ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2017
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Δημοφιλία)** *(1 μονάδα)* Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F, είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

2. **(Μπάσκετ)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι καλείται να εκτελέσει 10 βολές. Ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, με πιθανότητα 0.6, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα 0.7, και ντεφορμέ με πιθανότητα 0.4, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα μόλις 0.2.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, ποια είναι η πιθανότητα να εκτελέσει 10 βολές και να βάλει τις 6; Ποια είναι η πιθανότητα του ίδιου ενδεχόμενου αν ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ο διαγωνιζόμενος εκτελεί 10 βολές και βάζει τις 6. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να είναι φορμαρισμένος;

3. **(Μπαλάκια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης ρίχνει μπαλάκια σε ένα στόχο μέχρι να καταφέρει να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές. Οι βολές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και κάθε μια είναι επιτυχημένη με πιθανότητα 0.25.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο διαγωνιζόμενος να χρειαστεί ακριβώς 20 προσπάθειες για να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές; (Υπόδειξη: σκεφτείτε τι πρέπει να έχει συμβεί στις πρώτες 19 προσπάθειες.)

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες προσπάθειες θα χρειαστεί ο διαγωνιζόμενος για να πετύχει το στόχο τρεις φορές;

4. **(Σάντουιτς και ψάρια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης προσφέρει στην ομάδα του κάθε μέρα ένα τυχαίο πλήθος X από σάντουιτς και ένα τυχαίο πλήθος Y από ψάρια, για τα οποία οι πιθανότητες $P(X = x, Y = y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

y \ x	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/16
1	1/8	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά των X και Y;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Είναι τα X, Y ανεξάρτητα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι κάθε σάντουιτς έχει 1024 θερμίδες και κάθε ψάρι έχει 512 θερμίδες, με ποιο τρόπο συνεισφέρει κατά μέσο όρο περισσότερες θερμίδες ο παίκτης, με τα σάντουιτς ή με τα ψάρια;

(δ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να συνεισφέρει συνολικά στην ομάδα, σε μια μέρα, περισσότερες από 3000 θερμίδες;

5. **(Χρόνος ολοκλήρωσης αγώνα)** Ένας παίκτης χρειάζεται χρόνο T για να ολοκληρώσει έναν αγώνα, όπου το T είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή που μετράται σε λεπτά και με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} b(x - a + 1), & a - 1 \le x \le a, \\ b(a + 1 - x), & a \le x \le a + 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οι a, b είναι άγνωστες σταθερές. Δίνεται, επίσης, ότι $E(T) = 10$ λεπτά.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να σχεδιάσετε την $f(x)$ (Υπόδειξη: κάντε αυτό το σκέλος πριν το επόμενο).

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τις τιμές των a, b.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο παίκτης παίξει 5 τέτοιους αγώνες, ποια είναι η πιθανότητα να ολοκληρώσει τουλάχιστον 2 από αυτούς σε λιγότερο από 10 λεπτά, αν ο χρόνος που χρειάζεται σε κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητος από αγώνα σε αγώνα;

6. **(Θερμίδες)** *(1.5 μονάδα)* Ένας διαγωνιζόμενος σε παιχνίδι επιβίωσης λαμβάνει, κάθε μέρα, φαγητό που αναλογεί είτε σε 1 μερίδα φαγητό με πιθανότητα $\frac{4}{5}$, είτε σε 5 μερίδες φαγητού, με πιθανότητα $\frac{1}{5}$ επειδή εκείνη τη μέρα κέρδισε κάποιο έπαθλο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τις πρώτες 100 μέρες του παιχνιδιού ο μέσος όρος μερίδων φαγητού τη μέρα με το οποίο τρέφεται ο διαγωνιζόμενος να υπερβαίνει τις δύο.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),\ P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$,   Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k,   Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^\infty k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^\infty {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p,\ p_X(1) = p,\ E(X) = p,\ \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p),\ p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},\ E(X) = Np,\ \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p),\ p_X(k) = (1-p)^{k-1} p,\ E(X) = 1/p,\ \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2,\ P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m),\ m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n),\ p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X) = \frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda),\ p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ E(X) = \lambda,\ \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X,\ \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\,\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^\infty p_X(k) p_Y(m-k),\ m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx,\ \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\,\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b],\\ 0, & \text{για } x\notin[a,b],\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0,\\ 0, & \text{για } x<0,\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint\limits_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)\,dx,\\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)\,dy,\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^n a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1,X_2,\ldots\ \text{ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1,\end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N (X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^N X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty.\end{cases}$$

Πίνακας 1: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για αρνητικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Πίνακας 2: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για θετικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2016-2017
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2016-2017

1. **(Δημοφιλία)** *(1 μονάδα)* Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

   Λύση: Συμβολίζοντας με $X > Y$ το ενδεχόμενο το άτομο X να είναι δημοφιλέστερο από το άτομο Y, παρατηρούμε πως

   $$P(A > C|A > B) = \frac{P(A > C, A > B)}{P(A > B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

   Οι τιμές των $P(A > C, A > B)$ και $P(A > B)$ προκύπτουν από συμμετρία.

