ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2018
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

2. **(Σκάκι)** Ο Σταύρος παίζει σκάκι σε μια διαδικτυακή πλατφόρμα, στην οποία το 30% των υπόλοιπων παικτών είναι καλύτεροι παίκτες από το Σταύρο, οπότε ο Σταύρος τους κερδίζει σε ένα παιχνίδι με πιθανότητα 30%, ένα άλλο 40% των παικτών είναι ισάξιοι με το Σταύρο, οπότε τους κερδίζει σε ένα παιχνίδι με πιθανότητα 50%, και τέλος το υπόλοιπο 30% των παικτών είναι χειρότεροι από τον Σταύρο, οπότε ο Σταύρος τους κερδίζει σε ένα παιχνίδι με πιθανότητα 80%.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ο Σταύρος παίζει διαδοχικά παιχνίδια, κάθε παιχνίδι με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ παίκτη που επιλέγεται τυχαία κάθε φορά. Κατά μέσο όρο πόσα παιχνίδια πρέπει να παίξει μέχρι να κερδίσει το πρώτο του παιχνίδι; Αν παίξει δέκα παιχνίδια, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ακριβώς οκτώ;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ο Σταύρος παίζει μια σειρά από πέντε παιχνίδια με τον ΙΔΙΟ παίκτη. Αν κερδίσει ακριβώς τα τρία από αυτά, ποια είναι η πιθανότητα ο παίκτης αυτός να είναι καλύτερος του Σταύρου;

3. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x, y)$;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

4. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Δύο από κοινού συνεχείς Τ.Μ., X και Y, περιγράφονται από την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2(2 - y), & 0 \le x, y \le 1, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X < 2Y)$.

5. **(Σπαλιάρας)** Ο Γιάννης έχει 4000 επαφές στον τηλεφωνικό κατάλογο του κινητού του. Κάθε επαφή στέλνει στον Γιάννη ένα τυχαίο πλήθος X από φωτογραφίες την εβδομάδα, όπου X είναι Τ.Μ. με μάζα

$$P(X = i) = \frac{1}{8}, \quad i = 1, 2, \ldots, 8,$$

ανεξάρτητα από τις άλλες επαφές.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά VAR(X) της Τ.Μ. X;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα, μέσα σε μια βδομάδα, ο Γιάννης να λάβει πάνω από 18500 φωτογραφίες;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup {}_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \text{VAR}(aX + b) = a^2 \text{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \text{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\ p_X(1) = p,\ E(X) = p,\ \text{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\ p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ E(X) = Np,\ \text{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\ p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,\ E(X) = 1/p,\ \text{VAR}(X) = (1-p)/p^2,\ P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\ m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\ p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X) = \frac{nk}{N},\ \text{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \text{Poisson}(\lambda),\ p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ E(X) = \lambda,\ \text{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\ \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\text{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\ \text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\text{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \text{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m-k),\ m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \text{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx, \\ \int_c^d \Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le \bar{S}_N\le b\big)\to \Phi(b)-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2017-2018

1. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

   Λύση:

   (α΄) Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής: Υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμοί λέξεων που μπορούν να επιλεγούν, ενώ υπάρχουν οκτώ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν τις δύο δοσμένες λέξεις και μια από τις άλλες οκτώ. Επομένως, η πιθανότητα να καταλήξουμε με αυτές τις δύο λέξεις στον επιθετικό προσδιορισμό είναι $8/\binom{10}{3} = \frac{1}{15}$. Όμως, εμείς ενδιαφερόμαστε να εμφανίζεται πρώτα η λέξη Gorna και μετά η λέξη Severna. Λόγω συμμετρίας, τα δύο αυτά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα πρέπει να είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$.
   Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διατάξεις. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $10 \times 9 \times 8$ δυνατές διατάξεις τριών λέξεων. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων που ικανοποιούν την δοθείσα συνθήκη, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους για να επιλέξουμε τις δύο θέσεις που θα καταλάβουν οι δοσμένες λέξεις, και 8 επιλογές για την λέξη που θα συμπληρώσει την τριάδα. Επομένως, υπάρχουν 3×8 διατάξεις στο ενδεχόμενο που εξετάζουμε, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3\times 8}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{30}$, όπως και με την προηγούμενη λύση.

