ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΚΑΘ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2016
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις. Οι τελικές απαντήσεις μπορούν να περιλαμβάνουν τη συνάρτηση Φ.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο επιθετικός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

   (α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

   (β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

   (γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

   Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη το πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

2. **(Σφαιρίδια)** Παίρνουμε 3 σφαιρίδια από ένα δοχείο που έχει 2 λευκά, 3 μαύρα, και 2 κόκκινα σφαιρίδια. Όλοι οι συνδυασμοί 3 σφαιριδίων είναι εξίσου πιθανό να προκύψουν. Έστω X το πλήθος των λευκών και Y το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων που παίρνουμε.

(α΄) *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα $p_{XY}(x, y)$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Σας συμφέρει να στοιχηματίσετε με απόδοση $1 - 1$ (δηλαδή αν κερδίσετε λαμβάνετε ένα ποσό A, και αν χάσετε δίνετε το ίδιο ποσό A) ότι θα εμφανιστεί ακριβώς 1 μαύρο σφαιρίδιο;

3. **(Διόρθωση γραπτών)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων, τα γραπτά των φοιτητών ανήκουν σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

   (α΄) Ένα γραπτό είναι λευκή κόλλα με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και ο διδάσκοντας βάζει βαθμό 0, και χρειάζεται 12 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τη διόρθωση.

   (β΄) Ένα γραπτό δεν είναι λευκή κόλλα αλλά έχει έκταση λιγότερη από 2 σελίδες, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα τετράπλευρο ζάρι και βάζει ως βαθμό το αποτέλεσμα X της ζαριάς, με το X να λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, 4$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 20 δευτερόλεπτα.

   (γ΄) Για τα υπόλοιπα γραπτά, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα εξάπλευρο ζάρι και βάζει βαθμό $4 + Y$, όπου Y είναι το αποτέλεσμα της ζαριάς και λαμβάνει τιμές $Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 30 δευτερόλεπτα.

   Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μάζα πιθανότητας και η μέση τιμή του βαθμού Z ενός φοιτητή;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου W για να διορθωθεί ένα γραπτό;

   (γ΄) *(1.5 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα ο διδάσκοντας να διορθώσει μέσα σε 2 ώρες τουλάχιστον 320 γραπτά; (Αγνοούμε τους χρόνους μετάβασης από γραπτό σε γραπτό και άλλους χρόνους πέραν αυτών της διόρθωσης, και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διόρθωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.)

4. **(Χημείο)** Στην αρχή μιας δίωρης εξέτασης, στο Χημείο βρίσκονται 60 φοιτητές. Κάθε ένας από αυτούς θα αποχωρήσει από την εξέταση μετά από ένα τυχαίο χρόνο X ο οποίος μετράται σε ώρες και έχει την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

   Οι χρόνοι αποχώρησης διαφορετικών φοιτητών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου X;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Έστω Y το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν στην αίθουσα ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του Y;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup {}_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \; \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^n a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^n a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^\infty k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^\infty {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \; \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^K E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\,\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \; \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \; \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^\infty p_X(k) p_Y(m - k), \; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx,\ \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\,\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b],\\ 0, & \text{για } x\notin[a,b],\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0,\\ 0, & \text{για } x<0,\end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\end{cases} \quad E(X) = \theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X) = \mu, \quad \mathrm{VAR}(X) = \sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\right) dx,\\ \int_c^d \left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\right) dy,\end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2,\ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i) = \mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, & \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1,\end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), & \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty,\\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty.\end{cases}$$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2015-2016
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΘ. ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2015-2016

1. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

(α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

(β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

(γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

(β΄) Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

(γ΄) Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

Λύση: Έστω τα ενδεχόμενα A ο επιθετικός να είναι «χέλι», B ο επιθετικός να είναι «μέτριος», και C ο επιθετικός να είναι «παλτό». Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}, \qquad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Έστω, επίσης το ενδεχόμενο G ο επιθετικός να σκοράρει σε ένα παιχνίδι. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(G|A) = \frac{2}{3}, \qquad P(G|B) = \frac{1}{3}, \qquad P(G|C) = \frac{1}{6}.$$

(α΄) Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A|G) &= \frac{P(AG)}{P(G)} = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{4+4+3} = \frac{4}{11} \simeq 0.3636.
\end{aligned}$$

