ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2024
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

2. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή των θερμίδων που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

3. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1, 2], \\ 0, & x \notin [1, 2], \end{cases}$$

μιας Τ.Μ. X, όπου το $c \in \mathbb{R}$ είναι παράμετρος.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου c.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

(δ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε ένα t τέτοιο ώστε $P(X \le t) = P(X \ge t)$.

4. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα κόκκινο αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητας το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \; \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \; \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \; \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \; \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m - k), \; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx, \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)dx, \\ \int_c^d \Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0\Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1,X_2,\ldots\ \text{ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N (X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^N X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2023-2024
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2023-2024

1. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

   Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο φοιτητής να είναι αδιάβαστος, B το ενδεχόμενο να είναι μισοδιαβασμένος, και C το ενδεχόμενο να είναι διαβασμένος. Έστω επίσης S_i, με $i = 1, \ldots, 6$, το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απάντησε σωστά την ερώτηση i. Μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6},$$

$$P(S_i|A) = 0.2, \quad P(S_i|B) = 0.5, \quad P(S_i|C) = 0.8, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

   Τέλος, έστω D το ενδεχόμενο ο φοιτητής να περάσει το μάθημα.

   (α΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, τότε κάθε μια από τις 6 ερωτήσεις θα απαντηθεί σωστά με πιθανότητα 0.2 ανεξάρτητα από τις άλλες. Επομένως, το πλήθος X των σωστών απαντήσεων θα ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 6$ και $p = 0.2$ και θα έχουμε

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k}.$$

   (β΄) Ο φοιτητής θα περάσει το μάθημα αν απαντήσει τουλάχιστον 4 ερωτήσεις σωστά. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(D) = \binom{6}{4} 0.2^4 0.8^2 + \binom{6}{5} 0.2^5 0.8^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 0.8^0 \simeq 0.0170.$$

   (γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(D|A)}{\frac{1}{2}P(D|A) + \frac{1}{3}P(D|B) + \frac{1}{6}P(D|C)}, \end{aligned}$$

   όπου η $P(D|A)$ είναι αυτή που έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος, ενώ για τις άλλες δεσμευμένες πιθανότητες, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} P(D|B) &= \binom{6}{4} 0.5^4 0.5^2 + \binom{6}{5} 0.5^5 0.5^1 + \binom{6}{6} 0.5^6 0.5^0 \simeq 0.3438, \\ P(D|C) &= \binom{6}{4} 0.8^4 0.2^2 + \binom{6}{5} 0.8^5 0.2^1 + \binom{6}{6} 0.8^6 0.2^0 \simeq 0.9091. \end{aligned}$$

   Με αντικατάσταση, τελικά προκύπτει πως

$$P(A|D) \simeq 0.0243.$$

2. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή από τις θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν συνολικά $5+10+15 = 30$ σοκολατάκια και επομένως $\binom{30}{3}$ συνδυασμοί από τριάδες με σοκολατάκια που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ ο Σταύρος να επιλέξει x σοκολατάκια λικέρ και y σοκολατάκια πραλίνα, όπου $0 \leq x, y \leq 3$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως αν $x + y > 3$ τότε η πιθανότητα είναι μηδέν, αφού ο Σταύρος θα φάει μόνο 3 σοκολατάκια. Στην περίπτωση που $x+y \leq 3$, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{5}{x}$ τρόπους να επιλέξουμε x σοκολατάκια λικέρ, ακολούθως $\binom{10}{y}$ τρόπους να επιλέξουμε y σοκολατάκια πραλίνας και, τέλος, $\binom{15}{4-x-y}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $3 - x - y$ σοκολατάκια γουασάμπι. Επομένως:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{15}{3-x-y}}{\binom{30}{3}}.$$

Σε μορφή πίνακα:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	13/116	15/58	135/812	6/203
1	15/116	75/406	45/812	0
2	15/406	5/203	0	0
3	1/406	0	0	0

(β΄) Υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη μέση τιμή. Ο τρόπος με τις λιγότερες πράξεις είναι ο εξής: έστω C_i, όπου $i = 1, 2, 3$ οι θερμίδες που θα έχει το κάθε σοκολατάκι από τα 3 που θα φάει ο Σταύρος. Παρατηρούμε πως

$$E(C_i) = \frac{5}{30} \times 80 + \frac{10}{30} \times 100 + \frac{15}{30} \times 120 = \frac{320}{3} \simeq 106.67,$$

