ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2024-2025

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

   (α΄) Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα των σημειώσεων, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.

   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.

   (γ΄) Μετά την διόρθωσή τους, οι ομάδες θα επιστρέφονται.

   (δ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.

   (ε΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.

   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.

   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

   (α΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας ΜΟΝΟ ηλεκτρονικά.

   (β΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).

   (γ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα.

   (δ΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.

   (ε΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

4. Ηλεκτρονική παράδοση:

   (α΄) Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και όχι με αποστολή email στο διδάσκοντα.

   (β΄) Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες.

   (γ΄) Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.

   (δ΄) Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf).

   (ε΄) Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.

   (ϛ΄) Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.

   (ζ΄) Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:59μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

(η΄) ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΔΕΚΤΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.

5. Αλλαγές στην ημέρα παράδοσης:

   (α΄) Σε περίπτωση που η καταληκτική ημέρα παράδοσης μιας ομάδας ασκήσεων είναι ημέρα διάλεξης και η διάλεξη ακυρωθεί ή αναβληθεί, η υποβολή της ομάδας μετατίθεται αυτόματα για την ημέρα της επόμενης διάλεξης, χωρίς να προηγηθεί ανακοίνωση από τον διδάσκοντα.

   (β΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΔΥΟ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

   (γ΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Διόρθωση:

   (α΄) Η διόρθωση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

   (β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

   (γ΄) Όλες οι ομάδες ασκήσεων έχουν την ίδια βαρύτητα. Όχι όμως και όλες οι ασκήσεις σε μια ομάδα.

7. Επιστροφή διορθωμένων εργασιών και ανακοίνωση βαθμολογίας:

   (α΄) Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

   (β΄) Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, ελάτε με την διορθωμένη ομάδα σας σε ώρες γραφείου του διδάσκοντα.

   (γ΄) Αν δεν μπορείτε να βρείτε την βαθμολογία της εργασίας σας στο σχετικό έγγραφο, ενημερώστε τον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

   (α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.

   (β΄) Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

   (γ΄) Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

   (δ΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

9. Σημαντικά σχόλια:

   (α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

   (β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

   (γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

   (δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

   (ε΄) **Βλέπετε το mail που σας έχει χορηγήσει το ΟΠΑ.** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ισότητα συνόλων)** Να δείξετε ότι
$$A \cup (\cap_{i=1}^{\infty} B_i) = \cap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i).$$

2. **(Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

   (α΄) Πραγματοποίηση μόνο του B.

   (β΄) Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C.

   (γ΄) Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.

   (δ΄) Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ε΄) Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ϛ΄) Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.

   (ζ΄) Το πολύ ένα πραγματοποιείται.

   (η΄) Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

3. **(Διαφορά μεταξύ αριθμών)** Δύο αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[0,1]$, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η επιλογή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή χωρίς να δείχνουμε προτίμηση στα σημεία κάποιου υποσυνόλου του $[0,1]$. Βρείτε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν (κάτ' απόλυτη τιμή) περισσότερο από $\frac{1}{2}$. *(Υπόδειξη: μελετήστε το τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$ του R^2.)*

4. **(Χρήση ιδιοτήτων πιθανοτήτων)** Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι
$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB), \qquad P(A'B) = 0.05.$$

   (α΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

   (β΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων $A\cup B$, $A'B'$, AB', $AB' \cup A'B$, $A \cup B'$, $A' \cup B$.

5. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

6. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$
   Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

7. **(Παιχνίδι)** Δύο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: Ένα δίκαιο κέρμα ρίχνεται 3 φορές. Έπειτα, ρίχνεται ένα δίκαιο ζάρι. Κερδίζει ο παίκτης A όταν το πλήθος των φορών που εμφανίστηκαν κορώνες και το αποτέλεσμα του ζαριού είναι και οι δύο ζυγοί ή και οι δύο μονοί αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση, κερδίζει ο παίκτης B. (Π.χ., κερδίζει ο B εάν έρθουν 2 κορώνες και το ζάρι είναι 5.)