(β΄) Αφού ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα άλλα και με την ίδια πιθανότητα $\frac{2}{3}$ σε καθένα από αυτά, το πλήθος των παιχνιδιών X στα οποία ο επιθετικός σκοράρει ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε πείραμα) $p = \frac{2}{3}$, επομένως

$$P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k},$$

και

$$E(X) = Np = \frac{20}{3} \simeq 6.6667, \qquad \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p) = 10\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{20}{9} \simeq 2.2222.$$

(γ΄) Έστω τώρα G_2 το ενδεχόμενο ο επιθετικός να σκοράρει σε ακριβώς 2 από τα 5 παιχνίδια. Όπως και στο προηγούμενο σκέλος, το πλήθος των παιχνιδιών στα οποία θα σκοράρει δίνεται από την διωνυμική κατανομή, επομένως

$$\begin{aligned}
P(G_2|A) &= \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3, \\
P(G_2|B) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3, \\
P(G_2|C) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3.
\end{aligned}$$

Και πάλι, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(A|G_2) &= \frac{P(AG_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2|A)P(A)}{P(G_2|A)P(A) + P(G_2|B)P(B) + P(G_2|C)P(C)} \\
&= \frac{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6}}{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{4 + 16 + 3 \times 5^3/2^5} = \frac{128}{128 + 512 + 375} \simeq 0.1261.
\end{aligned}
$$

2. **(Σφαιρίδια)** Παίρνουμε 3 σφαιρίδια από ένα δοχείο που έχει 2 λευκά, 3 μαύρα, και 2 κόκκινα σφαιρίδια. Όλοι οι συνδυασμοί 3 σφαιριδίων είναι εξίσου πιθανό να προκύψουν. Έστω X το πλήθος των λευκών και Y το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων που παίρνουμε.

   (α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα $p_{XY}(x, y)$.

   (β΄) Σας συμφέρει να στοιχηματίσετε με απόδοση $1 - 1$ (δηλαδή αν κερδίσετε λαμβάνετε ένα ποσό A, και αν χάσετε δίνετε το ίδιο ποσό A) ότι θα εμφανιστεί ακριβώς 1 μαύρο σφαιρίδιο;

   Λύση:

   (α΄) Πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες

   $$p_{XY}(x, y) = P(X = x,\ Y = y), \qquad x, y = 0, 1, 2, 3.$$

   Υπάρχουν, λοιπόν, συνολικά 16 πιθανότητες που πρέπει να υπολογιστούν. Αρκετές, όμως, προκύπτουν άμεσα. Πράγματι, με δεδομένο ότι έχουμε μόνο 2 λευκά σφαιρίδια, θα πρέπει

   $$P(X = 3,\ Y = 0) = P(X = 3,\ Y = 1) = P(X = 3,\ Y = 2) = P(X = 3,\ Y = 3) = 0.$$

   Επίσης, αφού υπάρχουν μόνο δύο κόκκινα σφαιρίδια, και θα επιλέξουμε τρία σφαιρίδια, δεν μπορεί να μην επιλέξουμε ούτε κάποιο λευκό, ούτε κάποιο μαύρο σφαιρίδιο, επομένως

   $$P(X = 0,\ Y = 0) = 0.$$

   Τέλος, αφού επιλέγουμε 3 συνολικά σφαιρίδια, δεν γίνεται το άθροισμα $X + Y$ να υπερβαίνει το 3, επομένως

   $$P(X = 2,\ Y = 2) = P(X = 2,\ Y = 3) = P(X = 1,\ Y = 3) = 0.$$

   Αρκεί, λοιπόν, να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες 8 πιθανότητες. Παρατηρούμε πως υπάρχουν 7 σφαιρίδια, εκ των οποίων επιλέγουμε τα 3, επομένως υπάρχουν

   $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

   δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα για το πείραμα.
   Για να υπολογίσουμε την $P(X = 1, Y = 1)$ παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{2}{1} = 2$ τρόποι για να επιλέξουμε το 1 από τα 2 λευκά σφαιρίδια, $\binom{3}{1}$ τρόποι για να επιλέξουμε 1 από τα 3 μαύρα σφαιρίδια, και $\binom{2}{1}$ τρόποι για να επιλέξουμε 1 ακόμα από τα 2 κόκκινα σφαιρίδια, προκειμένου να συμπληρωθεί τριάδα. Επομένως:

   $$P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}.$$

Με ανάλογο τρόπο έχουμε και τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
P(X=1,\, Y=2) &= \frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35},\\
P(X=1,\, Y=0) &= \frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{35},\\
P(X=2,\, Y=0) &= \frac{\binom{2}{2}\times\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{35},\\
P(X=2,\, Y=1) &= \frac{\binom{2}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35},\\
P(X=0,\, Y=1) &= \frac{\binom{3}{1}\times\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3}{35},\\
P(X=0,\, Y=2) &= \frac{\binom{3}{2}\times\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{6}{35},\\
P(X=0,\, Y=3) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}.
\end{aligned}$$