2. **(Μπάσκετ)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι καλείται να εκτελέσει 10 βολές. Ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, με πιθανότητα 0.6, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα 0.7, και ντεφορμέ με πιθανότητα 0.4, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα μόλις 0.2.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, ποια είναι η πιθανότητα να εκτελέσει 10 βολές και να βάλει τις 6; Ποια είναι η πιθανότητα του ίδιου ενδεχόμενου αν ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ο διαγωνιζόμενος εκτελεί 10 βολές και βάζει τις 6. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να είναι φορμαρισμένος;

   Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο διαγωνιζόμενος να είναι φορμαρισμένος και B το ενδεχόμενο να βάλει 6 βολές.

   (α΄) Δεδομένου ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, οι βολές είναι ανεξάρτητες, επομένως το πλήθος των επιτυχημένων βολών είναι διωνυμικά κατανεμημένο με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = 0.7$, επομένως

   $$P(B|A) = \binom{10}{6} 0.7^6 0.3^4.$$

   Για την περίπτωση που ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ, με παρόμοιο τρόπο έχουμε

   $$P(B|A') = \binom{10}{6} 0.2^6 0.8^4.$$

   (β΄) Έχουμε, με χρήση του Κανόνα του Bayes:

   $$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\ &= \frac{\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4 0.6}{\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4 0.6 + \binom{10}{6}0.2^6 0.8^4 0.4} \simeq 0.9820. \end{aligned}$$

3. **(Μπαλάκια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης ρίχνει μπαλάκια σε ένα στόχο μέχρι να καταφέρει να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές. Οι βολές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και κάθε μια είναι επιτυχημένη με πιθανότητα 0.25.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο διαγωνιζόμενος να χρειαστεί ακριβώς 20 προσπάθειες για να πετύχει το στόχο ακριβώς τρεις φορές; (Υπόδειξη: σκεφτείτε τι πρέπει να έχει συμβεί στις πρώτες 19 προσπάθειες.)

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσες προσπάθειες θα χρειαστεί ο διαγωνιζόμενος για να πετύχει το στόχο τρεις φορές;

   Λύση:

   (α΄) Ο διαγωνιζόμενος θα χρειαστεί ακριβώς 20 προσπάθειες για να πετύχει το στόχο τρεις φορές αν πετύχει το στόχο ακριβώς 2 φορές στις πρώτες 19 προσπάθειες, κάτι που γίνεται, χρησιμοποιώντας την διωνυμική κατανομή, με πιθανότητα $\binom{19}{2}0.25^2 0.75^{17}$, και κατόπιν επιτύχει στην εικοστή προσπάθεια, κάτι που γίνεται με πιθανότητα 0.25, επομένως τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

   $$p = \binom{19}{2} 0.25^3 0.75^{17}.$$

(β΄) Έστω X_1, X_2, και X_3 τα πλήθη των προσπαθειών μέχρι ο διαγωνιζόμενος να πετύχει το στόχο την πρώτη, την δεύτερη, και την τρίτη φορά, αντιστοίχως. Ο διαγωνιζόμενος θα χρειαστεί κατά μέσο όρο

$$E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(_2)+E(X_3)=\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.25}=12$$

προσπάθειες. Στη δεύτερη ισότητα λάβαμε υπόψη ότι το πλήθος των προσπαθειών μέχρι την πρώτη επιτυχία είναι γεωμετρικά κατανεμημένο, επομένως η μέση του τιμή είναι το αντίστροφο της πιθανότητας επιτυχίας.