   Προτείνετε ένα δειγματικό χώρο και μέτρο πιθανότητας που να αναπαριστά το παιχνίδι αυτό, και υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος. Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

2η Ομάδα Ασκήσεων

8. **(Το παράδοξο των γενεθλίων)** Σε μια αίθουσα βρίσκονται $M \leq 365$ άτομα. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου A τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου; Ποιο είναι το μικρότερο M για το οποίο η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από 0.5; Έστω τώρα ένα συγκεκριμένο άτομο. Ποια η πιθανότητα του ενδεχόμενου B να έχει τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους $M-1$ γενέθλια μαζί με *αυτό το άτομο*; Να αγνοηθεί η ύπαρξη δίσεκτων ετών.

9. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 10 ζευγάρια παπούτσια, και συνεπώς συνολικά 20 παπούτσια. Ανοίγουμε την παπουτσοθήκη και παίρνουμε 4 παπούτσια, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό τους. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στα 4 παπούτσια που πήραμε:

   (α΄) Να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι;

   (β΄) Να υπάρχει ακριβώς 1 ζευγάρι;

   (γ΄) Να υπάρχουν 2 ζευγάρια;

10. **(Age of Empires Logic)** 20 πολεμικοί ελέφαντες και 30 πεζικάριοι επιχειρούν να επιβιβαστούν σε ένα αποβατικό σκάφος και από αυτούς επιλέγονται μόνο οι 10, χωρίς προτίμηση στο ποιοι θα επιβιβαστούν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες;

11. **(Τράπουλα)** Ποια η πιθανότητα τραβώντας 5 φύλλα στην τύχη από μια τράπουλα να φέρετε:

    (α΄) Άσο μπαστούνι, δηλαδή να περιέχεται το φύλλο $A\spadesuit$.

    (β΄) Οποιονδήποτε άσο ανάμεσα στα φύλλα σας.

    (γ΄) Φουλ του άσου, δηλαδή 3 άσους και τα υπόλοιπα 2 φύλλα να είναι όμοια (π.χ., 2 ντάμες).

    Υποθέστε ότι όλοι οι συνδυασμοί 5 φύλλων είναι ισοπίθανοι.

12. **(Λεωφορείο)** Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει από n στάσεις.

    (α΄) Να κατασκευαστεί δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών, και να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.

    (β΄) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας φοιτητές.

13. **(Ασανσέρ)** Έστω κτήριο με 5 ορόφους. (Στους 5 ορόφους δεν υπολογίζεται το ισόγειο. Επίσης, δεν υπάρχει υπόγειο.) Έστω πως 4 άτομα, οι 1,2,3,4, μπαίνουν, από το ισόγειο, στο ασανσέρ. Καθένα από αυτά κατευθύνεται προς έναν από τους 5 ορόφους. Κάθε ένα από τα άτομα θα βγει σε κάποιον όροφο ανεξάρτητα από τα άλλα άτομα, χωρίς κάποια προτίμηση ως προς τον όροφο.

    (α΄) Ορίστε δειγματικό χώρο για το άνω τυχαίο πείραμα. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει και τι πιθανότητα έχει το καθένα;

    (β΄) Ποια η πιθανότητα να πάνε όλα τα άτομα σε έναν μόνο (αλλά οποιονδήποτε) όροφο;

    (γ΄) Ποια η πιθανότητα να πάνε όλα τα άτομα σε διαφορετικούς ορόφους;

    (δ΄) Ποια η πιθανότητα να βγουν δύο (οποιαδήποτε) άτομα μαζί σε έναν (οποιονδήποτε) όροφο και τα δύο άλλα επίσης μαζί σε έναν άλλο (οποιοδήποτε) όροφο;

14. **(Ρακούν)** Ένα πάρκο έχει > 25 ρακούν, από τα οποία 10 έχουν αιχμαλωτιστεί, καταγραφεί και κατόπιν ελευθερωθεί. Έστω ότι αιχμαλωτίζονται εκ νέου 20 ρακούν. Να βρεθεί η πιθανότητα 5 από αυτά να έχουν ήδη καταγραφεί. Έστω $P(N)$ αυτή η πιθανότητα. Για ποια τιμή του N μεγιστοποιείται; *(Υπόδειξη: συγκρίνετε το λόγο $P(N)/P(N-1)$ με τη μονάδα.)*