Όλες οι πιθανότητες $P(X=x,\; Y=y)$ συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x / y	0	1	2	3
0	0	2/35	2/35	0
1	3/35	12/35	3/35	0
2	6/35	6/35	0	0
3	1/35	0	0	0

(β΄) Η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς ένα μαύρο σφαιρίδιο είναι

$$P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)=\frac{3}{35}+\frac{12}{35}+\frac{3}{35}+0=\frac{18}{35},$$

που είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{2}$, επομένως μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε οτι θα προκύψει ακριβώς ένα μαύρο σφαιρίδιο.

3. **(Διόρθωση γραπτών)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων, τα γραπτά των φοιτητών ανήκουν σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

(α΄) Ένα γραπτό είναι λευκή κόλλα με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και ο διδάσκοντας βάζει βαθμό 0, και χρειάζεται 12 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τη διόρθωση.

(β΄) Ένα γραπτό δεν είναι λευκή κόλλα αλλά έχει έκταση λιγότερη από 2 σελίδες, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα τετράπλευρο ζάρι και βάζει ως βαθμό το αποτέλεσμα X της ζαριάς, με το X να λαμβάνει τις τιμές $X=1,2,3,4$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 20 δευτερόλεπτα.

(γ΄) Για τα υπόλοιπα γραπτά, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα εξάπλευρο ζάρι και βάζει βαθμό $4+Y$, όπου Y είναι το αποτέλεσμα της ζαριάς και λαμβάνει τιμές $Y=1,2,3,4,5,6$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 30 δευτερόλεπτα.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας και η μέση τιμή του βαθμού Z ενός φοιτητή;

(β΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου W για να διορθωθεί ένα γραπτό;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο διδάσκοντας να διορθώσει μέσα σε 2 ώρες τουλάχιστον 320 γραπτά; (Αγνοούμε τους χρόνους μετάβασης από γραπτό σε γραπτό και άλλους χρόνους πέραν αυτών της διόρθωσης, και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διόρθωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.)

Λύση:

(α΄) Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό 0 αν παραδώσει λευκή κόλλα, δηλαδή με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 1, 2, 3, 4$ αν παραδώσει γραπτό που δεν είναι λευκό αλλά με λιγότερες από 2 σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, και επιπλέον το ζάρι φέρει z, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Επομένως, η πιθανότητα $P(Z = z)$ είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Τέλος, ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, αν το γραπτό του είναι 2 ή περισσότερες σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, και επιπλέον το ζάρι έρθει $z - 4$, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Άρα, ο βαθμός θα είναι z με πιθανότητα $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. Συγκεντρωτικά,

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & z = 0, \\ \frac{1}{8}, & z = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{18}, & z = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

Επομένως, η μέση τιμή $E(Z)$ της βαθμολογίας Z είναι

$$E(Z) = \sum_{z=0}^{10} z p_Z(z) = 0 \times \frac{1}{6} + (1 + 2 + 3 + 4) \times \frac{1}{8} + (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \times \frac{1}{18} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

(β΄) Με πιθανότητα $\frac{1}{6}$ ο διδάσκοντας θα χρειαστεί 12 δευτερόλεπτα για να διορθώσει το γραπτό, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα χρειαστεί 20 δευτερόλεπτα, και με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ θα χρειαστεί 30 δευτερόλεπτα. Επομένως,

$$p_W(12) = \frac{1}{6}, \qquad p_W(20) = \frac{1}{2}, \qquad p_W(30) = \frac{1}{3},$$

και

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{3} \times 30 = 22, \\ E(W^2) &= \frac{1}{6} \times 144 + \frac{1}{2} \times 400 + \frac{1}{3} \times 900 = 524. \\ \mathrm{VAR}(E) &= E(W^2) - (E(W))^2 = 524 - 484 = 40. \end{aligned}$$

(γ΄) Έστω W_i, $i = 1, 2, \ldots$ οι χρόνοι διόρθωσης των διαδοχικών γραπτών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{320} W_i \leq 7200\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{320} W_i - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}} \leq \frac{7200 - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}}\right) \\ &\simeq P\left(Z \leq \frac{160}{10\sqrt{128}}\right) = P\left(Z \leq \sqrt{2}\right) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) \simeq 0.9214. \end{aligned}$$