Η μέση τιμή από θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος θα είναι

$$E\left(\sum_{i=1}^{3} C_i\right) = 3E(C_i) = 320.$$

Παρατηρήστε ότι τα C_i, $i = 1, 2, 3$, δεν είναι ανεξάρτητα, παρόλα αυτά οι άνω υπολογισμοί είναι σωστοί.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{58} + \frac{135}{812} + \frac{6}{203}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{116} + \frac{75}{406} + \frac{45}{812}\right) + 2 \cdot \left(\frac{15}{406} + \frac{5}{203}\right) + 3 \cdot \frac{1}{406} \\
&= \frac{1}{2}, \\
E(Y) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{116} + \frac{15}{406} + \frac{1}{406}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{58} + \frac{75}{406} + \frac{5}{203}\right) + 2 \cdot \left(\frac{135}{812} + \frac{45}{812}\right) + 3 \cdot \frac{6}{203} \\
&= 1, \\
E(C) &= E(80X + 100Y) = 80E(X) + 100E(Y) = 140.
\end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι οι μέσες τιμές $E(X)$ και $E(Y)$ θα μπορούσαν να υπολογιστούν με λιγότερες πράξεις παρατηρώντας, εναλλακτικά, πως $X = X_1 + X_2 + X_3$ και $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ όπου οι X_i και Y_i, $i = 1, 2, 3$, κατάλληλα ορισμένες Τ.Μ. Bernoulli.

(γ΄) Έστω D το ενδεχόμενο ο Σταύρος να μην φάει ούτε ένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λυθεί η άσκηση. Ο πρώτος είναι να κάνουμε χρήση του πρώτου σκέλους:

$$P(D) = P(X+Y=3) = \frac{1}{406} + \frac{5}{203} + \frac{45}{812} + \frac{6}{203} = \frac{13}{116}.$$

Εναλλακτικά, έστω $A_i, i = 1, 3$ το ενδεχόμενο το σοκολατάκι i να μην είναι με γέμιση γουασάμπι. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) = \frac{15}{30} \times \frac{14}{29} \times \frac{13}{28} = \frac{13}{116}.$$

Τέλος, μια τρίτη λύση είναι να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν $\binom{15}{3}$ συνδυασμοί από σοκολατάκια χωρίς γουασάμπι, επομένως

$$P(D) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{15 \times 14 \times 13}{30 \times 29 \times 28} = \frac{13}{116}.$$

3. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1,2], \\ 0, & x \notin [1,2], \end{cases}$$

μιας Τ.Μ., X, όπου το c είναι παράμετρος.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου c.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

(δ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε ένα t τέτοιο ώστε $P(X \le t) = P(X \ge t)$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_1^2 e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow c\left[-e^{-x}\right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^{-1} - e^{-2}}.$$

(β΄) Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δίνεται από την εξίσωση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Καθώς η $f(x)$ είναι κλαδική συνάρτηση, θα εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $x < 1$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\int_h^x 0\,dt = \lim_{h\to-\infty} 0 = 0.$$

Αν $x > 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^x 0\,dt\right] = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^1 0\,dt + \int_1^2 ce^{-t}\,dt + \int_2^x 0\right] = 1.$$

Τέλος, αν $1 \le x \le 2$, τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^x 0\,dt\right] = \lim_{h\to-\infty}\left[\int_h^1 0\,dt + \int_1^x ce^{-t}\,dt\right] = \left[ce^{-t}\right]_1^x = \frac{e^{-1} - e^{-x}}{e^{-1} - e^{-2}}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{e^{-1} - e^{-x}}{e^{-1} - e^{-2}}, & 1 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = c\int_1^2 xe^{-x}\,dx = c\int_1^2 x(-e^{-x})'\,dx = c\left[-xe^{-x}\right]_1^2 + c\int_1^2 (-e^{-x})'\,dx \\
&= c\left[e^{-1}-2e^{-2}\right] + c\left[e^{-1}-e^{-2}\right] = \frac{2e^{-1}-3e^{-2}}{e^{-1}-e^{-2}}.
\end{aligned}$$

(δ΄) Επειδή πρέπει $P(X \le t) + P(X \ge t) = 1$, θα έχουμε $P(X \le t) = P(X \ge t) = \frac{1}{2}$.
Το απλούστερο είναι να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που έχουμε βρει:

$$F(x) = \frac{e^{-1}-e^{-t}}{e^{-1}-e^{-2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-1}-e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \Leftrightarrow t = -\log\left[\frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right].$$

4. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητας το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

Λύση:

(α΄) Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι η

$$p_X(70) = \frac{1}{2}, \quad p_X(80) = \frac{1}{3}, \quad p_X(90) = \frac{1}{6},$$

επομένως η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \frac{1}{2}\times 70 + \frac{1}{3}\times 80 + \frac{1}{6}\times 90 = \frac{230}{3} \simeq 76.66, \\
E(X^2) &= \frac{1}{2}\times 70^2 + \frac{1}{3}\times 80^2 + \frac{1}{6}\times 90^2 = \frac{17800}{3} \simeq 5933.33, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{500}{9} \simeq 55.55, \\
\sigma_X &= \sqrt{\mathrm{VAR}(X)} \simeq 7.45.
\end{aligned}$$

(β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$ τα βάρη των 100 αυγών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπου οι μ_X, σ_X δίνονται στο πρώτο σκέλος και $N = 100$:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^N X_i \le 7800\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \le \frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \simeq \Phi(1.7889) \simeq 0.9632.
\end{aligned}$$

(γ΄) Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. Εδώ όμως, το πλήθος N των Τ.Μ. που θα προστεθούν είναι το ζητούμενο. Έχουμε:

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i \ge 10^4\right) \le 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \ge \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \le 0.01$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \le 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \ge 0.99 \Leftrightarrow \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \ge \Phi^{-1}(0.99)$$

$$\Leftrightarrow 10^4 - N\mu_X - \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X \ge 0 \Leftrightarrow \mu_X N + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X - 10^4 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{N_1} \le \sqrt{N} \le \sqrt{N_2},$$

όπου
$$\sqrt{N_{1,2}} = \frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X \pm \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X}.$$
Παρατηρήστε πως η μία από τις δύο ρίζες είναι αρνητική, ενώ η άλλη θετική. Προκύπτει, τελικά, πως θα πρέπει
$$N \leq \left(\frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X + \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X} \right)^2 \simeq 127.8772.$$
Επομένως, ο Σταύρος μπορεί να φάει άφοβα μέχρι 127 αυγά.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

   (α´) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

   (β´) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

2. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα ($\heartsuit$), ένα σπαθί ($\clubsuit$), ένα καρό ($\diamondsuit$) και ένα μπαστούνι ($\spadesuit$). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:

$$A\clubsuit,\ A\diamondsuit,\ A\spadesuit,\ A\heartsuit,\ K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\spadesuit,\ K\heartsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\spadesuit,\ Q\heartsuit,\ J\clubsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ J\heartsuit.$$

   Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

   (α´) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X.

   (β´) *(1 μονάδα)* Είναι οι Τ.Μ. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ´) *(1.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y.

3. **(Πυρκαγιές)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K\left[25 - (x-40)^2\right], & 35 \le x \le 45, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

   (α´) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β´) *(1 μονάδα)* Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

4. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαία αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

   (α´) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;

   (β´) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;

   (γ´) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Προέδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad (A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B',$$
$$P(A)\geq 0\,\forall A\in\mathcal{F},\quad P(\Omega)=1,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow P(_1\cup{}_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$
$$P(A')=1-P(A),\quad P(\emptyset)=0,\quad P(A)\leq 1,\quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B),\quad P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)\leq P(A)+P(B),\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A'\cap B)+P(A'\cap B'\cap C),$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$
$$P()=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B'),\quad P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')},$$
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)}\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}).$$
$$A,B\text{ ανεξάρτητα}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

$$p_X(x)=P(X=x)=P(\{\omega:X(\omega)=x\})\,\forall x\in S_X,\quad F_X(x)=P(X\leq x),\quad \lim_{t\to x^-}F(t)=P(X<x),\quad E(X)=\sum_{x\in S_X}xp_X(x),$$
$$E(g(X))=\sum_{x\in S_X}g(x)p_X(x),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad E(\sum_{i=1}^n a_ig_i(X))=\sum_{i=1}^n a_iE(g_i(X)),$$
$$\sigma^2=\mathrm{VAR}(X)=E\big[(X-\mu)^2\big]=E(X^2)-(E(X))^2,\quad \mathrm{VAR}(aX+b)=a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{k=0}^{\infty}{}^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad (a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
$$X\sim\mathrm{Bern}(p),\quad p_X(0)=1-p,\ p_X(1)=p,\ E(X)=p,\ \mathrm{VAR}(X)=p(1-p),$$
$$X\sim\text{Διων}(N,p),\ p_X(k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k},\ E(X)=Np,\ \mathrm{VAR}(X)=Np(1-p),$$
$$X\sim\text{Γεωμ}(p),\ p_X(k)=(1-p)^{k-1}p,\ E(X)=1/p,\ \mathrm{VAR}(X)=(1-p)/p^2,\ P(X\geq m+n|X>n)=P(X\geq m),\ m\geq 1,n\geq 0,$$
$$X\sim\text{Υπερ}(N,k,n),\ p_X(m)=\frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=\frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X\sim\mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X)=\lambda,\ \mathrm{VAR}(X)=\lambda.$$