15. **(Χρωματιστές μπάλες)** Πόσες δυνατές διακριτές μεταθέσεις υπάρχουν ανάμεσα σε 4 κόκκινες μπάλες, 2 λευκές και 3 μαύρες; Εννοείται ότι μπάλες ιδίου χρώματος είναι εντελώς όμοιες μεταξύ τους, και προφανώς η μετάθεση δεν θα αλλάξει αν αλλάξουν δύο μπάλες ίδιου χρώματος θέση μεταξύ τους.

3η Ομάδα Ασκήσεων

16. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

    (β΄) Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

17. **(Δημοφιλία)** Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

18. **(Τρεις περιπτώσεις)** Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε AA, MM, AM. Το AA έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το MM και τις δύο μαύρες, ενώ το AM έχει την μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μαύρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μια πλευρά του είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι μαύρη; Απαντήστε το ερώτημα κάνοντας διαδοχικά τις ακόλουθες παραδοχές:

    (α΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά χωρίς να τη διαλέξει, αλλά επιλέγοντάς την στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην πλευρά.

    (β΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια άσπρη πλευρά.

    (γ΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια μαύρη πλευρά.

19. **(Κλέφτης)** Το συρτάρι A περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά κέρματα ενώ το συρτάρι B περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Ένας κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο κέρματα στην τύχη.

    (α΄) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά;

    (β΄) Αν διαπιστωθεί (κατά την σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά κέρματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι A;

20. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

    (α΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

    (β΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

    (γ΄) Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

21. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.

    (α΄) Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;

    (β΄) Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;

22. **(Τέσσερα διαφορετικά κέρματα)** Έχουμε 4 κέρματα. Τα δύο πρώτα είναι δίκαια, το τρίτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και το τέταρτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Διαλέγουμε ένα κέρμα στην τύχη, το ρίχνουμε 2 φορές, και φέρνουμε δύο φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε ένα από τα δύο δίκαια κέρματα;

4η Ομάδα Ασκήσεων

23. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

(α΄) Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

(β΄) Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

24. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλλουν ταυτόχρονα.

   (α΄) Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X.

   (β΄) Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.

25. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

26. **(20 μπάλες)** Από ένα δοχείο που περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20 εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 μπάλες, χωρίς να σημειώσουμε τη σειρά της επιλογής.

   (α΄) Να ορισθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. Πόσα αποτελέσματα περιλαμβάνει;

   (β΄) Να υπολογισθεί η κατανομή $F_X(x)$ της μέγιστης ένδειξης X στις 3 μπάλες του δείγματος, για $x = 1, 2, \ldots, 20$.

   (γ΄) Να υπολογισθεί η μάζα πιθανότητας $p_X(x)$.

   (δ΄) Αν στοιχηματίσουμε ότι βγάζοντας 3 μπάλες θα έχουμε μια τουλάχιστον μπάλα με ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;

27. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα στιλέτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές $1, 2, 3, 4$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(Y)$ της Y.

28. **(Άθροισμα ζαριών)** Ρίχνονται δύο δίκαια ζάρια. Έστω X_i η Τ.Μ. που δίνει το αποτέλεσμα του i ζαριού, για $i = 1, 2$.

   (α΄) Ορίστε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο και ένα μέτρο πιθανότητας που να περιγράφουν το παραπάνω πείραμα.

   (β΄) Βρείτε την μάζα και συνάρτηση κατανομής της X_1.

   (γ΄) Βρείτε την μάζα της τυχαίας μεταβλητής $Z = 7 - X_1$. Τι παρατηρείτε;

   (δ΄) Βρείτε την μάζα της τυχαίας μεταβλητής $Y = X_1 + X_2$.