4. **(Χημείο)** Στην αρχή μιας δίωρης εξέτασης, στο Χημείο βρίσκονται 60 φοιτητές. Κάθε ένας από αυτούς θα αποχωρήσει από την εξέταση μετά από ένα τυχαίο χρόνο X ο οποίος μετράται σε ώρες και έχει την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Οι χρόνοι αποχώρησης διαφορετικών φοιτητών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου X;

(β΄) Έστω Y το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν στην αίθουσα ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του Y;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x(1 + x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)' dx \\ &= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{6} \simeq 1.1667, \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^2(1 + x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)' dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{1}{4} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{3} \simeq 1.6667, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} \simeq 0.3056. \end{aligned}$$

(β΄) Ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης, κάθε φοιτητής θα έχει αποχωρήσει με πιθανότητα

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(1+x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x + \frac{x^2}{2}\right)'\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \simeq 0.3750.$$

Υπάρχουν 60 φοιτητές, καθένας εκ των οποίων θα έχει φύγει στο τέλος της μιας ώρας ανεξάρτητα από του υπόλοιπους με πιθανότητα $\frac{3}{8}$. Επομένως, το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 60$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Επομένως, κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή,

$$\begin{aligned}
P(Y=y) &= \binom{60}{y}\left(\frac{5}{8}\right)^y \left(\frac{3}{8}\right)^{60-y}, \qquad y = 1, \ldots, 60, \\
E(Y) &= Np = 60 \times \frac{5}{8} = \frac{75}{2} \simeq 37.5, \\
\mathrm{VAR}(Y) &= Np(1-p) = 60 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{225}{16} \simeq 14.0625.
\end{aligned}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2016
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
11. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Ανάβαση Ζυγοβιστίου)** *(2 μονάδες)* Στο ετήσιο ράλλυ Ανάβασης Ζυγοβιστίου, κάθε οδηγός που συμμετέχει για πρώτη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 10%, κάθε οδηγός που συμμετέχει για δεύτερη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 5%, ενώ οι οδηγοί που συμμετέχουν για τουλάχιστον τρίτη φορά θα εγκαταλείψουν τον αγώνα με πιθανότητα 1%. Σε έναν αγώνα συμμετέχουν συνολικά 30 οδηγοί, εκ των οποίων 10 για πρώτη φορά, 15 για δεύτερη φορά, και άλλοι 5 οδηγοί έχουν συμμετάσχει 3 ή περισσότερες φορές.

   (α΄) *(1.5 μονάδες)* Αν, μετά τον αγώνα, μάθουμε για ένα τυχαία επιλεγμένο οδηγό (χωρίς προτίμηση στην επιλογή) ότι εγκατέλειψε, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν η πρώτη του συμμετοχή;

   (β΄) *(0.5 μονάδες)* Κατά μέσο όρο πόσοι οδηγοί θα εγκαταλείψουν τον συγκεκριμένο αγώνα;

2. **(Ποδοσφαιρικός αγώνας)** *(2 μονάδες)* Στον ετήσιο ποδοσφαιρικό αγώνα Ζυγοβιστίου-Στεμνίτσας η ομάδα του Ζυγοβιστίου επιτυγχάνει X τέρματα ενώ η ομάδα της Στεμνίτσας Y τέρματα. Οι από κοινού πιθανότητες $P(X = x, Y = y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα

y \ x	1	2	3	4	5
1	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16
2	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Κατά μέσο όρο, πόσα τέρματα θα σημειωθούν;

   (β΄) *(0.5 μονάδες)* Με δεδομένο ότι ο αγώνας δεν ήταν ισόπαλος, ποια η πιθανότητα να έχει κερδίσει το Ζυγοβίστι;

   (γ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω το ακόλουθο παιχνίδι: αν μπουν περισσότερα από 5 τέρματα (αθροιστικά, και από τις δύο ομάδες) λαμβάνουμε 4 ευρώ, αλλιώς δίνουμε 1 ευρώ. Μας συμφέρει να παίξουμε αυτό το παιχνίδι ή όχι, και γιατί;

(δ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω πως γίνονται διαδοχικά αγώνες μέχρι η Στεμνίτσα να μην χάσει. Κατά μέσο όρο, πόσοι αγώνες θα γίνουν; Ποια υπόθεση κάνατε για να καταλήξετε στο αποτέλεσμα;

3. **(Πολύτεκνοι)** *(1.5 μονάδες)* Μία πολύτεκνη νοσηλεύτρια έχει 6 παιδιά, καθένα εκ των οποίων, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα:

   (α΄) θα αναπτύξει σε μεγάλη ηλικία το νόσημα K, με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, και

   (β΄) θα έχει διάρκεια ζωής κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\mu = 80$ έτη και τυπική απόκλιση $\sigma = 5$ έτη.

   Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η πιθανότητα p ακριβώς 2 παιδιά να εμφανίσουν το νόσημα K;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Δώστε μια ακριβή έκφραση (χωρίς να υπολογίσετε αριθμητική τιμή) για την πιθανότητα κανένα παιδί να μην ζήσει περισσότερο από 90 χρόνια.

4. **(Φορολογία)** *(2 μονάδες)* Σε μια χώρα, το ετήσιο φορολογητέο εισόδημα X (σε χιλιάδες ευρώ) ενός πολίτη έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10. Τα εισοδήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι πολίτες πληρώνουν σε φόρο εισοδήματος το 10% του μέρους του εισοδήματός τους που υπερβαίνει τις 5 χιλιάδες ευρώ. (Αν το εισόδημα ενός πολίτη είναι κάτω από 5 χιλιάδες, τότε ο πολίτης δεν πληρώνει φόρο.) Έστω Y ο φόρος που πληρώνει κάποιος πολίτης.

   (α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια η πιθανότητα ένας οποιοσδήποτε πολίτης να πληρώνει φόρους;

   (β΄) *(0.5 μονάδες)* Εκφράστε το Y σαν συνάρτηση του X.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Αν η χώρα έχει 10^6 πολίτες, πόσα έσοδα θα έχει κατά μέσο όρο το χρόνο;

5. **(Καρέκλες)** *(2.5 μονάδες)* Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$
$$P(A) \geq 0 \, \forall A \in \mathcal{F}, \quad P(\Omega) = 1, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(_1 \cup _2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$
$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(A) \leq 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \; P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \; P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A' \cap B) + P(A' \cap B' \cap C),$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \; P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{+k-1}{k} = \binom{+k-1}{-1}$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_2 A_1) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}),$$
$$P() = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B'), \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')},$$
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N) \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad (\{B_i\} \text{ διαμέριση}).$$
$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) = P(B|A) \Leftrightarrow P(A) = P(A|B).$$

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\}) \, \forall x \in S_X, \quad F_X(x) = P(X \leq x), \quad \lim_{t \to x^-} F(t) = P(X < x), \quad E(X) = \sum_{x \in S_X} x p_X(x),$$
$$E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(x) p_X(x), \quad E(aX + b) = aE(X) + b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$
$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X - \mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \; e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$
$$X \sim \mathrm{Bern}(p), \quad p_X(0) = 1 - p, \; p_X(1) = p, \; E(X) = p, \; \mathrm{VAR}(X) = p(1-p),$$
$$X \sim \text{Διων}(N, p), \; p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \; E(X) = Np, \; \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p),$$
$$X \sim \text{Γεωμ}(p), \; p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; E(X) = 1/p, \; \mathrm{VAR}(X) = (1-p)/p^2, \; P(X \geq m + n | X > n) = P(X \geq m), \; m \geq 1, n \geq 0,$$
$$X \sim \text{Υπερ}(N, k, n), \; p_X(m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \; E(X) = \frac{nk}{N}, \; \mathrm{VAR}(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda), \; p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; E(X) = \lambda, \; \mathrm{VAR}(X) = \lambda.$$

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x \in S_X, \, \forall y \in S_Y, \quad p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{XY}(x, y),$$
$$E(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y) p_{XY}(x, y), \quad E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X, Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X, Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y), \; \mathrm{VAR}(X + Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\,\mathrm{COV}(X, Y),$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \, \forall A, B \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \, \forall x, y,$$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X, Y) = 0, \quad p_{X+Y}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(m-k), \; m \in \mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{COV}(X_i, X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\,\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X)=\theta, \quad \mathrm{VAR}(X) = \theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X)=\mu, \quad \mathrm{VAR}(X)=\sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y) : a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y) : a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\right)dx, \\ \int_c^d\left(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\right)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y) = 0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c) \le \frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots\ \text{ανεξ. με κοινή κατ.},\ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, & \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i) = \sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$

Πίνακας 1: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για αρνητικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Πίνακας 2: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για θετικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2015-2016
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2015-2016

1. **(Ανάβαση Ζυγοβιστίου)** *(2 μονάδες)* Στο ετήσιο ράλλυ Ανάβασης Ζυγοβιστίου, κάθε οδηγός που συμμετέχει για πρώτη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 10%, κάθε οδηγός που συμμετέχει για δεύτερη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 5%, ενώ οι οδηγοί που συμμετέχουν για τουλάχιστον τρίτη φορά θα εγκαταλείψουν τον αγώνα με πιθανότητα 1%. Σε έναν αγώνα συμμετέχουν συνολικά 30 οδηγοί, εκ των οποίων 10 για πρώτη φορά, 15 για δεύτερη φορά, και άλλοι 5 οδηγοί έχουν συμμετάσχει 3 ή περισσότερες φορές.