4. **(Σάντουιτς και ψάρια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης προσφέρει στην ομάδα του κάθε μέρα ένα τυχαίο πλήθος X από σάντουιτς και ένα τυχαίο πλήθος Y από ψάρια, για τα οποία οι πιθανότητες $P(X=x, Y=y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

x / y	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/16
1	1/8	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16

(α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά των X και Y;

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Είναι τα X, Y ανεξάρτητα;

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Με δεδομένο ότι κάθε σάντουιτς έχει 1024 θερμίδες και κάθε ψάρι έχει 512 θερμίδες, με ποιο τρόπο συνεισφέρει κατά μέσο όρο περισσότερες θερμίδες ο παίκτης, με τα σάντουιτς ή με τα ψάρια;

(δ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να συνεισφέρει συνολικά στην ομάδα, σε μια μέρα, περισσότερες από 3000 θερμίδες;

Λύση:

(α΄) Η μάζα της X είναι η

$$p_X(0)=\frac{5}{16},\ p_X(1)=\frac{1}{4},\ p_X(2)=\frac{1}{4},\ p_X(3)=\frac{3}{16},$$

και η μάζα της Y είναι η

$$p_Y(0)=\frac{7}{16},\ p_Y(1)=\frac{5}{16},\ p_Y(2)=\frac{1}{4},$$

επομένως

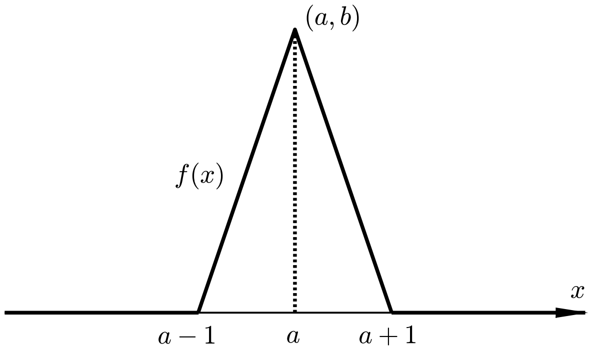
$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\times\frac{5}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{3}{16}=\frac{21}{16},\\
E(Y) &= 0\times\frac{7}{16}+1\times\frac{5}{16}+2\times\frac{1}{4}=\frac{13}{16},\\
E(X^2) &= 0^2\times\frac{5}{16}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{3}{16}=\frac{47}{16},\\
E(Y^2) &= 0^2\times\frac{7}{16}+1^2\times\frac{5}{16}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{21}{16},\\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{311}{256},\\
\mathrm{VAR}(Y) &= E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{167}{256}.
\end{aligned}$$

(β΄) Τα X, Y δεν είναι ανεξάρτητα, διότι, για παράδειγμα, $P(X=1,\ Y=1)=\frac{1}{16}$, ενώ $P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{64}\neq\frac{1}{16}$.

(γ΄) Οι θερμίδες που προσφέρει ο παίκτης από τα σάντουιτς είναι, κατά μέσο όρο, $E(1024X)=1344$, ενώ οι θερμίδες που προσφέρει ο παίκτης από τα ψάρια είναι, κατά μέσο όρο, $E(512Y)=416$, οπότε ο παίκτης προσφέρει περισσότερες θερμίδες από τα σάντουιτς.

(δ΄) Ο παίκτης θα συνεισφέρει πάνω από 3000 θερμίδες αν φέρει 3 σάντουιτς και οποιονδήποτε αριθμό ψαριών, ή 2 σάντουιτς και 2 ψάρια. Αυτό γίνεται με πιθανότητα

$$P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)+P(X=2,Y=2)=\frac{1}{4}.$$



Σχήμα 1: Άσκηση 5.

5. **(Χρόνος ολοκλήρωσης αγώνα)** Ένας παίκτης χρειάζεται χρόνο T για να ολοκληρώσει έναν αγώνα, όπου το T είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή που μετράται σε λεπτά και με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} b(x-a+1), & a-1 \leq x \leq a, \\ b(a+1-x), & a \leq x \leq a+1, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Οι a, b είναι άγνωστες σταθερές. Δίνεται, επίσης, ότι $E(T) = 10$ λεπτά.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να σχεδιάσετε την $f(x)$ (Υπόδειξη: κάντε αυτό το σκέλος πριν το επόμενο).

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τις τιμές των a, b.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν ο παίκτης παίξει 5 τέτοιους αγώνες, ποια είναι η πιθανότητα να ολοκληρώσει τουλάχιστον 2 από αυτούς σε λιγότερο από 10 λεπτά, αν ο χρόνος που χρειάζεται σε κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητος από αγώνα σε αγώνα;

Λύση:

(α΄) Η πυκνότητα $f(x)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{a-1} 0\,dx + \int_{a-1}^{a} b(x-a+1)\,dx + \int_{a}^{a+1} b(a+1-x)\,dx + \int_{a+1}^{\infty} 0\,dx \\ &= b\int_{a-1}^{a}\left(\frac{(x-a+1)^2}{2}\right)' dx - b\int_{a}^{a+1}\left(\frac{(a+1-x)^2}{2}\right)' dx = b\left(\frac{1}{2}-0\right) - b\left(0-\frac{1}{2}\right) = b.\end{aligned}$$

(Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι το αρχικό ολοκλήρωμα είναι εμβαδόν τριγώνου με βάση 2 και ύψος b.) Πρέπει το άνω ολοκλήρωμα να είναι μονάδα, επομένως τελικά $b = 1$.
Επίσης,

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-1} 0 dx + \int_{a-1}^{a} bx(x-a+1)\,dx + \int_{a}^{a+1} bx(a+1-x)\,dx + \int_{a+1}^{\infty} 0\,dx \\ &= b\left[\int_{a-1}^{a} x^2\,dx - \int_{a-1}^{a}(a-1)x\,dx + \int_{a}^{a+1}(a+1)x\,dx - \int_{a}^{a+1} x^2\,dx\right] \\ &= b\left[\frac{a^3}{3} - \frac{(a-1)^3}{3} - (a-1)\left[\frac{a^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2}\right] + (a+1)\left[\frac{(a+1)^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] - \frac{(a+1)^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right] \\ &= b\left[\frac{a^3}{3} - \frac{1}{3}(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) - (a-1)\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} + a\right)\right. \\ &\qquad \left. + (a+1)\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} + a - \frac{a^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(a^3 + 3a^2 + 3a + 1\right) + \frac{a^3}{3}\right] \\ &= b\left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} + a^2 - a + \frac{1}{3} + \frac{a}{2} - a^2 - \frac{1}{2} + a + a^2 + a + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{a^3}{3} - a^2 - \frac{1}{3} - a + \frac{a^3}{3}\right] \\ &= ba, \end{aligned}$$

και αφού $b = 1$ και $E(T) = 10$, τελικά προκύπτει πως $a = 10$. Το αποτέλεσμα αναμενόταν, λόγω της συμμετρίας που έχει η πυκνότητα $f(x)$ γύρω από το a, επομένως θα πρέπει $E(T) = a$ ανεξάρτητα από την τιμή του b.

(γ΄) Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} P(T < 10) &= \int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-1} 0\,dx + \int_{a-1}^{a} b(x-a+1)\,dx \\ &= b\int_{a-1}^{a} \left(\frac{(x-a+1)^2}{2}\right)' dx = b\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{b}{2}, \end{aligned}$$

και αφού $b = 1$, τελικά $P(T < 10) = \frac{1}{2}$. Και πάλι, το αποτέλεσμα αναμενόταν λόγω της συμμετρίας της πυκνότητας περί το a. Επειδή οι αγώνες είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, το πλήθος των αγώνων που θα συμπληρωθούν σε λιγότερα από 10 λεπτά είναι διωνυμικά κατανεμημένο, με παραμέτρους $N = 5$ (πλήθος πειραμάτων) και $p = \frac{1}{2}$ (την πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε ένα από αυτά), επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$q = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16}.$$

6. **(Θερμίδες)** *(1.5 μονάδα)* Ένας διαγωνιζόμενος σε παιχνίδι επιβίωσης λαμβάνει, κάθε μέρα, φαγητό που αναλογεί είτε σε 1 μερίδα φαγητό με πιθανότητα $\frac{4}{5}$, είτε σε 5 μερίδες φαγητού, με πιθανότητα $\frac{1}{5}$ επειδή εκείνη τη μέρα κέρδισε κάποιο έπαθλο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τις πρώτες 100 μέρες του παιχνιδιού ο μέσος όρος μερίδων φαγητού τη μέρα με το οποίο τρέφεται ο διαγωνιζόμενος να υπερβαίνει τις δύο.

Λύση: Έστω X_i το πλήθος των μερίδων φαγητού με το οποίο τρέφεται ο διαγωνιζόμενος την ημέρα i, όπου $i = 1, \ldots, 100$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \times \frac{4}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = \frac{9}{5}, \\ E(X_i^2) &= 1^2 \times \frac{4}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} = \frac{29}{5}, \\ \mathrm{VAR}(X_i) &= E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{64}{25}. \end{aligned}$$

Κατόπιν, παρατηρούμε πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} > 2\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times \frac{9}{5}}{\frac{8}{5} \times \sqrt{100}} > \frac{200 - 100 \times \frac{9}{5}}{\frac{8}{5} \times \sqrt{100}}\right) \\ &\simeq P\left(Z > \frac{5}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) \simeq 0.1056. \end{aligned}$$

Η πρώτη προσεγγιστική ισότητα προκύπτει με χρήση του Κ.Ο.Θ.