   (ε΄) Ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για το άθροισμα των δύο ζαριών; Δηλαδή, για ποια τιμή y στο $\{2, 3, \ldots, 12\}$ μεγιστοποιείται η πιθανότητα $P(Y = y)$;

   (ς΄) Ποια είναι η μέση τιμή του αθροίσματος των δύο ζαριών;

5η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Υπέρβαση χωρητικότητας)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων έχουν λάβει οδηγία να καθίσουν σε μια αίθουσα 22 άτομα. Καθένα από αυτά τα άτομα θα έρθει με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Η αίθουσα χωρά να καθίσουν μόλις 20. Ποια είναι η πιθανότητα p τελικά να υπάρξει τουλάχιστον ένα άτομο που δεν θα βρει θέση να καθίσει σε εκείνη την αίθουσα;

30. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

    (α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

    (β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

    (γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

    Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

    (α΄) Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

    (β΄) Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

    (γ΄) Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

31. **(Gormiti)** Έχουμε ένα σετ από 100 διαφορετικές κάρτες Gormiti, εκ των οποίων ένας είναι ο Magmion και ένας άλλος ο Electricon. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.

    Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει ο Magmion;

    (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από τον Magmion **και** τον Electricon;

    (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει τον Magmion **ή** τον Electricon (και ενδεχομένως και τους δύο);

    (δ΄) Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω τον Magmion ακριβώς 7 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 200 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

32. **(Δύο φίλοι)** Σε ένα άλλο τραπέζι της καφετέριας, συνομιλούν δύο φίλοι, ο A και ο B, εκ των οποίων ο A είναι υγιής, ενώ ο B έχει κορωνοϊό. Όποτε ο B φτερνίζεται, κολλά τον A με κορωνοϊό με πιθανότητα $p_1 = 0.05$. Τα διαδοχικά φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

    (α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των φορών που πρέπει να φτερνιστεί ο B για να κολλήσει τον A, και με ποια παράμετρο ή παραμέτρους;

    (β΄) Πόσες φορές πρέπει να φτερνιστεί ο B ώστε ο A να έχει κολλήσει, σε κάποιο από τα φτερνίσματα, τον κορωνοϊό, με πιθανότητα τουλάχιστον 0.8;

33. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

34. **(Ασφαλιστής)** Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μια χρονιά. Καθένας από τους οδηγούς προκαλεί ατύχημα την δεδομένη χρονιά με πιθανότητα $p = 1/1000$. Έστω X ο αριθμός των οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη την χρονιά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X \leq 1), P(X = 3), P(X = 10)$, και έπειτα οι προσεγγίσεις τους χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της κατανομής της X από κατάλληλη κατανομή Poisson.

35. **(Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)** Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο κέρμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα δίνατε 50 Ευρώ για να παίξετε το παιχνίδι;

36. **(Μπρελόκ)** Έστω ένα μπρελόκ με 6 κλειδιά, εκ των οποίων ένα μόνο ανοίγει μια πόρτα. Δοκιμάζουμε τα κλειδιά στην πόρτα, χωρίς κάποια προτίμηση στη σειρά, μέχρι να βρούμε αυτό που την ανοίγει. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

   (α΄) Όταν ελέγξουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, το βάζουμε στην άκρη, και δεν το ξαναδοκιμάζουμε.

   (β΄) Έστω εναλλακτικά πως (λόγω του ότι πάσχουμε από αμνησία) όταν ελέγξουμε ότι ένα κλειδί δεν ανοίγει την πόρτα, δεν το βάζουμε στην άκρη, αλλά το επιστρέφουμε στο μπρελόκ και ξαναρχίζουμε την αναζήτηση εντελώς από την αρχή.

   Υπολογίστε, και για τις δύο περιπτώσεις, (α) κατά μέσο όρο πόσες προσπάθειες θα κάνουμε για να βρούμε το σωστό κλειδί, και (β) την πιθανότητα να χρειαστούμε ακριβώς 4 προσπάθειες μέχρι να βρούμε το σωστό κλειδί.

6η Ομάδα Ασκήσεων

37. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

   (α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y.