   (β΄) Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί η λέξη Wakanda και B το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί η λέξη Mordor. Ζητείται να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$.
   Υπάρχουν διάφορες λύσεις. Σχετικά με την πρώτη:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

   Σχετικά με την $P(A)$, παρατηρούμε πως έχουμε συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμούς. Από αυτούς, οι $\binom{9}{2}$ έχουν την λέξη Wakanda, αφού υπάρχουν $\binom{9}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε τις δύο άλλες λέξεις. Άρα τελικά:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

   Επίσης, το πλήθος των συνδυασμών που έχουν την λέξη Wakanda αλλά όχι τη λέξη Mordor είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε από οκτώ λέξεις (δηλαδή όλες εκτός της Wakanda και της Mordor) τις δύο από αυτές, για να συμπληρώσουν, μαζί με την λέξη Wakanda, την τριάδα. Επομένως,

$$P(AB) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{30},$$

   και τελικά

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{7 \times 10}{30 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

   Σχετικά με τη δεύτερη λύση,

$$P(B|A) = 1 - P(B'|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)}.$$

Το ενδεχόμενο AB' είναι το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τρεις λέξεις και να υπάρχουν σε αυτές και η λέξη Wakanda και η λέξη Mordor. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχόμενου είναι το πλήθος των συνδυασμών αυτών των λέξεων με μια άλλη από τις οκτώ, δηλαδή οκτώ, διαιρεμένο με το πλήθος όλων των συνδυασμών, δηλαδή $\binom{10}{3}$. Επομένως,

$$P(AB') = \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15} \Rightarrow P(B|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)} = 1 - \frac{10}{15 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

Μια τελευταία λύση είναι απλώς να παρατηρούμε ότι με δεδομένο ότι στην διάταξη υπάρχει η Wakanda, υπάρχουν $\binom{9}{2}$ επιλογές για τις άλλες δύο λέξεις, εκ των οποίων οι $\binom{8}{2}$ δεν έχουν τη λέξη Mordor, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{9}.$$

2. **(Σκάκι)** Ο Σταύρος παίζει σκάκι σε μια διαδικτυακή πλατφόρμα, στην οποία το 30% των υπόλοιπων παικτών είναι καλύτεροι παίκτες από το Σταύρο, οπότε ο Σταύρος τους κερδίζει με πιθανότητα 30%, ένα άλλο 40% των παικτών είναι ισάξιοι με το Σταύρο, οπότε τους κερδίζει σε μια παρτίδα με πιθανότητα 50%, και τέλος το υπόλοιπο 30% των παικτών είναι χειρότεροι από τον Σταύρο, οπότε ο Σταύρος τους κερδίζει με πιθανότητα 80%.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ο Σταύρος παίζει διαδοχικά παιχνίδια, κάθε παιχνίδι με ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ παίκτη που επιλέγεται τυχαία κάθε φορά. Κατά μέσο όρο πόσα παιχνίδια πρέπει να παίξει μέχρι να κερδίσει το πρώτο του παιχνίδι; Αν παίξει δέκα παιχνίδια, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ακριβώς οκτώ;

(β΄) *(1 μονάδα)* Ο Σταύρος παίζει μια σειρά από πέντε παιχνίδια με τον ΙΔΙΟ παίκτη. Αν κερδίσει ακριβώς τα τρία από αυτά, ποια είναι η πιθανότητα ο παίκτης αυτός να είναι καλύτερος του Σταύρου;

Λύση:

(α΄) Έστω W το ενδεχόμενο ο Σταύρος να κερδίσει ένα παιχνίδι, A το ενδεχόμενο ο αντίπαλος για το συγκεκριμένο παιχνίδι να είναι καλύτερος, B να είναι ισάξιος, και C να είναι χειρότερος. Έχουμε, από τον Κανόνα της Ολικής Πιθανότητας,

$$P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C) = 0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.4 + 0.8 \times 0.3 = 0.53.$$

Επειδή σε κάθε παιχνίδι ο αντίπαλος αλλάζει, ο Σταύρος κερδίζει κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα με πιθανότητα 0.53, επομένως:

i. Το πλήθος των παιχνιδιών που θα πρέπει να παίξει μέχρι να κερδίσει το πρώτο του ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο 0.53, επομένως ο Σταύρος θα παίξει κατά μέσο όρο $1/0.53 = 1.8868$ παιχνίδια μέχρι να κερδίσει το πρώτο του.

ii. Αν παίξει δέκα παιχνίδια, το πλήθος των παιχνιδιών που θα κερδίσει δίνεται από την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 10$ και $p = 0.53$, και επομένως η πιθανότητα να κερδίσει ακριβώς οκτώ παιχνίδια είναι

$$\binom{10}{8} 0.53^8 \,(1 - 0.53)^2 = 0.0619.$$

(β΄) Έστω τώρα W_i το ενδεχόμενο ο Σταύρος να κερδίσει το παιχνίδι i, με $i = 1, \ldots, 5$, A το ενδεχόμενο ο αντίπαλος με τον οποίο ο Σταύρος παίζει τα πέντε παιχνίδια να είναι καλύτερος, B να είναι ισάξιος, και C να είναι χειρότερος.

