασίσει να φτάσει στο εστιατόριο μια συγκεκριμένη, μη τυχαία χρονική στιγμή $A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να δώσετε μια έκφραση για την Τ.Μ. Z που εκφράζει το χρόνο που θα περιμένει ο φίλος που θα φτάσει πρώτος τον φίλο που θα φτάσει δεύτερος. Η έκφραση για το Z πρέπει να περιέχει τα T, A. Δεν χρειάζεται να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(δ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή $E(Z)$.

(ε΄) *(0.5 μονάδα)* Για ποια τιμή του A ελαχιστοποιείται η αναμενόμενη τιμή $E(Z)$;

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = K\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)'\,dt = K\,[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = K\sin\frac{\pi}{2} - K\sin 0 = K,$$

και επειδή το ολοκλήρωμα αυτό πρέπει να είναι μονάδα, κατά τα γνωστά από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, τελικά προκύπτει πως $K = 1$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, η ζητούμενη αναμενόμενη τιμή είναι απλώς η αναμενόμενη τιμή του T:

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin t)'\,dt \\ &= [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)'\,dt = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

(γ΄) Προφανώς η διαφορά μεταξύ των χρόνων αφίξεων είναι $Z = |T - A|$.

(δ΄) Σε σχέση με το δεύτερο σκέλος, πρέπει πλέον να υπολογίσουμε την $E(Z)$:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |t-A| f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |t-A| f(t)\,dt = \int_0^{A} (A-t)\cos t\,dt + \int_A^{\frac{\pi}{2}} (t-A)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{A} (A-t)(\sin t)'\,dt + \int_A^{\frac{\pi}{2}} (t-A)(\sin t)'\,dt \\ &= [(A-t)\sin t]_0^A + \int_0^A \sin t\,dt + [(t-A)\sin t]_A^{\frac{\pi}{2}} - \int_A^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \\ &= 0 - 0 - \int_0^A (\cos t)'\,dt + \left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \int_A^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)'\,dt \\ &= -\cos A + \cos 0 + \frac{\pi}{2} - A + \cos\frac{\pi}{2} - \cos A = 1 + \frac{\pi}{2} - A - 2\cos A. \end{aligned}$$

(ε΄) Θέτουμε $f(A) = E(Z) = 1 + \frac{\pi}{2} - A - 2\cos A$. Έχουμε

$$f'(A) = -1 + 2\sin A, \quad f''(A) = 2\cos A,$$

επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για ελάχιστα συναρτήσεων, προκύπτει πως η βέλτιστη χρονική στιγμή για να προσέλθει ο Κινέζος είναι η A για την οποία

$$-1 + 2\sin A = 0 \Leftrightarrow \sin A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{6}.$$

4. **(Σινικό Τείχος)** Οι πιο πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές ανεβάζουν το συνολικό μήκος του ξακουστού Σινικού Τείχους στα 20700 χιλιόμετρα. Ένας περιηγητής αποφασίζει να περπατήσει χωρίς διακοπή καθ' όλο αυτό το μήκος, διανυκτερεύοντας απλώς όπου σταμάτησε κάθε βράδυ. Τις ημέρες που βρέχει ο περιηγητής περπατά 20 χιλιόμετρα. Τις ημέρες που δεν βρέχει περπατά 40 χιλιόμετρα. Κάθε μέρα θα βρέξει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και δεν θα βρέξει με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της απόστασης που διανύει ο περιηγητής σε μια μέρα;

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της απόστασης που διανύει ο περιηγητής σε 3 συνεχόμενες ημέρες; (Υπόδειξη: αρχικά, προσδιορίστε τις τιμές που μπορεί να λάβει αυτή η Τ.Μ.)

(γ΄) *(1 μονάδα)* Αν ο περιηγητής έχει στη διάθεσή του 600 ημέρες, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα μπορέσει να καλύψει όλο το μήκος του Σινικού Τείχους; Πρέπει να κάνετε μια αιτιολογημένη προσέγγιση.

Λύση:

(α΄) Έστω X_i η Τ.Μ. που περιγράφει το μήκος που διανύει ο περιηγητής κατά τη διάρκεια της ημέρας i. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{1}{4}\times 20 + \frac{3}{4}\times 40 = \frac{140}{4} = 35, \\ E(X_i^2) &= \frac{1}{4}\times 20^2 + \frac{3}{4}\times 40^2 = \frac{5200}{4} = 1300, \\ \mathrm{VAR}(X_i) &= E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 75. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω Y το συνολικό μήκος που θα διανύσει ο περιηγητής σε 3 μέρες. Μπορούμε να θεωρήσουμε για μια μέρα επιτυχία να μην βρέξει και αποτυχία να βρέξει, και επειδή κάθε μέρα βρέχει ανεξάρτητες από τις άλλες μέρες, προκύπτει ότι οι μέρες που δεν θα βρέξει ακολουθούν την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 3$ και $p = \frac{3}{4}$. Επομένως,

$$P(Y = 60) = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \; P(Y = 80) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4}, \; P(Y = 100) = 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2, \; P(Y = 120) = \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

(γ΄) Παρατηρήστε ότι ο περιηγητής θα τα καταφέρει αν το άθροισμα των αποστάσεων που διανύει σε 600 μέρες, όπως αυτές περιγράφονται στο πρώτο σκέλος, υπερβαίνει το μήκος του Σινικού Τείχους. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.). Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{600} X_i > 20700\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{600} X_i - 600 \times 35}{\sqrt{600} \times \sqrt{75}} > \frac{207000 - 600 \times 35}{\sqrt{600} \times \sqrt{75}}\right) \\ &\simeq P(Z > -\sqrt{2}) = 1 - \Phi\left(-\sqrt{2}\right) \simeq 0.9213. \end{aligned}$$