ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2022
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Πατάτες)** Όταν ο Σταύρος τηγανίζει πατάτες, τις πετυχαίνει με πιθανότητα 0.8 όταν αυτές είναι καλής ποιότητας. Αν όμως δεν είναι καλής ποιότητας, τις πετυχαίνει με πιθανότητα 0.4. Οι πατάτες είναι καλής ποιότητας με πιθανότητα 0.3.

   (α΄) *(1 μονάδες)* Με δεδομένο ότι ο Σταύρος μόλις τηγάνισε και προέκυψε πως πέτυχε τις πατάτες, ποια η πιθανότητα να ήταν αυτές καλής ποιότητας;

   (β΄) *(1 μονάδες)* Αν ο Σταύρος τηγανίσει δύο φορές, με πατάτες της *ίδιας*, αλλά άγνωστης ποιότητας, και πετύχουν και οι δύο φορές, ποια η πιθανότητα να ήταν οι πατάτες καλής ποιότητας; Υποθέστε ότι με δεδομένη την ποιότητα, τα ενδεχόμενα επιτυχίας σε διαφορετικές τηγανιές είναι ανεξάρτητα.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Σε συνέχεια του προηγούμενου σκέλους, όπου ο Σταύρος έχει ήδη τηγανίσει δύο επιτυχημένες τηγανιές, αν ο Σταύρος τηγανίσει και τρίτη φορά, ποια η πιθανότητα να είναι και η τρίτη τηγανιά πετυχημένη; Αναφέρετε τυχόν επιπλέον υποθέσεις.

2. **(Τηγανητές Πατάτες)** Σε ένα μεγάλο τηγάνι τηγανίζουμε 20 κομμάτια πατάτας σε σχήμα ροδέλας (*όχι* κυδωνάτες ή μακρόστενες), ώστε κάθε μια ροδέλα να έχει ακριβώς 2 πλευρές, και ανά πάσα στιγμή να τηγανίζεται μόνο η μία πλευρά. Αρχικά τοποθετούμε τις ροδέλες στο τηγάνι από μια πλευρά την κάθε μία. Ακολούθως εκτελούμε επανειλημμένως το ακόλουθο πείραμα: επιλέγουμε μόνο μια ροδέλα στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην ροδέλα, και χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν άλλα πειράματα, και την αναποδογυρίζουμε, ώστε να αλλάξει πλευρά. Εκτελούμε αυτό το πείραμα ακριβώς 40 φορές.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Πόσες είναι κατά μέσο όρο οι ροδέλες που δεν θα αναποδογυριστούν καμία φορά από τις 40; Διευκολύνει να υπολογίσετε πρώτα την πιθανότητα να μην αναποδογυριστεί μια συγκεκριμένη ροδέλα καμία φορά από τις 40.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Έστω μια συγκεκριμένη ροδέλα, η ροδέλα A. Ποια είναι η κατανομή του πλήθους των φορών που αναποδογυρίζει η ροδέλα A;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες ροδέλες θα γυρίσουν ακριβώς μια φορά κατά τη διάρκεια όλων των πειραμάτων;

3. **(Πατατοσαλάτα)** *(2 μονάδες)* Έχουμε στη διάθεσή μας 2 πατάτες Νάξου, 3 πατάτες Κύπρου και 5 πατάτες Τριπόλεως. Επιλέγουμε 3 από αυτές τις 10 συνολικά πατάτες, για να κάνουμε μια πατατοσαλάτα, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από πατάτες Νάξου και Y το πλήθος από πατάτες Κύπρου που θα επιλέξουμε. Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των X, Y.

4. **(Le Mans πατάτας)** Ο χρόνος, σε λεπτά, που χρειάζεται για να τηγανιστεί μια τηγανιά πατάτες είναι συνεχής Τ.Μ X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}, & 20 \leq x \leq 25, \\ \frac{2}{15} \times \left(\frac{30-x}{5}\right), & 25 < x \leq 30, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\text{VAR}(X)$ της Τ.Μ. X. Δεν χρειάζεται να κάνετε τυχόν αριθμητικές πράξεις.

(β΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε την πιθανότητα να προλάβουμε να ολοκληρώσουμε 60 τηγανιές μέσα σε 24 ώρες, υποθέτοντας ότι η μια τηγανιά αρχίζει αμέσως μόλις τελειώσει η επόμενη, και ότι οι χρόνοι τηγανίσματος είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Για αυτό το σκέλος, θεωρήστε γνωστές την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της X, και μην αντικαταστήσετε τις τιμές που βρήκατε στο προηγούμενο σκέλος. Δώστε την απάντηση χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad (A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B',$$
$$P(A)\geq 0\,\forall A\in\mathcal{F},\quad P(\Omega)=1,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow P(_1\cup{}_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$
$$P(A')=1-P(A),\quad P(\emptyset)=0,\quad P(A)\leq 1,\quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B),\quad P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)\leq P(A)+P(B),\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A'\cap B)+P(A'\cap B'\cap C),$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$
$$P()=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B'),\quad P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')},$$
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)\quad(\{B_i\}\ \text{διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)}\quad(\{B_i\}\ \text{διαμέριση}).$$
$$A,B\ \text{ανεξάρτητα}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