   (β΄) Ποια είναι η μέση τιμή των θερμίδων που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

   (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

38. **(Φιγούρες)** Μια κανονική τράπουλα έχει 52 φύλλα, εκ των οποίων τα 12 είναι φιγούρες. Επιλέγουμε 5 φύλλα από τα 52 φύλλα της τράπουλας, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και τα 5 επιλεγμένα φύλλα φιγούρες;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον 3 φιγούρες;

39. **(Ρηγάδες και Κούπες)** Λαμβάνουμε από μια κανονική τράπουλα τα ακόλουθα 16 φύλλα: τους 4 άσσους (A), τους 4 ρήγες (K), τις 4 ντάμες (Q) και τους 4 βαλέδες (J). Κάθε μια από τις άνω τετράδες αποτελείται από μια κούπα ($\heartsuit$), ένα σπαθί ($\clubsuit$), ένα καρό ($\diamondsuit$) και ένα μπαστούνι ($\spadesuit$). Επομένως, τα 16 φύλλα που έχουμε λάβει είναι τα ακόλουθα:

$$A\clubsuit,\ A\diamondsuit,\ A\spadesuit,\ A\heartsuit,\ K\clubsuit,\ K\diamondsuit,\ K\spadesuit,\ K\heartsuit,\ Q\clubsuit,\ Q\diamondsuit,\ Q\spadesuit,\ Q\heartsuit,\ J\clubsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ J\heartsuit.$$

   Λαμβάνουμε ένα συνδυασμό 3 φύλλων από τα άνω 16, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό. Έστω X το πλήθος από ρηγάδες που επιλέξαμε, και έστω Y το πλήθος από κούπες που επιλέξαμε.

   (α΄) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X.

   (β΄) Είναι οι Τ.Μ. X, Y ανεξάρτητες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ΄) Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y.

40. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

   (α΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x, y)$;

   (β΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

   (γ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

   (δ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

41. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό. Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \mathrm{COV}(X, Y)$.

42. **(Αυτιά και μύτες)** Ο Σταύρος έχει μεγάλη μύτη και η Μαρία έχει μεγάλα αυτιά. Ο Σταύρος και η Μαρία κάνουν 5 παιδιά, καθένα εκ των οποίων είναι αγόρι με πιθανότητα 0.5. Καθένα από αυτά κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας με πιθανότητα 0.5 και τη μεγάλη μύτη του Σταύρου με πιθανότητα 0.5. Κάθε παιδί κληρονομεί τη μεγάλη μύτη του Σταύρου ανεξάρτητα από το αν κληρονομεί τα μεγάλα αυτιά της Μαρίας, και ανεξάρτητα από το τι συνέβη στα άλλα παιδιά.

    (α΄) Έστω X το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει *και* τα μεγάλα αυτιά του Σταύρου *και* τη μεγάλη μύτη της Μαρίας. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(X = x)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του x.

    (β΄) Έστω Y το πλήθος των παιδιών που έχουν κληρονομήσει *είτε* τα μεγάλα αυτιά, *είτε* τη μεγάλη μύτη, *είτε* και τα δύο. Γράψτε ένα μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(Y = y)$, αναφέροντας τις δυνατές τιμές του y.

    (γ΄) Μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τη μύτη σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 2000 ευρώ και μια πλαστική επέμβαση που επαναφέρει τα αυτιά (και τα δύο) σε κανονικό μέγεθος κοστίζει 4000 ευρώ. Αν ο Σταύρος και η Μαρία επιδιορθώσουν με πλαστική όλες τις μεγάλες μύτες και τα μεγάλα αυτιά των *κοριτσιών* τους, ποια είναι η μέση τιμή των χρημάτων που θα χρειαστούν;

7η Ομάδα Ασκήσεων

43. **(Πυρκαγιές)** Ένα καλοκαιρινό μήνα η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} K\left[25 - (x-40)^2\right], & 35 \le x \le 45, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

    (α΄) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου K.