   (α΄) *(1.5 μονάδες)* Αν, μετά τον αγώνα, μάθουμε για ένα τυχαία επιλεγμένο οδηγό (χωρίς προτίμηση στην επιλογή) ότι εγκατέλειψε, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν η πρώτη του συμμετοχή;

   (β΄) *(0.5 μονάδες)* Κατά μέσο όρο πόσοι οδηγοί θα εγκαταλείψουν τον συγκεκριμένο αγώνα;

   Λύση:

   (α΄) Έστω E το ενδεχόμενο ο επιλεγμένος οδηγός να εγκαταλείψει, και έστω A_1, A_2 και A_3 τα ενδεχόμενα ο οδηγός αυτός να έχει συμμετάσχει για πρώτη φορά, και δεύτερη φορά, ή για τουλάχιστον 3 φορές αντιστοίχως. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A_1) = \frac{10}{10+15+5} = \frac{1}{3}, \quad P(A_2) = \frac{15}{10+15+5} = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{5}{10+15+5} = \frac{1}{6},$$

   και, επιπλέον,

$$P(E|A_1) = 0.1, \quad P(E|A_2) = 0.05, \quad P(E|A_3) = 0.01.$$

   Με χρήση του κανόνα του Bayes, έχουμε

$$\begin{aligned}
P(A_1|E) &= \frac{P(A_1E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E|A_1)P(A_1)+P(E|A_2)P(A_2)+P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.1\times\frac{1}{3}}{0.1\times\frac{1}{3}+0.05\times\frac{1}{2}+0.01\times\frac{1}{6}} = \frac{5}{9}, \\
P(A_2|E) &= \frac{P(A_2E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_2)P(A_2)}{P(E|A_1)P(A_1)+P(E|A_2)P(A_2)+P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.05\times\frac{1}{2}}{0.1\times\frac{1}{3}+0.05\times\frac{1}{2}+0.01\times\frac{1}{6}} = \frac{5}{12}, \\
P(A_3|E) &= \frac{P(A_3E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_3)P(A_3)}{P(E|A_1)P(A_1)+P(E|A_2)P(A_2)+P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.01\times\frac{1}{6}}{0.1\times\frac{1}{3}+0.05\times\frac{1}{2}+0.01\times\frac{1}{6}} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

   (β΄) Έστω X_i, με $i = 1, \ldots, 30$, Τ.Μ. Bernoulli που ισούνται με 1 αν ο i-οστός οδηγός εγκαταλείψει και με 0 αν δεν εγκαταλείψει. Το πλήθος των οδηγών που εγκαταλείπουν είναι $\sum_{i=1}^{30} X_i$, επομένως κατά μέσο όρο θα εγκαταλείψουν

$$E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} E(X_i) = 10\times 0.1 + 15\times 0.05 + 5\times 0.01 = 1.8$$

   οδηγοί.

2. **(Ποδοσφαιρικός αγώνας)** *(2 μονάδες)* Στον ετήσιο ποδοσφαιρικό αγώνα Ζυγοβιστίου-Στεμνίτσας η ομάδα του Ζυγοβιστίου επιτυγχάνει X τέρματα ενώ η ομάδα της Στεμνίτσας Y τέρματα. Οι από κοινού πιθανότητες $P(X = x, Y = y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα

y \ x	1	2	3	4	5
1	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16
2	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16

(α΄) *(0.5 μονάδες)* Κατά μέσο όρο, πόσα τέρματα θα σημειωθούν;

(β΄) *(0.5 μονάδες)* Με δεδομένο ότι ο αγώνας δεν ήταν ισόπαλος, ποια η πιθανότητα να έχει κερδίσει το Ζυγοβίστι;

(γ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω το ακόλουθο παιχνίδι: αν μπουν περισσότερα από 5 τέρματα (αθροιστικά, και από τις δύο ομάδες) λαμβάνουμε 4 ευρώ, αλλιώς δίνουμε 1 ευρώ. Μας συμφέρει να παίξουμε αυτό το παιχνίδι ή όχι, και γιατί;