$$p_X(x)=P(X=x)=P(\{\omega:X(\omega)=x\})\,\forall x\in S_X,\quad F_X(x)=P(X\leq x),\quad \lim_{t\to x^-}F(t)=P(X<x),\quad E(X)=\sum_{x\in S_X}xp_X(x),$$
$$E(g(X))=\sum_{x\in S_X}g(x)p_X(x),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad E(\sum_{i=1}^n a_ig_i(X))=\sum_{i=1}^n a_iE(g_i(X)),$$
$$\sigma^2=\mathrm{VAR}(X)=E\big[(X-\mu)^2\big]=E(X^2)-(E(X))^2,\quad \mathrm{VAR}(aX+b)=a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{k=0}^\infty kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{k=0}^\infty {}^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!},\quad (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
$$X\sim\mathrm{Bern}(p),\quad p_X(0)=1-p,\ p_X(1)=p,\ E(X)=p,\ \mathrm{VAR}(X)=p(1-p),$$
$$X\sim\text{Διων}(N,p),\ p_X(k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k},\ E(X)=Np,\ \mathrm{VAR}(X)=Np(1-p),$$
$$X\sim\text{Γεωμ}(p),\ p_X(k)=(1-p)^{k-1}p,\ E(X)=1/p,\ \mathrm{VAR}(X)=(1-p)/p^2,\ P(X\geq m+n|X>n)=P(X\geq m),\ m\geq 1,n\geq 0,$$
$$X\sim\text{Υπερ}(N,k,n),\ p_X(m)=\frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=\frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X\sim\mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X)=\lambda,\ \mathrm{VAR}(X)=\lambda.$$

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)\quad\forall x\in S_X,\ \forall y\in S_Y,\quad p_X(x)=\sum_{y\in S_Y}p_{XY}(x,y),\quad p_Y(y)=\sum_{x\in S_X}p_{XY}(x,y),$$
$$E(g(X,Y))=\sum_{x,y}g(x,y)p_{XY}(x,y),\quad E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,\quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y))=\sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\mathrm{COV}(X,Y),$$
$$X,Y\ \text{ανεξάρτητες}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B\Leftrightarrow p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\ \forall x,y,$$
$$X,Y\ \text{ανεξάρτητες}\Rightarrow E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y)),\quad \mathrm{COV}(X,Y)=0,\quad p_{X+Y}(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_X(k)p_Y(m-k),\ m\in\mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i+b)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)+b,\quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{VAR}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2021-2022
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2021-2022

1. **(Πατάτες)** Όταν ο Σταύρος τηγανίζει πατάτες, τις πετυχαίνει με πιθανότητα 0.8 όταν αυτές είναι καλής ποιότητας. Αν όμως δεν είναι καλής ποιότητας, τις πετυχαίνει με πιθανότητα 0.4. Οι πατάτες είναι καλής ποιότητας με πιθανότητα 0.3.

   (α΄) *(1 μονάδες)* Με δεδομένο ότι ο Σταύρος μόλις τηγάνισε και προέκυψε πως πέτυχε τις πατάτες, ποια η πιθανότητα να ήταν αυτές καλής ποιότητας;

   (β΄) *(1 μονάδες)* Αν ο Σταύρος τηγανίσει δύο φορές, με πατάτες της *ίδιας*, αλλά άγνωστης ποιότητας, και πετύχουν και οι δύο φορές, ποια η πιθανότητα να ήταν οι πατάτες καλής ποιότητας; Υποθέστε ότι με δεδομένη την ποιότητα, τα ενδεχόμενα επιτυχίας σε διαφορετικές τηγανιές είναι ανεξάρτητα.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Σε συνέχεια του προηγούμενου σκέλους, όπου ο Σταύρος έχει ήδη τηγανίσει δύο επιτυχημένες τηγανιές, αν ο Σταύρος τηγανίσει και τρίτη φορά, ποια η πιθανότητα να είναι και η τρίτη τηγανιά πετυχημένη; Αναφέρετε τυχόν επιπλέον υποθέσεις.