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)\quad\forall x\in S_X,\,\forall y\in S_Y,\quad p_X(x)=\sum_{y\in S_Y}p_{XY}(x,y),\quad p_Y(y)=\sum_{x\in S_X}p_{XY}(x,y),$$
$$E(g(X,Y))=\sum_{x,y}g(x,y)p_{XY}(x,y),\quad E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,\quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y))=\sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\mathrm{COV}(X,Y),$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)\,\forall A,B\Leftrightarrow p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\,\forall x,y,$$
$$X,Y\text{ ανεξάρτητες}\Rightarrow E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y)),\quad \mathrm{COV}(X,Y)=0,\quad p_{X+Y}(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_X(k)p_Y(m-k),\ m\in\mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i+b)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)+b,\quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{VAR}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx, \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b],\\ 0, & \text{για } x\notin[a,b],\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0,\\ 0, & \text{για } x<0,\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint\limits_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases}\int_a^b\left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\right)dx,\\ \int_c^d\left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\right)dy,\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0\Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1,X_2,\ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases}\forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1,\end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N (X_i-\mu) = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases}P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty.\end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2023-2024
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2023-2024

1. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

   Λύση:

   (α΄) Υπάρχουν συνολικά $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί, εκ των οποίων $\binom{12}{5}$ περιλαμβάνουν μόνο φιγούρες, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$p = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}.$$
   Εναλλακτικά, έστω πως επιλέγουμε τα φύλλα διαδοχικά και έστω A_i, $i = 1, \ldots, 5$ το ενδεχόμενο η επιλογή μας i να είναι φιγούρα. Θα έχουμε
$$\begin{aligned} p &= P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4) \\ &= \frac{12}{52} \times \frac{11}{51} \times \frac{10}{50} \times \frac{9}{49} \times \frac{8}{48} \simeq 3.05 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

   (β΄) Έστω Y το πλήθος από φιγούρες που θα βρεθούν στα 5 φύλλα. Παρατηρούμε πως το πλήθος των συνδυασμών 5 φύλλων με k φιγούρες είναι $\binom{12}{k}\binom{40}{5-k}$, καθώς έχουμε $\binom{12}{k}$ τρόπους να επιλέξουμε k φιγούρες και $\binom{40}{5-k}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα φύλλα, ώστε να φτιάξουμε ένα συνδυασμό 5 φύλλων. Επομένως,
$$p_Y(k) = \frac{\binom{12}{k}\binom{40}{5-k}}{\binom{52}{5}},$$
   και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με
$$p_Y(3) + p_Y(4) + p_Y(5) = \frac{\binom{12}{3}\binom{40}{2}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{4}\binom{40}{1}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{12}{5}\binom{40}{0}}{\binom{52}{5}} \simeq 0.0739.$$

2. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα ($\heartsuit$), ένα σπαθί ($\clubsuit$), ένα καρό ($\diamondsuit$) και ένα μπαστούνι ($\spadesuit$). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:
$$A\clubsuit,\ A\diamondsuit,\ A\spadesuit,\ A\heartsuit,\ K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\spadesuit,\ K\heartsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\spadesuit,\ Q\heartsuit,\ J\clubsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ J\heartsuit.$$
   Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Είναι οι Τ.Μ. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ΄) *(1.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y.