(δ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω πως γίνονται διαδοχικά αγώνες μέχρι η Στεμνίτσα να μην χάσει. Κατά μέσο όρο, πόσοι αγώνες θα γίνουν; Ποια υπόθεση κάνατε για να καταλήξετε στο αποτέλεσμα;

Λύση:

(α΄) Το πλήθος των συνολικών τερμάτων που θα σημειωθούν είναι $X+Y$ και η μέση τιμή τους είναι

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \frac{1}{16}\times(1+1)+\frac{1}{8}\times(1+2)+\frac{1}{8}\times(1+3)+\frac{1}{8}\times(1+4)+\frac{1}{16}\times(1+5) \\ &\quad +\frac{1}{16}\times(2+1)+\frac{1}{8}\times(2+2)+\frac{1}{8}\times(2+3)+\frac{1}{8}\times(2+4)+\frac{1}{16}\times(2+5) \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω Z το ενδεχόμενο να κερδίσει το Ζυγοβίστι, S το ενδεχόμενο να κερδίσει η Στεμνίτσα, και I το ενδεχόμενο να έχουμε ισοπαλία. Τα τρία αυτά ενδεχόμενα έχουν πιθανότητες να συμβούν, αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} P(Z) &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{4}. \\ P(S) &= \frac{1}{16}, \\ P(I) &= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P(Z|(Z\cup S)=\frac{P(Z(Z\cup S))}{P(Z\cup S)}=\frac{P(Z)}{P(Z)+P(S)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{12}{13}.$$

(γ΄) Η πιθανότητα να σημειωθούν περισσότερα από 5 τέρματα ισούται με

$$P(X=5,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=5,Y=2)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}.$$

Το κέρδος μας όταν παίξουμε το παιχνίδι είναι μια τυχαία μεταβλητή G η οποία λαμβάνει την τιμή 4 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και την τιμή (-1) με πιθανότητα $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Επομένως, η μέση τιμή του κέρδους G ισούται με

$$E(G)=4\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}>0,$$

επομένως μας συμφέρει να παίξουμε το παιχνίδι.

(δ΄) Θα υποθέσουμε ότι οι διαδοχικοί αγώνες είναι ανεξάρτητα και όμοια πειράματα. Αν ορίσουμε ως επιτυχία να μην χάσει η Στεμνίτσα, τότε η πιθανότητα επιτυχίας είναι $P(S)+P(I)=\frac{1}{4}$. Το πλήθος των πειραμάτων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή, επομένως το πλήθος των αγώνων M που θα γίνουν έχει μέση τιμή $E(M)=\frac{1}{1/4}=4$.

3. **(Πολύτεκνοι)** *(1.5 μονάδες)* Μία πολύτεκνη νοσηλεύτρια έχει 6 παιδιά, καθένα εκ των οποίων, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα:

(α΄) θα αναπτύξει σε μεγάλη ηλικία το νόσημα K, με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, και

(β΄) θα έχει διάρκεια ζωής κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\mu=80$ έτη και τυπική απόκλιση $\sigma=5$ έτη.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια είναι η πιθανότητα p ακριβώς 2 παιδιά να εμφανίσουν το νόσημα K;

(β΄) *(1 μονάδα)* Δώστε μια ακριβή έκφραση (χωρίς να υπολογίσετε αριθμητική τιμή) για την πιθανότητα κανένα παιδί να μην ζήσει περισσότερο από 90 χρόνια.

Λύση:

(α΄) Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 6 ανεξάρτητα πειράματα, καθένα εκ των οποίων είναι επιτυχία με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Το πλήθος των επιτυχιών ακολουθεί, λοιπόν, την διωνυμική κατανομή, και τελικά έχουμε

$$p = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1215}{4096} \simeq 0.2966.$$

(β΄) Για την διάρκεια ζωής X_i του παιδιού i έχουμε

$$P(X_i < 90) = P\left(\frac{X_i - 80}{5} < \frac{90-80}{5}\right) = P(Z < 2) = \Phi(2),$$

όπου, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η Τ.Μ. Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Επομένως, με χρήση ανεξαρτησίας, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $(\Phi(2))^6$.

4. **(Φορολογία)** *(2 μονάδες)* Σε μια χώρα, το ετήσιο φορολογητέο εισόδημα X (σε χιλιάδες ευρώ) ενός πολίτη έχει εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10. Τα εισοδήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι πολίτες πληρώνουν σε φόρο εισοδήματος το 10% του μέρους του εισοδήματός τους που υπερβαίνει τις 5 χιλιάδες ευρώ. (Αν το εισόδημα ενός πολίτη είναι κάτω από 5 χιλιάδες, τότε ο πολίτης δεν πληρώνει φόρο.) Έστω Y ο φόρος που πληρώνει κάποιος πολίτης.