Τώρα που ο αντίπαλος του Σταύρου είναι ο ίδιος σε όλα τα παιχνίδια, τα αποτελέσματα των διαδοχικών παιχνιδιών είναι ανεξάρτητα, αλλά μόνο αν έχουμε δέσμευση σε κάποιο από τα ενδεχόμενα A, B, ή C. Επομένως, δεν ισχύει, για παράδειγμα, ότι $P(W_1 W_2) = P(W_1)P(W_2)$, γιατί αν ο Σταύρος κερδίσει το πρώτο παιχνίδι, αυξάνεται η πιθανότητα ο αντίπαλός του να είναι χειρότερος, επομένως αυξάνεται η πιθανότητα να κερδίσει ο Σταύρος και το δεύτερο παιχνίδι. Όμως, έχουμε

$$P(W_i W_j|A) = P(W_i|A)P(W_j|A), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

και ομοίως για τα ενδεχόμενα B και C. Επομένως, το πλήθος των νικών του Σταύρου, με δέσμευση στον τύπο του αντίπαλου, δίνεται και πάλι από τη διωνυμική κατανομή, επομένως, αν D είναι το ενδεχόμενο ο Σταύρος να κάνει 3 νίκες, έχουμε

$$\begin{aligned} P(D|A) &= \binom{5}{3}0.3^3 0.7^2, \\ P(D|B) &= \binom{5}{3}0.5^3 0.5^2, \\ P(D|C) &= \binom{5}{3}0.8^3 0.2^2. \end{aligned}$$

Μπορούμε, επιπλέον, να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{\binom{5}{3}0.3^3 0.7^2 \times 0.3}{\binom{5}{3}0.3^3 0.7^2 \times 0.3 + \binom{5}{3}0.5^3 0.5^2 \times 0.4 + \binom{5}{3}0.8^3 0.2^2 \times 0.3} = 0.1755. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η πιθανότητα ο Σταύρος να παίζει με καλύτερο παίκτη μειώθηκε, όπως αναμενόταν.

3. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x, y)$;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(δ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

Λύση:

(α΄) Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \quad \forall x \in \{0, 1, 2, 3, 4\},\ y \in \{0, 1, 2\},$$

και τελικά προκύπτει ο παρακάτω πίνακας που δίνει την $p_{XY}(x, y)$:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
2	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20

(β΄) Για να κερδίσει η Τρίπολη, πρέπει να έρθει το σκορ $1-0$, $2-1$, ή $2-0$ υπέρ της. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}.$$

(γ΄) Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, πρέπει να επιλέξουμε τιμές για τους διάφορους συνδυασμούς των (x, y) που εμφανίζονται ως ορίσματα της από κοινού μάζας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	0	0	1/6	1/6	1/6
1	1/5	0	1/60	1/60	1/60
2	0	1/5	1/60	1/60	1/60

Επομένως, η μέγιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+0=\frac{2}{5}.$$

(δ΄) Παρόμοια, τώρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/5	1/5	1/10	0	0
1	0	0	1/20	1/10	1/10
2	0	0	1/20	1/10	1/10

Επομένως, η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2)=0.$$

4. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Δύο από κοινού συνεχείς Τ.Μ., X και Y, περιγράφονται από την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2(2-y), & x,y\in[0,1],\\ 0, & \text{αλλού}.\end{cases}$$

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X<2Y)$.

Λύση:

(α΄) Θα πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στο επίπεδο, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, να είναι μονάδα. Όμως, έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dA &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} cx^2(2-y)\,dA = \int_0^1\left(\int_0^1 cx^2(2-y)\,dy\right)dx\\ &= c\int_0^1\left(x^2\int_0^1(2-y)\,dy\right)dx = c\left(\int_0^1(2-y)\,dy\right)\left(\int_0^1 x^2\,dx\right).\end{aligned}$$

Το πρώτο από τα άνω ολοκληρώματα ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου με ύψος 1 και μήκη βάσεων 2 και 1, επομένως ισούται με $\frac{3}{2}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα εύκολα προκύπτει οτι είναι $\frac{1}{3}$. Άρα τελικά προκύπτει πως $c=2$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Παίρνουμε περιπτώσεις. Αν $x\notin[0,1]$, τότε η άνω ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού μηδενική, επομένως και $f_X(x)=0$. Αν όμως $x\in[0,1]$, τότε

$$f_X(x)=\int_0^1 2x^2(2-y)\,dy=2x^2\int_0^1(2-y)\,dy=3x^2.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{αλλού}.\end{cases}$$

Παρατηρήστε πως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε πως το ολοκλήρωμα της $f_X(x)$ πράγματι ισούται με 1.