   Λύση:

   (α΄) Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli I_i, $i = 1, 2, 3$, ίσες με 1 αν το φύλλο i που επιλέγουμε είναι ρήγας και 0 αλλιώς. Η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με
$$E\left(\sum_{i=1}^{3} I_i\right) = 3 \times \left(1 \times \frac{4}{16} + 0 \times \frac{12}{16}\right) = \frac{3}{4}.$$

Εναλλακτικά, αλλά με περισσότερες πράξεις, παρατηρούμε πως

$$P(X=k)=\frac{\binom{4}{k}\binom{12}{3-k}}{\binom{16}{3}},$$

όπου $k=0,1,2,3$. Πράγματι, έχουμε $\binom{4}{k}$ τρόπους για να επιλέξουμε k ρηγάδες από τους διαθέσιμους 4 και $\binom{12}{3-k}$ τρόπους για να επιλέξουμε άλλα $3-k$ φύλλα από τα υπόλοιπα 12 διαθέσιμα φύλλα για να φτιάξουμε μια τριάδα φύλων. Επομένως, η μέση τιμή $E(X)$ ισούται με

$$E(X)=0\times\frac{\binom{4}{0}\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}}+1\times\frac{\binom{4}{1}\binom{12}{2}}{\binom{16}{3}}+2\times\frac{\binom{4}{2}\binom{12}{1}}{\binom{16}{3}}+3\times\frac{\binom{4}{3}\binom{12}{0}}{\binom{16}{3}}=\frac{3}{4}.$$

(β΄) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, παρατηρήστε πως υπάρχουν $\binom{16}{3}$ συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε. Από αυτούς, ακριβώς 4 έχουν 3 ρηγάδες, καθώς έχουμε 4 επιλογές για το ποιος ρήγας δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό. Έχουμε επίσης 4 συνδυασμούς μόνο με κούπες (γιατί έχουμε 4 τρόπους να αποφασίσουμε ποια κούπα δεν θα εμφανιστεί στο συνδυασμό). Όμως δεν υπάρχει κανένας συνδυασμός που να έχει και 3 ρηγάδες και 3 κούπες. Επομένως, προκύπτουν οι ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(X=3)=\frac{4}{\binom{16}{3}},\quad P(Y=3)=\frac{4}{\binom{16}{3}},\quad P(X=3,Y=3)=0.$$

Έχουμε, λοιπόν, $P(X=x,Y=y)\neq P(X=x)P(Y=3)$, για κάποιο συνδυασμό x,y και, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι Τ.Μ. X,Y δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες.

(γ΄) Οι X και Y μπορούν να λάβουν τις τιμές $0,1,2,3$. Παρατηρούμε πως

$$P(X=2,Y=3)=P(X=3,Y=2)=P(X=3,Y=3)=0.$$

Πράγματι, αφού υπάρχει μόνο ένας ρήγας κούπα, δεν μπορούμε να έχουμε στα 3 φύλλα που θα επιλέξουμε ούτε 2 ρηγάδες και μόνο κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και 2 κούπες, ούτε μόνο ρηγάδες και μόνο κούπες.

Για κάθε ένα από τους υπόλοιπους συνδυασμούς τιμών, πρέπει να λύσουμε ένα πρόβλημα συνδυαστικής. Παρατηρούμε, καταρχάς, πως υπάρχουν συνολικά $\binom{16}{3}$ τρόποι για να λάβουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από 16 φύλλα. Επιπλέον,

i. Υπάρχουν 9 φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, και $\binom{9}{3}$ τρόποι να τα επιλέξουμε, επομένως

$$P(X=0,Y=0)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}.$$

ii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα και μόνο μια κούπα, έχουμε 3 επιλογές για το φύλλο που είναι μεν κούπα αλλά όχι ρήγας και $\binom{9}{2}$ επιλογές για τα φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα. Επομένως

$$P(X=0,Y=1)=\frac{3\times\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}.$$

iii. Για να μην επιλέξουμε κανένα ρήγα αλλά να επιλέξουμε 2 κούπες, έχουμε 3 επιλογές για την κούπα που δεν θα επιλέξουμε (παρατηρήστε ότι ο ρήγας κούπα σίγουρα δεν θα επιλεγεί), και 9 επιλογές για το φύλλο που δεν θα είναι ούτε κούπα ούτε ρήγας. Επομένως,

$$P(X=0,Y=2)=\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

iv. Μόνο ένας συνδυασμός έχει μόνο κούπες και κανένα ρήγα. Επομένως,

$$P(X=0,Y=3)=\frac{1}{\binom{16}{3}}.$$

v. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς μια κούπα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλα δύο φύλλα που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα, κάτι που γίνεται με $\binom{9}{2}$ τρόπους, είτε να επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους), μια κούπα που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) και τέλος ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{9}{2}+3\times 3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vi. Θα επιλέξουμε ακριβώς ένα ρήγα και ακριβώς δύο κούπες με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είτε θα επιλέξουμε ένα ρήγα που δεν είναι κούπα (γίνεται με 3 τρόπους) και δύο κούπες που δεν είναι ρήγας (γίνεται με 3 τρόπους) είτε θα επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, μια κούπα ακόμα (γίνεται με 3 τρόπους) και ένα φύλλο που δεν είναι ούτε ρήγας ούτε κούπα (γίνεται με 9 τρόπους). Επομένως,