   Λύση:

   (α΄) Έστω Q το ενδεχόμενο να είναι καλής ποιότητας οι πατάτες, και S το ενδεχόμενο ο Σταύρος να τις πετύχει. Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes,

$$P(Q|S) = \frac{P(S|Q)P(Q)}{P(S|Q)P(Q) + P(S|Q')P(Q')} = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.4 \times 0.7} = \frac{6}{13} \simeq 0.46.$$

   (β΄) Έστω S_1 και S_2 τα ενδεχόμενα να είναι επιτυχημένη η πρώτη και η δεύτερη τηγανιά αντιστοίχως. Έχουμε, με χρήση του Κανόνα του Bayes, και χρησιμοποιώντας τη δοσμένη υπόθεση της ανεξαρτησίας,

$$\begin{aligned} P(Q|S_1S_2) &= \frac{P(S_1S_2|Q)P(Q)}{P(S_1S_2|Q)P(Q) + P(S_1S_2|Q')P(Q')} \\ &= \frac{P(S_1|Q)P(S_2|Q)P(Q)}{P(S_1|Q)P(S_2|Q)P(Q) + P(S_1|Q')P(S_2|Q')P(Q')} \\ &= \frac{0.8^2 \times 0.3}{0.8^2 \times 0.3 + 0.4^2 \times 0.7} \simeq 0.6315. \end{aligned}$$

   (γ΄) Για να υπολογίσουμε το ενδεχόμενο να είναι η τρίτη τηγανιά επιτυχημένη, με δεδομένο ότι ήταν οι πρώτες δύο, μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της ολικής πιθανότητας, αλλά με δέσμευση στο ενδεχόμενο S_1S_2, ως εξής:

$$\begin{aligned} P(S_3|S_1S_2) &= P(S_3|QS_1S_2)P(Q|S_1S_2) + P(S_3|Q'S_1S_2)P(Q'|S_1S_2) \\ &= P(S_3|Q)P(Q|S_1S_2) + P(S_3|Q')P(Q'|S_1S_2) \\ &= 0.8 \times 0.6315 + 0.4 \times (1 - 0.6315) = 0.65. \end{aligned}$$

   Υποθέσαμε ότι αν οι πατάτες είναι συγκεκριμένης γνωστής ποιότητας, η πιθανότητα επιτυχίας μιας τηγανιάς δεν επηρεάζεται από τα αποτελέσματα άλλων τηγανιών.

2. **(Τηγανητές Πατάτες)** Σε ένα μεγάλο τηγάνι τηγανίζουμε 20 κομμάτια πατάτας σε σχήμα ροδέλας (*όχι* κυδωνάτες ή μακρόστενες), ώστε κάθε μια ροδέλα να έχει ακριβώς 2 πλευρές, και ανά πάσα στιγμή να τηγανίζεται μόνο η μία πλευρά. Αρχικά τοποθετούμε τις ροδέλες στο τηγάνι από μια πλευρά την κάθε μία. Ακολούθως εκτελούμε επανειλημμένως το ακόλουθο πείραμα: επιλέγουμε μόνο μια ροδέλα στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην ροδέλα, και χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν άλλα πειράματα, και την αναποδογυρίζουμε, ώστε να αλλάξει πλευρά. Εκτελούμε αυτό το πείραμα ακριβώς 40 φορές.

   Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας:

(α΄) *(1 μονάδα)* Πόσες είναι κατά μέσο όρο οι ροδέλες που δεν θα αναποδογυριστούν καμία φορά από τις 40; Διευκολύνει να υπολογίσετε πρώτα την πιθανότητα να μην αναποδογυριστεί μια συγκεκριμένη ροδέλα καμία φορά από τις 40.

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω μια συγκεκριμένη ροδέλα, η ροδέλα A. Ποια είναι η κατανομή του πλήθους των φορών που αναποδογυρίζει η ροδέλα A;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες ροδέλες θα γυρίσουν ακριβώς μια φορά κατά τη διάρκεια όλων των πειραμάτων;

Λύση:

(α΄) Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli $Y_1, \ldots, Y_{20}$ για τις οποίες $Y_i = 1$ αν η ροδέλα i δεν έχει αναποδογυριστεί καμία φορά και 0 αλλιώς. Επομένως, το πλήθος από πατάτες που δεν αναποδογύρισαν καμία φορά είναι $Y = \sum_{i=1}^{20} Y_i$. Παρατηρούμε πως

$$P(Y_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{40} \simeq e^{-2}.$$

Το μέσο πλήθος από τις ροδέλες που δεν θα αναποδογυρίσουν καμία φορά είναι

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{20} Y_i\right) = 20P(Y_i = 1) = 20e^{-2}.$$

(β΄) Έστω η συγκεκριμένη ροδέλα A. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάνουμε 40 ανεξάρτητα πειράματα, τα οποία είναι επιτυχία όταν αναποδογυριστεί η ροδέλα και αποτυχία αν αναποδογυριστεί άλλη ροδέλα. Κάθε πείραμα είναι επιτυχία με πιθανότητα $\frac{1}{20}$. Επομένως, το πλήθος από αναποδογυρίσματα της συγκεκριμένης ροδέλας ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 40$ και $p = \frac{1}{20}$.