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P(X<2Y)=P((X,Y)\in R)=\iint_R f(x,y)\,dA,$$

όπου $R=\{(x,y):x<2y\}$. Το χωρίο αυτό μπορεί να σπάσει σε δύο υποχωρία, το χωρίο $R_1=R\cap([0,1]\times[0,1])$ και το χωρίο $R_2=R-R_1$. Στο δεύτερο χωρίο, το άνω ολοκλήρωμα είναι 0, διότι σε αυτό είναι μηδενική η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(X<2Y) &= \iint_{R_1} f(x,y)\,dA=\int_0^1\left(\int_{x/2}^1 2x^2(2-y)dy\right)dx=\\
&= \int_0^1 2x^2\left(\int_{x/2}^1\left[-\frac{(2-y)^2}{2}\right]' dy\right)dx=\int_0^1 2x^2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big(2-\frac{x}{2}\Big)^2\right]dx\\
&= \int_0^1 x^2\left[-1+4+\frac{x^2}{4}-2x\right]dx=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+3x^2\right]dx\\
&= \int_0^1\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{2}+x^3\right]' dx=\frac{1}{20}-\frac{1}{2}+1=\frac{11}{20}.
\end{aligned}$$

5. **(Σπαλιάρας)** Ο Γιάννης έχει 4000 επαφές στον τηλεφωνικό κατάλογο του κινητού του. Κάθε επαφή στέλνει στον Γιάννη ένα τυχαίο πλήθος X από φωτογραφίες την εβδομάδα, όπου X είναι Τ.Μ. με μάζα

$$P(X=i)=\frac{1}{8},\quad i=1,2,\ldots,8,$$

ανεξάρτητα από τις άλλες επαφές.

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$ της Τ.Μ. X;

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα, μέσα σε μια βδομάδα, ο Γιάννης να λάβει πάνω από 18500 φωτογραφίες;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{8}\times(1+2+\cdots+8)=\frac{8\times 9}{8\times 2}=\frac{9}{2},\\
E(X^2) &= \frac{1}{8}\times(1^2+2^2+\cdots+8^2)=\frac{8\times 9\times 17}{8\times 6}=\frac{51}{2},\\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{51}{2}-\frac{81}{4}=\frac{21}{4}.
\end{aligned}$$

(β΄) Έστω X_i το πλήθος από φωτογραφίες που θα στείλει στην εβδομάδα η επαφή i. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{4000}X_i>18500\right) &\simeq P\left(\sum_{i=1}^{4000}X_i>18500.5\right)\\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4000}X_i-4000\times\frac{9}{2}}{\sqrt{4000\times\frac{21}{4}}}>\frac{18500.5-4000\times\frac{9}{2}}{\sqrt{4000\times\frac{21}{4}}}\right)\\
&\simeq P(Z>3.4538)\simeq 1-\Phi(3.4538)\simeq 2.764\times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Τίτσου)** Το αμφιθεατρικό παιχνίδι Τίτσου παίζεται με 4 παίκτες, τους P_1, P_2, P_3, και P_4. Χρησιμοποιείται μια συνηθισμένη τράπουλα που αποτελείται από τετράδες των δεκατριών αριθμών 2, $\ldots, 10, J, Q, K, A$, στην οποία έχουν προστεθεί 4 ειδικά φύλλα (Δράκος, Γαλοπούλα, Μαγιόνγκ, Σκύλος). Επομένως, η τράπουλα έχει συνολικά $4 \times 14 = 56$ φύλλα. Στην αρχή του παιχνιδιού η τράπουλα μοιράζεται στα 4 και οι παίκτες λαμβάνουν από 14 φύλλα ο καθένας. Σε αυτή τη φάση, όταν ένας από τους παίκτες λάβει και τα 4 φύλλα ενός αριθμού, για παράδειγμα και τους 4 άσσους, τότε η τετράδα αυτή καλείται βόμβα. (Διευκρίνιση: αν γνωρίζεται το παιχνίδι, αγνοήστε άλλους κανόνες που δεν αναφέρονται ρητώς εδώ.)
   (α΄) *(0.7 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα, όταν μοιραστούν τα φύλλα, να υπάρχει παίκτης που να έχει λάβει και τα 4 ειδικά φύλλα;
   (β΄) *(0.8 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν σε διαφορετικούς παίκτες;
   (γ΄) *(1 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες βόμβες υπάρχουν, και στους 4 παίκτες, όταν μοιραστούν τα φύλλα;