    (β΄) Σύμφωνα με έγκριτους δασολόγους, η έκταση των δασών που καίγεται κατά τη διάρκεια μιας ημέρας με μέγιστη θερμοκρασία X είναι $g(X) = e^{X-40}$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της έκτασης των δασών που θα καούν σε μια ημέρα εκείνου του μήνα.

44. **(Πυκνότητα Πιθανότητας)** Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & x \in [1,2], \\ 0, & x \notin [1,2], \end{cases}$$

μιας Τ.Μ., X, όπου το c είναι παράμετρος.

    (α΄) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου c.

    (β΄) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$ που αντιστοιχεί στην άνω πυκνότητα.

    (γ΄) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $E(X)$.

    (δ΄) Να υπολογίσετε ένα t τέτοιο ώστε $P(X \le t) = P(X \ge t)$.

45. **(Τοστιέρα-αποστειρωτής)** Ένας διδάσκων πιθανοτήτων αποστειρώνει γραπτά της τελικής εξέτασης στην τοστιέρα του σπιτιού του. Προκειμένου να αποστειρωθεί πλήρως ένα γραπτό, πρέπει να παραμείνει στην τοστιέρα για ένα χρόνο X ο οποίος είναι Τ.Μ. με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} C(x-1)e^{-x}, & x \ge 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

όπου το C είναι μια άγνωστη σταθερά.

    (α΄) Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς C.

(β´) Να δώσετε ένα τύπο για την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$ της X.

(γ´) Καθώς ο διδάσκων δεν έχει στη διάθεσή του άπειρο χρόνο, κρατά στην τοστιέρα κάθε γραπτό για χρόνο θ ο οποίος εξασφαλίζει ότι το γραπτό θα έχει αποστειρωθεί πλήρως με πιθανότητα 99%. Βρείτε μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το θ. (Μην επιχειρήσετε να την λύσετε ως προς θ, καθώς δεν μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας απλές συναρτήσεις.)

(δ´) Για τον χρόνο θ του προηγούμενου σκέλους, ποια ακριβώς είναι η κατανομή των γραπτών που ΔΕΝ έχουν αποστειρωθεί πλήρως, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν 400 γραπτά και οι χρόνοι αποστείρωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους; Ποια είναι επακριβώς η πιθανότητα να μην έχουν αποστειρωθεί ακριβώς 10 γραπτά; Μπορείτε να γράψετε μια προσέγγιση για αυτή την πιθανότητα;

46. **(Καντάδες)** Κάθε βράδυ ο Ρωμαίος κάνει μια καντάδα στην Ιουλιέτα. Η διάρκεια της καντάδας του είναι μια συνεχής Τ.Μ. X (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in [0,1], \\ ax, & x \in [1,3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Αν ο χρόνος ξεπεράσει τα 2 λεπτά, η μητέρα της Ιουλιέτας του πετάει έναν κουβά με μπουγαδόνερο.

(α´) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a.

(β´) Έστω πως ο Ρωμαίος σταματάει τις καντάδες μόλις φάει έναν κουβά νερό στο κεφάλι. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους καντάδων που θα κάνει (συμπεριλαμβανομένης της τελευταίας);

(γ´) Έστω τώρα πως ο Ρωμαίος συνεχίζει τις καντάδες ακόμα κι αν κάποιες μέρες του ρίξουν τον κουβά. Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο βδομάδες (14 ημέρες) να καταφέρει να κάνει ακριβώς 10 καντάδες χωρίς να του ρίξει η μητέρα της Ιουλιέτας τον κουβά;

47. **(Συνδυασμός πυκνοτήτων)** Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο πυκνότητες πιθανότητας, των Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Έστω η συνάρτηση $h(x) = af(x) + (1-a)g(x)$, όπου $a \in (0,1)$.

(α´) Να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι επίσης πυκνότητα πιθανότητας, έστω μιας Τ.Μ. Z.

(β´) Πόση είναι η $E(Z)$;

(γ´) Πόση είναι η $E\left(Z^2\right)$;

(δ´) Πόση είναι η $\mathrm{VAR}(Z)$;

Οι απαντήσεις σας στα σκέλη (β'), (γ'), (δ') να δοθούν συναρτήσει των $E(X)$, $E(Y)$, $E\left(X^2\right)$, $E\left(Y^2\right)$ και a.