(γ΄) Έστω οι Τ.Μ. Bernoulli $Z_1, \ldots, Z_{20}$ για τις οποίες $Z_i = 1$ αν η ροδέλα i έχει αναποδογυρίσει ακριβώς μια φορά και 0 αλλιώς. Παρατηρούμε πως, βάσει των γνωστών για τη διωνυμική κατανομή,

$$P(Z_i = 1) = 40 \times \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{20}\right)^{39} \simeq 2e^{-2}.$$

Το πλήθος από τις ροδέλες που θα αναποδογυρίσουν ακριβώς μια φορά είναι $Z = \sum_{i=1}^{20} Z_i$, και η μέση τιμή του

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{20} Z_i\right) = 20P(Z_i = 1) = 40e^{-2}.$$

3. **(Πατατοσαλάτα)** *(2 μονάδες)* Έχουμε στη διάθεσή μας 2 πατάτες Νάξου, 3 πατάτες Κύπρου και 5 πατάτες Τριπόλεως. Επιλέγουμε 3 από αυτές τις πατάτες, για να κάνουμε μια πατατοσαλάτα, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από πατάτες Νάξου και Y το πλήθος από πατάτες Κύπρου που θα επιλέξουμε. Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των X, Y.

Λύση: Η X μπορεί να λάβει τις τιμές $0, 1, 2$, ενώ η Y μπορεί να λάβει τις τιμές $0, 1, 2, 3$. Ορισμένοι συνδυασμοί τιμών δεν μπορούν να προκύψουν, καθώς επιλέγουμε μόνο 3 πατάτες. Συγκεκριμένα:

$$P(X = 2,\ Y = 3) = P(X = 2,\ Y = 2) = P(X = 1,\ Y = 3) = 0.$$

Οι άλλες τιμές μπορούν να υπολογιστούν με χρήση συνδυαστικής, ως εξής:

$$\begin{aligned}
P(X=0,Y=0) &= \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}, & P(X=0,Y=1) &= \frac{3\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4},\\
P(X=0,Y=2) &= \frac{3\times 5}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{8}, & P(X=1,Y=0) &= \frac{2\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6},\\
P(X=2,Y=0) &= \frac{5}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{24}, & P(X=0,Y=3) &= \frac{1}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120},\\
P(X=1,Y=1) &= \frac{2\times 3\times 5}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}, & P(X=2,Y=1) &= \frac{3}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{40},\\
P(X=1,Y=2) &= \frac{2\times 3}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, για να προσδιορίσουμε την $P(X=1,Y=0)$ λάβαμε υπόψιν ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμοί 3 αντικειμένων από 10, υπάρχουν 2 τρόποι για να επιλέξουμε τη μία πατάτα Νάξου, και υπάρχουν $\binom{5}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τις άλλες δύο πατάτες Τριπόλεως για να συμπληρώσουμε την τριάδα.

Συγκεντρώνοντας όλες τις τιμές, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα για την από κοινού μάζα πιθανότητας:

x / y	0	1	2
0	1/12	1/6	1/24
1	1/4	1/4	1/40
2	1/8	1/20	0
3	1/120	0	0

4. **(Le Mans πατάτας)** Ο χρόνος, σε λεπτά, που χρειάζεται για να τηγανιστεί μια τηγανιά πατάτες είναι συνεχής Τ.Μ X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}, & 20 \le x \le 25, \\ \frac{2}{15} \times \left(\frac{30-x}{5}\right), & 25 < x \le 30, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$ της Τ.Μ. X. Δεν χρειάζεται να κάνετε τυχόν αριθμητικές πράξεις.

(β΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε την πιθανότητα να προλάβουμε να ολοκληρώσουμε 60 τηγανιές μέσα σε 24 ώρες, υποθέτοντας ότι η μια τηγανιά αρχίζει αμέσως μόλις τελειώσει η επόμενη, και ότι οι χρόνοι τηγανίσματος είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Για αυτό το σκέλος, θεωρήστε γνωστές την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της X, και μην αντικαταστήσετε τις τιμές που βρήκατε στο προηγούμενο σκέλος. Δώστε την απάντηση χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

Λύση: Καταρχάς, παρατηρούμε πως η σταθερά $C = \frac{2}{15}$ επελέγη ώστε το ολοκλήρωμα της $f(x)$ να ισούται με τη μονάδα. Πράγματι, παρατηρούμε, απλά, πως το χωρίο που σχηματίζει το γράφημα της $f(x)$ είναι τραπέζιο με ύψος $\frac{2}{15}$ και βάσεις μήκους 10 και 5, επομένως το ολοκλήρωμα ισούται με $\frac{5+10}{2} \times \frac{2}{15} = 1$.