2. **(Fortnite)** 4 φίλοι παίζουν Fortnite, σε μια πίστα με άλλους 96 αντιπάλους. Οι 100 παίκτες είναι όλοι ισοδύναμοι μεταξύ τους, και αποχωρούν από το παιχνίδι διαδοχικά, καθώς σκοτώνονται, ένας, ένας, χωρίς προτίμηση στη σειρά αποχώρησης. Ο τελευταίος που θα παραμείνει στο παιχνίδι είναι ο νικητής. Έστω X η Τ.Μ. που εκφράζει τη σειρά που θα αποχωρήσει από το παιχνίδι και ο τελευταίος (αυτός δηλαδή που θα αντέξει το περισσότερο) από τους 4 φίλους.
   (α΄) *(0.7 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου $\{X \leq x\}$ ο τελευταίος από τους φίλους να φύγει το αργότερο στη θέση x, για $x = 4, 5, \ldots, 100$;
   (β΄) *(0.8 μονάδα)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας, $p(x)$, της X;

3. **(Πρότυπο Γυμνάσιο)** *(1.5 μονάδα)* Ο Παναγιώτης έδωσε εξετάσεις για εισαγωγή σε ένα πρότυπο γυμνάσιο. Συμμετείχαν 602 φοιτητές, που κατετάγησαν, κατόπιν εξέτασης, σε αύξουσα σειρά, και θα γίνουν δεκτοί οι πρώτοι 108 από όσους αποδεχθούν να εγγραφούν. Κάθε ένας από τους φοιτητές που έχει τη δυνατότητα να εγγραφεί δεν θα εγγραφεί με μια μικρή πιθανότητα $p = 0.02$, κοινή για όλους, και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο Παναγιώτης κατετάγη στη θέση 113, και, επομένως, θα γίνει δεκτός εφόσον τουλάχιστον 5 μαθητές από τους πρώτους 112 (που βρίσκονται μπροστά του στην κατάταξη) δεν εγγραφούν τελικά στο πρότυπο γυμνάσιο. Να δώσετε μια ακριβή έκφραση για την πιθανότητα q να γίνει, τελικά, δεκτός ο Παναγιώτης στο πρότυπο γυμνάσιο. Κατόπιν, να δώσετε μια προσεγγιστική έκφραση για την πιθανότητα q. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίσετε αριθμητικά το αποτέλεσμα.

4. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

x \ y	1	2	3
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

x \ y	1	2	3
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y, αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα $\frac{1}{4}$ να είναι σε φόρμα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;

(δ΄) *(1.5 μονάδα)* Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

5. **(Διάρκεια ζωής)** Ένα μελάνι εκτυπωτή του CSLAB έχει διάρκεια ζωής X, όπου X είναι Τ.Μ., που μετράται σε μέρες, με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0, a], \\ 0, & x \notin [0, a], \end{cases}$$

όπου a μια άγνωστη παράμετρος. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής X να υπερβεί τις 10 μέρες είναι $\frac{1}{3}$.

Επίσης, όταν παραγγέλνεται ένα μελάνι, φτάνει στο CSLAB μετά από τυχαίο χρόνο Y που είναι επίσης Τ.Μ., αλλά με πυκνότητα εκθετική, με παράμετρο $\theta = 1$, σε μέρες.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν το CSLAB παραγγείλει να έρθει το επόμενο μελάνι τη στιγμή που τοποθετεί ένα νέο μελάνι στον εκτυπωτή, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο μελάνι να φτάσει στο CSLAB αφού ο εκτυπωτής έχει ξεμείνει από το νέο μελάνι; Δίνεται ότι η διάρκεια ζωής του νέου μελανιού X και ο χρόνος άφιξης του επόμενου μελανιού Y είναι ανεξάρτητες.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \,\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \,\forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\ p_X(1) = p,\ E(X) = p,\ \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\ p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ E(X) = Np,\ \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\ p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,\ E(X) = 1/p,\ \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2,\ P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\ m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\ p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X) = \frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ E(X) = \lambda,\ \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\ \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \,\forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \,\forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m-k),\ m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le \phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots\ \text{ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le \bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2017-2018

1. **(Τίτσου)** Το αμφιθεατρικό παιχνίδι Τίτσου παίζεται με 4 παίκτες, τους P_1, P_2, P_3, και P_4. Χρησιμοποιείται μια συνηθισμένη τράπουλα που αποτελείται από τετράδες των δεκατριών αριθμών $2, \ldots, 10$, J, Q, K, A, στην οποία έχουν προστεθεί 4 ειδικά φύλλα (Δράκος, Γαλοπούλα, Μαγιόνγκ, Σκύλος). Επομένως, η τράπουλα έχει συνολικά $4 \times 14 = 56$ φύλλα. Στην αρχή του παιχνιδιού η τράπουλα μοιράζεται στα 4 και οι παίκτες λαμβάνουν από 14 φύλλα ο καθένας. Σε αυτή τη φάση, όταν ένας από τους παίκτες λάβει και τα 4 φύλλα ενός αριθμού, για παράδειγμα και τους 4 άσσους, τότε η τετράδα αυτή καλείται βόμβα. (Διευκρίνιση: αν γνωρίζεται το παιχνίδι, αγνοήστε άλλους κανόνες που δεν αναφέρονται ρητώς εδώ.)