$$P(X=1,Y=2) = \frac{3\times 3 + 3\times 9}{\binom{16}{3}}.$$

vii. Θα επιλέξουμε ένα ρήγα και 3 κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα και άλλες δύο κούπες από τις 3 διαθέσιμες. Αυτό μπορεί να γίνει με 3 τρόπους. Επομένως

$$P(X=1,Y=3) = \frac{3}{\binom{16}{3}}.$$

viii. Θα επιλέξουμε δύο ρηγάδες και δύο κούπες αν επιλέξουμε τον ρήγα κούπα, ακόμα ένα ρήγα από τους 3 διαθέσιμους, και ακόμα μια κούπα από τις 3 διαθέσιμες. Επομένως,

$$P(X=2,Y=2) = \frac{3\times 3}{\binom{16}{3}}.$$

Τέλος, λόγω συμμετρίας, θα πρέπει $P(X=i,Y=j) = P(X=j,Y=i)$, δηλαδή η από κοινού μάζα πιθανότητας είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Χρησιμοποιώντας αυτή τη συμμετρία, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$
1	$\frac{3\binom{9}{2}}{\binom{16}{3}}$	$\frac{\binom{9}{2}+3\times 3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3+3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$
2	$\frac{3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3+3\times 9}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3\times 3}{\binom{16}{3}}$	0
3	$\frac{1}{\binom{16}{3}}$	$\frac{3}{\binom{16}{3}}$	0	0

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι τόσο οι γραμμές όσο και οι στήλες αθροίζονται στην μάζα πιθανότητας που έχει δοθεί στο πρώτο σκέλος.

3. **(Πυρκαγιές)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K\left[25-(x-40)^2\right], & 35 \le x \le 45, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

(β΄) *(1 μονάδα)* Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{35}^{45} K\left[25-(x-40)^2\right]\,dx = K\int_{35}^{45}\left[25x - \frac{(x-40)^3}{3}\right]'\,dx \\ &= K\left[25x - \frac{(x-40)^3}{3}\right]_{35}^{45} = K\left[25\times 45 - \frac{125}{3} - 25\times 35 - \frac{125}{3}\right] = \frac{500K}{3}, \end{aligned}$$

επομένως, καθώς το άνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μονάδα, έχουμε $K = \frac{3}{500}$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η ζητούμενη αναμενόμενη τιμή θα είναι

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = K\int_{35}^{45} e^{x-40}\left[25-(x-40)^2\right]\,dx \\ &= 25K\int_{35}^{45} e^{x-40}\,dx - K\int_{35}^{45} e^{x-40}(x-40)^2\,dx = 25K(e^5-e^{-5}) - K\int_{-5}^{5} e^t t^2\,dx, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα κάναμε την αντικατάσταση $t = x - 40$. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{5} e^t t^2\,dt &= \int_{-5}^{5} (e^t)' t^2\,dt = \left[e^t t^2\right]_{-5}^{5} - 2\int_{-5}^{5} e^t t\,dt = 25(e^5 - e^{-5}) - 2\left[te^t\right]_{-5}^{5} + 2\int_{-5}^{5} e^t\,dt \\ &= 25(e^5 - e^{-5}) - 10e^5 - 10e^{-5} + 2e^5 - 2e^{-5} = 17e^5 - 37e^{-5}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$E(g(X)) = 25K(e^5 - e^{-5}) - K(17e^5 - 37e^{-5}) = \frac{3}{500}\left(8e^5 + 12e^{-5}\right).$$

4. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαία αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Προέδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

   Λύση:

   (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο ο Πρόεδρος να είναι ξεκούραστος και B να κάνει 2 σαρδάμ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\ &= \frac{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6}{\binom{2}{2}0.25^2(1-0.25)^{2-2}0.6 + \binom{3}{2}0.5^2 0.5^{3-2}0.4} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

   (β΄) Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχει μέση τιμή $\mu = Np = \frac{1}{2}$ και διασπορά $\sigma^2 = Np(1-p) = \frac{3}{8}$.

   (γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$, το πλήθος από σαρδάμ που θα κάνει ο Πρόεδρος την μέρα i. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 55\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{55 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0.2071.\end{aligned}$$