(α΄) *(0.5 μονάδες)* Ποια η πιθανότητα ένας οποιοσδήποτε πολίτης να πληρώνει φόρους;

(β΄) *(0.5 μονάδες)* Εκφράστε το Y σαν συνάρτηση του X.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Αν η χώρα έχει 10^6 πολίτες, πόσα έσοδα θα έχει κατά μέσο όρο το χρόνο;

Λύση: Καταρχάς, η πυκνότητα της Τ.Μ. X είναι η ακόλουθη:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-x/10}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Σχετικά με τα ερωτήματα, έχουμε:

(α΄) Ένας πολίτης πληρώνει φόρο με πιθανότητα

$$p = P(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-5/10} = e^{-1/2},$$

κατά τα γνωστά για την εκθετική κατανομή. Η άνω πιθανότητα είναι και το ποσοστό των πολιτών που πληρώνει φόρους.

(β΄) Βάσει της εκφώνησης,

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq 5, \\ \frac{X-5}{10}, & X > 5, \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα, $Y = g(X)$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5, \\ \frac{x-5}{10}, & x > 5. \end{cases}$$

(γ΄) Κατά τα γνωστά για τη μέση τιμή μιας συνάρτησης $Y = g(X)$ μιας Τ.Μ. X, έχουμε

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = \int_5^{\infty} \frac{x-5}{10} \times \frac{1}{10}e^{-x/10}\,dx \\ &= \frac{e^{-1/2}}{100}\int_5^{\infty}(x-5)e^{-(x-5)/10}\,dx = \frac{e^{-1/2}}{100}\int_0^{\infty} ye^{-y/10}\,dy \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{10}\int_0^{\infty}\frac{y}{10}e^{-y/10}\,dy = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Στην 4η ισότητα εφαρμόσαμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - 5$. Στην τελευταία ισότητα παρατηρήσαμε απλώς ότι το ολοκλήρωμα είναι η μέση τιμή $\theta = 10$ μιας εκθετικής Τ.Μ. με παράμετρο $\theta = 10$.

Αφού κάθε ένας από τους 10^6 πολίτες θα πληρώσει φόρο Y_i με $E(Y_i) = e^{-1/2}$, συνολικά ο φόρος που θα συλλέξει η χώρα είναι

$$E\left(\sum_{i=1}^{10^6} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{10^6} E(Y_i) = 10^6 e^{-1/2}.$$

5. **(Καρέκλες)** *(2.5 μονάδες)* Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

Λύση: Έστω οι 1000 Τ.Μ. Bernoulli X_i, $i = 1, \ldots, 1000$, τέτοιες ώστε $X_i = 1$ αν έρθει ο i-οστός Ζυγοβιστινός, και $X_i = 0$ αν δεν έρθει. Έχουμε $E(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ και $\mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ επομένως η τυπική απόκλιση των X_i ισούται με $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}(X_i)} = \frac{1}{2}$.

Έστω πως ο έφορος της εκκλησίας προμηθεύεται K καρέκλες. Τότε, η πιθανότητα να μην επαρκούν οι καρέκλες ισούται με

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma} > \frac{K - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}} > \frac{K - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right).
\end{aligned}$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο αριθμός K πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) < 0.01 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0.99) < \frac{K - 500}{5\sqrt{10}} \Leftrightarrow K > 500 + 5\sqrt{10}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 536.78,$$

και επειδή το K πρέπει να είναι ακέραιο, προκύπτει ότι ο έφορος πρέπει να αγοράσει 537 καρέκλες. Στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση Φ, άρα και η αντίστροφή της Φ^{-1}, είναι γνησίως αύξουσες.

Μία ελαφρώς καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει αν αρχικά προσεγγίζαμε την $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K + \frac{1}{2}\right)$. (Μπορείτε να καταλάβετε γιατί;) Θα προέκυπτε τότε ότι $K + \frac{1}{2} > 536.78 \Leftrightarrow K > 536.28$, επομένως και πάλι $K = 537$.

Χωρίς την προσέγγιση, αλλά με χρήση υπολογιστή, προκύπτει πως πράγματι ο $K = 537$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διωνυμικής με παραμέτρους N και p υπερβαίνει το 0.99. Επομένως, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν εισήγαγε κάποιο σφάλμα.