   (α΄) *(0.7 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα, όταν μοιραστούν τα φύλλα, να υπάρχει παίκτης που να έχει λάβει και τα 4 ειδικά φύλλα;

   (β΄) *(0.8 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν σε διαφορετικούς παίκτες;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες βόμβες υπάρχουν, και στους 4 παίκτες, όταν μοιραστούν τα φύλλα;

   Λύση:

   (α΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα συγκεκριμένα ο παίκτης P_1 να πάρει και τα 4 ειδικά φύλλα. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{56}{14}$ δυνατοί συνδυασμοί 14 φύλλων που μπορεί να λάβει ο P_1. Από αυτούς, ακριβώς $\binom{52}{10}$ είναι αυτοί που έχουν και τα 4 ειδικά φύλλα, αφού υπάρχουν άλλα 52 φύλλα, και για να συμπληρώσουμε τα 14 πρέπει να πάρουμε άλλα 10. Επομένως, η πιθανότητα να πάρει ο P_1 τα 4 ειδικά φύλλα είναι $\binom{52}{10}/\binom{56}{14}$. Καθώς υπάρχουν 4 παίκτες, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p_1 = 4\frac{\binom{52}{10}}{\binom{56}{14}} = 0.0109.$$

   Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως η πιθανότητα ο Σκύλος να είναι μαζι με τον Δράκο είναι $13/55$ γιατί ο Σκύλος έχει 13 θέσεις, στο χέρι αυτού που έχει τον Δράκο, επι συνόλου 55 θέσεων που μένουν, για να καταλήξει μαζί του. Ακολούθως, με δεδομένο οτι ο Σκύλος και ο Δράκος είναι μαζί, το Μαγιόνγκ θα είναι μαζί τους με πιθανότητα $12/54$, κ.ο.κ., και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_1 = \frac{13 \times 12 \times 11}{55 \times 54 \times 53} = 0.0109.$$

   (β΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν στον ίδιο παίκτη. Παρατηρούμε πως η πιθανότητα να καταλήξουν και οι 2 στον παίκτη P_1 είναι $\binom{54}{12}/\binom{56}{14}$, καθώς ο παίκτης P_1 θα λάβει ένα συνδυασμό 14 φύλλων από 56, και για να συμπληρωθεί ένας συνδυασμός με τον Σκύλο και τον Δράκο πρέπει να επιλεγούν άλλα 12 φύλλα από 54. Η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν μαζί σε έναν οποιονδήποτε παίκτη είναι τετραπλάσια, λόγω συμμετρίας, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p_2 = 1 - \frac{4\binom{54}{12}}{\binom{56}{14}} = 0.7636.$$

   Εναλλακτικά, η πιθανότητα είναι $42/55 = 0.7636$, γιατί, αν θεωρήσουμε ότι ο Σκύλος βρίσκεται στα χέρια κάποιου παίκτη, υπάρχουν $3 \times 14 = 42$ θέσεις όπου μπορεί να βρίσκεται ο Δράκος ώστε να είναι στα χέρια άλλου παίκτη.

   (γ΄) Αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα p_3 ο παίκτης P_1 να έχει βόμβα με άσσους. Υπάρχουν $\binom{56}{14}$ συνδυασμοί που μπορεί να λάβει, και από αυτούς, παρόμοια με το πρώτο σκέλος, $\binom{52}{10}$ έχουν όλους τους άσσους. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα p_3 είναι

$$p_3 = \frac{\binom{52}{10}}{\binom{56}{14}}.$$

Έστω τώρα I_{ij} μια Τ.Μ. που είναι μονάδα αν ο παίκτης $i = 1, 2, 3, 4$, έχει βόμβα με το νούμερο $j = 1, 2, \ldots, 13$. Η ζητούμενη ποσότητα είναι η μέση τιμή

$$E\left[\sum_{i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots 13} I_{ij}\right] = \sum_{i=1,\ldots,4, j=1,\ldots 13} E\left[I_{ij}\right] = 4 \times 13 \times p_3 = 0.1417.$$

2. **(Fortnite)** 4 φίλοι παίζουν Fortnite, σε μια πίστα με άλλους 96 αντιπάλους. Οι 100 παίκτες είναι όλοι ισοδύναμοι μεταξύ τους, και αποχωρούν από το παιχνίδι διαδοχικά, καθώς σκοτώνονται, ένας, ένας, χωρίς προτίμηση στη σειρά αποχώρησης. Ο τελευταίος που θα παραμείνει στο παιχνίδι είναι ο νικητής. Έστω X η Τ.Μ. που εκφράζει τη σειρά που θα αποχωρήσει από το παιχνίδι και ο τελευταίος (αυτός δηλαδή που θα αντέξει το περισσότερο) από τους 4 φίλους.