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{20}^{25} Cx\,dx + \int_{25}^{30} C\left(\frac{30-x}{5}\right) x\,dx = C\left[\frac{x^2}{2}\right]_{20}^{25} + \frac{C}{5}\left[15x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{25}^{30} dx \\ &= \frac{215}{9} \simeq 23.88, \\ E(X^2) &= \int_{20}^{25} Cx^2\,dx + \int_{25}^{30} C\left(\frac{30-x}{5}\right) x^2\,dx = C\left[\frac{x^3}{3}\right]_{20}^{25} + \frac{C}{5}\left[10x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{25}^{30} dx \simeq 576.38, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \simeq 576.38 - 23.88^2 \simeq 6.12, \end{aligned}$$

και άρα η τυπική απόκλιση ισούται με $\sigma \simeq 2.475$.

(β΄) Από τα προηγούμενα σκέλη έχουμε πως κάθε ένας από τους χρόνους τηγανίσματος είναι Τ.Μ. με μέση τιμή $\mu = 23.88$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 2.475$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, και κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i < 24 \times 60\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{60} X_i - 60\mu}{\sqrt{60}\sigma} \le \frac{24 \times 60 - 60\mu}{\sqrt{60}\sigma}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{24 \times 60 - 60\mu}{\sqrt{60}\sigma}\right) = \Phi(0.3756) = 0.6464. \end{aligned}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Τράπουλα)** Μια κανονική τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα που κατανέμονται σε 4 χρώματα (♣, ♢, ♠, ♡) και 13 νούμερα (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K). Από τα 13 νούμερα, τα 3 (J,Q,K) είναι φιγούρες. Υπάρχουν, επομένως, συνολικά 12 φύλλα που είναι φιγούρες. Επιλέγουμε, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό, 7 φύλλα από την τράπουλα. Έστω:

   (α΄) Το ενδεχόμενο A τα 7 επιλεγμένα φύλλα να είναι μόνο φιγούρες,
   (β΄) Το ενδεχόμενο B στα 7 επιλεγμένα φύλλα να υπάρχει ένα καρέ, δηλαδή να υπάρχουν και τα 4 χρώματα ενός νούμερου, και
   (γ΄) Το ενδεχόμενο C τα 7 επιλεγμένα φύλλα να σχηματίζουν κέντα (straight), δηλαδή τα 7 φύλλα να μπορούν να μπουν σε αριθμητική σειρά διαδοχικών αριθμών, όπου οι τρεις φιγούρες J,Q,K, έχουν αντίστοιχα τις αριθμητικές τιμές 11, 12, και 13, ενώ ο άσος A έχει δύο επιτρεπτές τιμές, την 1 και την 14. Παράδειγμα κέντας είναι η επτάδα $7\clubsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, J\spadesuit, Q\heartsuit, K\spadesuit$.

   Να υπολογίσετε τις ακόλουθες πιθανότητες:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $P(A)$.
   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $P(B)$.
   (γ΄) *(1 μονάδα)* $P(A|B)$.
   (δ΄) *(1 μονάδα)* $P(C)$.

   Για αυτό το θέμα, όπως και για όλα τα άλλα, μπορείτε να δώσετε τις απαντήσεις σας ως τύπους, που ενδεχομένως εμφανίζουν τον διωνυμικό συντελεστή $\binom{n}{k}$, χωρίς να κάνετε καμία πράξη ή απλοποιήσεις.

2. **(Βολές)** Ένας παίκτης μπάσκετ θα εκτελέσει σε ένα αγώνα ακριβώς 5 βολές δύο πόντων, κάθε μια εκ των οποίων θα είναι εύστοχη με πιθανότητα 0.6. Επίσης, θα εκτελέσει ακριβώς 3 βολές των τριών πόντων, κάθε μια εκ των οποίων είναι εύστοχη με πιθανότητα 0.3. Κάθε μια από τις βολές δύο ή τριών πόντων είναι εύστοχη ανεξάρτητα από όλες τις άλλες βολές δύο ή τριών πόντων. Έστω X το πλήθος των εύστοχων βολών δύο πόντων και Y το πλήθος των εύστοχων βολών τριών πόντων.

(α΄) *(1 μονάδα)* Να γράψετε τύπους για τις πιθανότητες $P(X = x)$, $P(Y = y)$, και $P(X = x, Y = y)$, όπου $x = 0, \ldots, 5$, $y = 0, \ldots, 3$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο παίκτης να επιτύχει στον αγώνα περισσότερους πόντους από βολές τριών πόντων από ότι με βολές δύο πόντων;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω το ακόλουθο τυχερό παιχνίδι: πριν τον αγώνα δίνουμε 15 ευρώ, και μετά τον αγώνα μας επιστρέφονται $5(X + Y)$ ευρώ. Ποιο είναι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος αυτού του παιχνιδιού;

3. **(Βασίλισσα Ελισάβετ)** Το Ιωβηλαίο έτος 2004 έγκριτοι Βρετανοί εραλδολόγοι είχαν αποφανθεί ότι η ηλικία της Βασίλισσας Ελισάβετ ήταν συνεχής Τ.Μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K(x-90), & 90 < x < 100, \\ K(110-x), & 100 < x < 110, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

όπου K είναι άγνωστη παράμετρος.