   (α΄) *(0.7 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου $\{X \leq x\}$ ο τελευταίος από τους φίλους να φύγει το αργότερο στη θέση x, για $x = 4, 5, \ldots, 100$;

   (β΄) *(0.8 μονάδα)* Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας, $p(x)$, της X;

   Λύση: Παρατηρήστε ότι κάθε δυνατή κατάταξη των 4 φίλων, χωρίς να έχει σημασία η σχετική σειρά τους, αντιστοιχεί σε ένα τρόπο με τον οποίο μπορούμε να επιλέξουμε 4 θέσεις από 100.

   (α΄) Παρατηρούμε πως

   $$P(X \leq x) = \frac{\binom{x}{4}}{\binom{100}{4}}, \quad x = 4, 5, \ldots, 100.$$

   Πράγματι, υπάρχουν $\binom{x}{4}$ τρόποι για να καταλήξουν οι 4 φίλοι στις πρώτες x θέσεις, ενώ υπάρχουν συνολικά $\binom{100}{4}$ τρόποι για να επιλέξουν 4 οποιεσδήποτε θέσεις.

   (β΄) Έστω $\{X = x\}$ το ενδεχόμενο ο τελευταίος από τους φίλους να φύγει στη θέση x, $x = 4, \ldots, 100$. Υπάρχουν συνολικά $\binom{100}{4}$ τρόποι για να επιλέξουν οι φίλοι τις θέσεις τους. Για να μετρήσουμε αυτούς στους οποίους ο τελευταίος θα φύγει στη θέση x, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{x-1}{3}$ τρόποι για να επιλεγούν οι 3 πιο μπροστά θέσεις. Επομένως,

   $$P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{3}}{\binom{100}{4}}, \quad x = 4, 5, \ldots, 100.$$

   Εναλλακτικά, απλώς έχουμε

   $$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X \leq x - 1), \quad x = 4, 5, \ldots, 100,$$

   όπου οι $P(X \leq x)$ έχουν προσδιοριστεί στο προηγούμενο σκέλος για $x = 4, 5, \ldots, 100$, και $P(X \leq 3) = 0$.

3. **(Πρότυπο Γυμνάσιο)** *(1.5 μονάδα)* Ο Παναγιώτης έδωσε εξετάσεις για εισαγωγή σε ένα πρότυπο γυμνάσιο. Συμμετείχαν 602 φοιτητές, που κατετάγησαν, κατόπιν εξέτασης, σε αύξουσα σειρά, και θα γίνουν δεκτοί οι πρώτοι 108 από όσους αποδεχθούν να εγγραφούν. Κάθε ένας από τους φοιτητές που έχει τη δυνατότητα να εγγραφεί δεν θα εγγραφεί με μια μικρή πιθανότητα $p = 0.02$, κοινή για όλους, και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο Παναγιώτης κατετάγη στη θέση 113, και, επομένως, θα γίνει δεκτός εφόσον τουλάχιστον 5 μαθητές από τους πρώτους 112 (που βρίσκονται μπροστά του στην κατάταξη) δεν εγγραφούν τελικά στο πρότυπο γυμνάσιο. Να δώσετε μια ακριβή έκφραση για την πιθανότητα q να γίνει, τελικά, δεκτός ο Παναγιώτης στο πρότυπο γυμνάσιο. Κατόπιν, να δώσετε μια προσεγγιστική έκφραση για την ίδια πιθανότητα. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίσετε αριθμητικά το αποτέλεσμα.

   Λύση: Κάθε ένας από τους μαθητές δεν θα εγγραφεί με πιθανότητα 0.02, ανεξάρτητα από τους άλλους. Ο Παναγιώτης δεν θα γίνει δεκτός αν προσέλθουν 108 και άνω από τους πρώτους 112, επομένως η πιθανότητα να γίνει δεκτός δίνεται από την διωνυμική κατανομή, και είναι

$$\begin{aligned} q &= 1 - \binom{112}{108} 0.98^{108} 0.02^4 - \binom{112}{109} 0.98^{109} 0.02^3 - \binom{112}{110} 0.98^{110} 0.02^2 - \binom{112}{111} 0.98^{111} 0.02^1 - 0.98^{112} \\ &= 0.0749. \end{aligned}$$

   Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι φοιτητές που *δεν* θα προσέλθουν ακολουθούν επίσης την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 112$ και $p = 0.02$, επομένως η πιθανότητα να γίνει δεκτός ο Παναγιώτης είναι

$$q = \sum_{i=5}^{112} \binom{112}{i} 0.02^i 0.98^{112-i}.$$

Τέλος, επειδή η πιθανότητα q είναι πολύ μικρή, το πλήθος των μαθητών με κατάταξη καλύτερη του Παναγιώτη που δεν θα εγγραφούν ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 112 \times 0.02$, επομένως ο Παναγιώτης θα γίνει δεκτός με προσεγγιστική πιθανότητα

$$\begin{aligned} q &\simeq \sum_{j=5}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{j!} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{4} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = 0.0769. \end{aligned}$$

4. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

y / x	1	2	3
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

y / x	1	2	3
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y, αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα να είναι σε φόρμα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;

(δ΄) *(1.5 μονάδα)* Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

Λύση:

(α΄) Έστω A το ενδεχόμενο εκείνο το βράδυ ο Σταύρος να ήταν σε φόρμα, και C το ενδεχόμενο να έφαγε 4 σουβλάκια. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Bayes,

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|A')P(A')} = \frac{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{25}.$$

(β΄) Έστω A το ενδεχόμενο ο Σταύρος να είναι σε φόρμα. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(X=3|A)P(A) + P(X=3|A')P(A') = \frac{5}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{48}, \\ P(X=4) &= P(X=4|A)P(A) + P(X=4|A')P(A') = \frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{25}{48}, \\ P(Y=1) &= P(Y=1|A)P(A) + P(Y=1|A')P(A') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24}, \\ P(Y=2) &= P(Y=2|A)P(A) + P(Y=2|A')P(A') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}, \\ P(Y=3) &= P(Y=3|A)P(A) + P(Y=3|A')P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(γ΄) Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ κατά μέσο όρο

$$\begin{aligned} &E(600X + 200Y) = 600E(X) + 200E(Y) \\ &= 600\left(3 \times \frac{23}{48} + 4 \times \frac{25}{48}\right) + 200\left(1 \times \frac{7}{24} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{3}{8}\right) = 2529.2 \end{aligned}$$

θερμίδες.

(δ΄) Τα σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος σε ένα βράδυ έχουν μέση τιμή και διασπορά που υπολογίζονται, κατά τα γνωστά, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \times \frac{23}{48} + 4 \times \frac{25}{48} = 3.5208, \\ E(X^2) &= 3^2 \times \frac{23}{48} + 4^2 \times \frac{25}{48} = 12.6458, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 0.2498. \end{aligned}$$

Έστω X_i το πλήθος από σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος το βράδυ i, $i = 1, \ldots, 100$. Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ.,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 350\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100E(X)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}} > \frac{350 - 100E(X_i)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{350 - 100E(X_i)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}}\right) = 0.6614$$

5. **(Διάρκεια ζωής)** Ένα μελάνι εκτυπωτή του CSLAB έχει διάρκεια ζωής X, όπου X είναι Τ.Μ., που μετράται σε μέρες, με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0, a], \\ 0, & x \notin [0, a], \end{cases}$$

όπου a μια άγνωστη παράμετρος. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής X να υπερβεί τις 10 μέρες είναι $\frac{1}{3}$.

Επίσης, όταν παραγγέλνεται ένα μελάνι, φτάνει στο CSLAB μετά από τυχαίο χρόνο Y που είναι επίσης Τ.Μ., αλλά με πυκνότητα εκθετική, με παράμετρο $\theta = 1$, επίσης σε μέρες.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν το CSLAB παραγγείλει να έρθει το επόμενο μελάνι τη στιγμή που τοποθετεί ένα νέο μελάνι στον εκτυπωτή, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο μελάνι να φτάσει στο CSLAB αφού ο εκτυπωτής έχει ξεμείνει από το νέο μελάνι; Δίνεται ότι η X και Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση:

(α΄) Το a είναι μεγαλύτερο του 10, αλλιώς η πιθανότητα να υπερβεί η X το 10 θα ήταν μηδέν. Έχουμε,

$$\int_{10}^{a} \frac{1}{a}\, dx = \frac{a - 10}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 15.$$

(β΄) Λόγω ανεξαρτησίας,

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{15}, & 0 \leq x \leq 15,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Επομένως, αν R είναι το χωρίο όπου η από κοινού πυκνότητα είναι θετική, και επιπλέον $y > x$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= \iint_R \frac{e^{-y}}{15}\, dA = \int_0^{10} \left(\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{15}\, dy\right) dx = \frac{1}{15} \int_0^{10} \left(\int_x^{\infty} (-e^{-y})'\, dy\right) dx \\ &= \frac{1}{15} \int_0^{10} e^{-x}\, dx = \frac{1}{15} \int_0^{10} (-e^{-x})'\, dx = \frac{1}{15}(1 - e^{-10}). \end{aligned}$$