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της άγνωστης παραμέτρου K.

(β΄) *(1 μονάδα)* Βάσει της άνω πρόβλεψης, ποια ήταν η πιθανότητα η Βασίλισσα Ελισάβετ να πεθάνει πριν να γίνει 97 ετών;

4. **(Γερμανική επίθεση)** Σε μια επίθεσή της, η εθνική ομάδα καλαθοσφαίρισης της Γερμανίας επιτυγχάνει τρεις πόντους με πιθανότητα $p_1 = 0.6$, δύο πόντους με πιθανότητα $p_2 = 0.3$, και κανένα πόντο με πιθανότητα $p_3 = 0.1$. Οι διαδοχικές επιθέσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Υπολογίστε την μέση τιμή και τη διασπορά του πλήθους των πόντων X που βάζει η γερμανική ομάδα σε μια επίθεση.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα η γερμανική ομάδα να επιτύχει πάνω από 110 πόντους σε 49 επιθέσεις;

(γ΄) *(1.5 μονάδα)* Έστω πως η γερμανική ομάδα πραγματοποιεί 9 επιθέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να επιτύχει ακριβώς 4 φορές τρεις πόντους, ακριβώς 3 φορές δύο πόντους και ακριβώς 2 φορές κανέναν πόντο σε αυτές τις 9 επιθέσεις;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k} = \binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \; \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\; p_X(1) = p,\; E(X) = p,\; \text{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\; E(X) = Np,\; \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,\; E(X) = 1/p,\; \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2,\; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\; E(X) = \frac{nk}{N},\; \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \text{Poisson}(\lambda),\; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\; E(X) = \lambda,\; \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\; \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\text{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\; \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \; \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \; \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m-k),\; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X)=\theta, \quad \mathrm{VAR}(X)=\theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X)=\mu, \quad \mathrm{VAR}(X)=\sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y)=0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)+b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0\Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i)=\sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2022-2023
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2021-2022

1. **(Τράπουλα)** Μια κανονική τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα που κατανέμονται σε 4 χρώματα (♣, ♢, ♠, ♡) και 13 νούμερα (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K). Από τα 13 νούμερα, τα 3 (J,Q,K) είναι φιγούρες. Υπάρχουν, επομένως, συνολικά 12 φύλλα που είναι φιγούρες. Επιλέγουμε, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό, 7 φύλλα από την τράπουλα. Έστω:

   (α΄) Το ενδεχόμενο A τα 7 επιλεγμένα φύλλα να είναι μόνο φιγούρες,

   (β΄) Το ενδεχόμενο B στα 7 επιλεγμένα φύλλα να υπάρχει ένα καρέ, δηλαδή να υπάρχουν και τα 4 χρώματα ενός νούμερου, και

   (γ΄) Το ενδεχόμενο C τα 7 επιλεγμένα φύλλα να σχηματίζουν κέντα (straight), δηλαδή τα 7 φύλλα να μπορούν να μπουν σε αριθμητική σειρά διαδοχικών αριθμών, όπου οι τρεις φιγούρες J,Q,K, έχουν αντίστοιχα τις αριθμητικές τιμές 11, 12, και 13, ενώ ο άσος A έχει δύο επιτρεπτές τιμές, την 1 και την 14. Παράδειγμα κέντας είναι η επτάδα $7♣, 8♢, 9♢, 10♢, J♠, Q♡, K♠$.

   Να υπολογίσετε τις ακόλουθες πιθανότητες:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $P(A)$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $P(B)$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $P(A|B)$.

   (δ΄) *(1 μονάδα)* $P(C)$.

   Για αυτό το θέμα, όπως και για όλα τα άλλα, μπορείτε να δώσετε τις απαντήσεις σας ως τύπους, που ενδεχομένως εμφανίζουν τον διωνυμικό συντελεστή $\binom{n}{k}$, χωρίς να κάνετε καμία πράξη ή απλοποιήσεις.

   Λύση:

   (α΄) Υπάρχουν 52 συνολικά φύλλα και πρέπει να επιλέξουμε τα 7, επομένως υπάρχουν $\binom{52}{7}$ συνολικά συνδυασμοί. Υπάρχουν 12 φιγούρες, επομένως υπάρχουν συνολικά $\binom{12}{7}$ συνδυασμοί που αποτελούνται μόνο από φιγούρες. Προκύπτει ότι

   $$P(A) = \frac{\binom{12}{7}}{\binom{52}{7}} \simeq 5.92 \times 10^{-6}.$$

   (β΄) Υπάρχουν 13 είδη καρέ, ένα για κάθε νούμερο. Έχοντας προσδιορίσει το καρέ, έχουμε $\binom{48}{3}$ τρόπους για να επιλέξουμε τα άλλα 3 φύλλα που απαρτίζουν την επτάδα. Επομένως

   $$P(B) = \frac{13\binom{48}{3}}{\binom{52}{7}} \simeq 0.0017.$$

   (γ΄) Το ενδεχόμενο AB είναι το ενδεχόμενο να έχουμε μόνο φιγούρες και ανάμεσά τους ένα καρέ. Υπάρχουν 3 επιλογές για τη φιγούρα του καρέ, και $\binom{8}{3}$ συνδυασμοί για τις υπόλοιπες 3 φιγούρες που θα συμπληρώσουν την επτάδα. Επομένως,

   $$P(AB) = \frac{3\binom{8}{3}}{\binom{52}{7}} \simeq 1.25 \times 10^{-6}.$$

   Επομένως

   $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3\binom{8}{3}}{\binom{52}{7}}}{\frac{13\binom{48}{3}}{\binom{52}{7}}} \simeq 7.47 \times 10^{-4}.$$

   (δ΄) Βάσει των κανόνων που έχουν δοθεί, υπάρχουν 8 επτάδες διαδοχικών αριθμών, ξεκινώντας από την $1-2-3-4-5-6-7$ και καταλήγοντας στην $8-9-10-11-12-13-14$. Για κάθε μία, έχουμε 4 επιλογές για το ποιο χρώμα νούμερο θα επιλέξουμε για κάθε ένα από τα 7 νούμερα. Προκύπτει, λοιπόν,

   $$P(C) = \frac{8 \times 4^7}{\binom{52}{7}} \simeq 9.79 \times 10^{-4}.$$

2. **(Βολές)** Ένας παίκτης μπάσκετ θα εκτελέσει σε ένα αγώνα ακριβώς 5 βολές δύο πόντων, κάθε μια εκ των οποίων θα είναι εύστοχη με πιθανότητα 0.6. Επίσης, θα εκτελέσει ακριβώς 3 βολές των τριών πόντων, κάθε μια εκ των οποίων είναι εύστοχη με πιθανότητα 0.3. Κάθε μια από τις βολές δύο ή τριών πόντων είναι εύστοχη ανεξάρτητα από όλες τις άλλες βολές δύο ή τριών πόντων. Έστω X το πλήθος των εύστοχων βολών δύο πόντων και Y το πλήθος των εύστοχων βολών τριών πόντων.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να γράψετε τύπους για τις πιθανότητες $P(X = x)$, $P(Y = y)$, και $P(X = x, Y = y)$, όπου $x = 0, \ldots, 5$, $y = 0, \ldots, 3$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο παίκτης να επιτύχει στον αγώνα περισσότερους πόντους από βολές τριών πόντων από ότι με βολές δύο πόντων;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω το ακόλουθο τυχερό παιχνίδι: πριν τον αγώνα δίνουμε 15 ευρώ, και μετά τον αγώνα μας επιστρέφονται $5(X + Y)$ ευρώ. Ποιο είναι το αναμενόμενο καθαρό κέρδος αυτού του παιχνιδιού;

   Λύση:

   (α΄) Καθώς κάθε βολή δύο πόντων είναι επιτυχής ανεξάρτητα από τις άλλες, η Τ.Μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους το πλήθος προσπαθειών $N_1 = 5$ και και την πιθανότητα επιτυχίας $p_1 = 0.6$. Παρόμοια, κάθε βολή τριών πόντων είναι επιτυχής ανεξάρτητα από τις άλλες, επομένως και η Τ.Μ. Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, αλλά με παραμέτρους το πλήθος προσπαθειών $N_2 = 3$ και και την πιθανότητα επιτυχίας $p_3 = 0.3$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι οι Τ.Μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \binom{5}{x} 0.6^x 0.4^{1-x}, \quad x = 0, \ldots, 5, \\
P(Y = y) &= \binom{3}{y} 0.3^y 0.7^{1-y}, \quad y = 0, \ldots, 3, \\
P(X = x,\, Y = y) &= P(X = x) P(Y = y) \\
&= \binom{5}{x}\binom{3}{y} 0.6^x 0.4^{1-x} 0.3^y 0.7^{1-y}, \quad x = 0, \ldots, 5,\ y = 0, \ldots, 3.
\end{aligned}$$

   (β΄) Προσθέτουμε τις πιθανότητες όλων των αποτελεσμάτων που απαρτίζουν το ενδεχόμενο A να βάλει ο παίκτης περισσότερους πόντους με βολές τριών πόντων από ό,τι με βολές δύο πόντων, χρησιμοποιώντας και την ανεξαρτησία των X, Y:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(Y = 3)\,[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] \\
&\quad + P(Y = 2)\,[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] + P(Y = 1)\,[P(X = 0) + P(X = 1)]\,.
\end{aligned}$$

   (γ΄) Το καθαρό κέρδος μας είναι $C = 5(X + Y) - 15$, επομένως η μέση τιμή του είναι

$$E(C) = E(5(X + Y) - 15) = 5E(X) + 5E(Y) - 15 = 4.5,$$

   αφού $E(X) = N_1 p_1 = 5 \times 0.6 = 3$ και $E(X) = N_2 p_2 = 3 \times 0.3 = 0.9$, κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή.

3. **(Βασίλισσα Ελισάβετ)** Το Ιωβηλαίο έτος 2004 έγκριτοι Βρετανοί εραλδολόγοι είχαν αποφανθεί ότι η ηλικία της Βασίλισσας Ελισάβετ ήταν συνεχής Τ.Μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K(x - 90), & 90 < x < 100, \\ K(110 - x), & 100 < x < 110, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

   όπου K είναι άγνωστη παράμετρος.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της άγνωστης παραμέτρου K.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Βάσει της άνω πρόβλεψης, ποια ήταν η πιθανότητα η Βασίλισσα Ελισάβετ να πεθάνει πριν να γίνει 97 ετών;

   Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{90}^{100} K(x-90)\,dx + \int_{100}^{110} K(110-x)\,dx = 1 \Leftrightarrow$$
$$K\left[\frac{(x-90)^2}{2}\right]_{90}^{100} + K\left[\frac{(110-x)^2}{2}\right]_{110}^{100} = 1 \Leftrightarrow 50K + 50K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{100}.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα της $f(x)$ είναι τρίγωνο με βάση 20 και ύψος $10K$, επομένως $\frac{1}{2} \times 20 \times 10K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{100}$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P(X \leq 97) = \int_{90}^{97} \frac{1}{100}(x-90)\,dx = \frac{1}{200}\left[(x-90)^2\right]_{90}^{97} = \frac{49}{200}.$$

4. **(Γερμανική επίθεση)** Σε μια επίθεσή της, η εθνική ομάδα καλαθοσφαίρισης της Γερμανίας επιτυγχάνει τρεις πόντους με πιθανότητα $p_1 = 0.6$, δύο πόντους με πιθανότητα $p_2 = 0.3$, και κανένα πόντο με πιθανότητα $p_3 = 0.1$. Οι διαδοχικές επιθέσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Υπολογίστε την μέση τιμή και τη διασπορά του πλήθους των πόντων X που βάζει η γερμανική ομάδα σε μια επίθεση.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα η γερμανική ομάδα να επιτύχει πάνω από 110 πόντους σε 49 επιθέσεις;

(γ΄) *(1.5 μονάδα)* Έστω πως η γερμανική ομάδα πραγματοποιεί 9 επιθέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να επιτύχει ακριβώς 4 φορές τρεις πόντους, ακριβώς 3 φορές δύο πόντους και ακριβώς 2 φορές κανέναν πόντο σε αυτές τις 9 επιθέσεις;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \times 0.6 + 2 \times 0.3 + 0 \times 0.1 = 2.4, \\ E(X^2) &= 3^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.3 + 0^2 \times 0.1 = 6.6, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 0.84. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 49$ οι πόντοι που θα μπουν στις 49 επιθέσεις της γερμανικής ομάδας. Οι X_i είναι ανεξάρτητες, με μέση τιμή $\mu = 2.4$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{0.84}$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P\left(\sum_{i=1}^{49} X_i > 110\right) = P\left(\frac{\sum_{n=1}^{49} X_i - 49\mu}{\sqrt{49}\sigma} > \frac{110-49\mu}{\sqrt{49}\sigma}\right)$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{110-49\mu}{\sqrt{49}\sigma}\right) \simeq 1 - \Phi(-1.1846) \simeq 0.8819.$$

(γ΄) Η γερμανική ομάδα θα επιτύχει ακριβώς 4 τρίποντα με πιθανότητα $\binom{9}{4}p_1^4(1-p_1)^5$. Με δεδομένο ότι μια επίθεση δεν είναι τριών πόντων, θα είναι δύο πόντων με πιθανότητα $\frac{p_2}{p_2+p_3}$, επομένως η πιθανότητα να έχουμε 3 από τις 5 εναπομείνασες επιθέσεις να είναι 2 πόντων είναι $\binom{5}{3}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right)^3\left(1-\frac{p_2}{p_2+p_3}\right)^2$. Συνδυάζοντας τα άνω, και παρατηρώντας πως $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\binom{9}{4}p_1^4(1-p_1)^5 \times \binom{5}{3}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right)^3\left(\frac{p_3}{p_2+p_3}\right)^2 = \frac{9!}{4!3!2!}p_1^4p_2^3p_3^2.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση της πολυωνυμικής κατανομής.