48. **(Εμβόλια)** Δύο φαρμακευτικές εταιρίες ετοιμάζουν εμβόλια για τον κορονοϊό. Το πρώτο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από ένα τυχαίο χρόνο X, μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} k_1 e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Το δεύτερο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από τυχαίο χρόνο Y, επίσης μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα πιθανότητας

$$g(y) = \begin{cases} k_2 y(1-y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α´) Προσδιορίστε την τιμή της k_1.

(β´) Προσδιορίστε την τιμή της k_2.

(γ´) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε μισό τουλάχιστον χρόνο για να γίνει διαθέσιμο κάποιο εμβόλιο, είτε το ένα είτε το άλλο;

49. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

8η Ομάδα Ασκήσεων

50. **(Λάμπες)** Δύο λάμπες έχουν τυχαίες διάρκειες ζωής X και Y, ανεξάρτητες μεταξύ τους, που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x(1-x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} k_2 y e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(α΄) Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων k_1 και k_2.

(β΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(Y > \frac{1}{2})$.

(γ΄) Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην επιλογή, και έστω T η διάρκεια ζωής της. Έστω το ενδεχόμενο A να επιλέξαμε την λάμπα με πυκνότητα $f(x)$. Δίνεται ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από τις άνω διάρκειες ζωής. Με δεδομένο ότι εν τέλει η διάρκεια ζωής της λάμπας που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχόμενου A;

51. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

(β΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

52. **(Αριθμητικοί υπολογισμοί με την κανονική κατανομή)** Έστω X μια Τ.Μ. με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

(α΄) Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθούν οι $P(X < 1.22)$ και $P(X > -1.22)$.

(β΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > 2.7)$ και η πιθανότητα $P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7)$.

(γ΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η $P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1)$.

(δ΄) Αν $\mu = -1$ και $\sigma^2 = 4$, να βρεθούν οι $P(X > 3)$ και $P(X > 3 | X > 2)$.

(ε΄) Αν $\mu = -2$ και $\sigma^2 = 3.5$, να βρεθεί η μέση τιμή των $Y = 1 - X^2$ και $Y = (X+2)^{15}$.

(ς΄) Αν $\mu = 2$, να βρεθεί η τιμή της διασποράς για την οποία $P(X < 0) = 1/3$.

53. **(Κατανομή Βήτα)** Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.

(β΄) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$.

(γ΄) Βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

54. **(Μέση τιμή της Τ.Μ. Cauchy)** Μια Τ.Μ. X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παραμέτρους $\gamma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η πυκνότητά της ισούται με

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Επιβεβαιώστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι μονάδα.

(β΄) Να δείξετε ότι η Τ.Μ. Cauchy δεν έχει μέση τιμή, γιατί η απόπειρα υπολογισμού του καταχρηστικού ολοκληρώματος που την ορίζει καταλήγει σε απροσδιοριστία $\infty - \infty$.

55. **(Άγνωστες παράμετροι)** Έστω Τ.Μ. X με την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{-x}, & x \in [0, A], \\ 0, & x \notin [0, A]. \end{cases}$$

όπου οι K, A είναι άγνωστες πραγματικές θετικές παράμετροι.

(α΄) Να υπολογίσετε την τιμή του K συναρτήσει του A.

(β΄) Να προσδιορίσετε την τιμή της μέσης τιμής της X συναρτήσει των τιμών των K και A.

(γ΄) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(y) = P(Y \leq y)$ της Τ.Μ. $Y = 2X + 1$.

9η Ομάδα Ασκήσεων

56. **(Γεωμετρικό ξυπνητήρι)** Ένα «γεωμετρικό ξυπνητήρι» χτυπάει X λεπτά μετά τη ρύθμισή του, όπου η Τ.Μ. X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0, 1)$.

Έχετε στη διάθεσή σας δύο γεωμετρικά ξυπνητήρια Α και Β. Το Α χτυπάει κατά μέσο όρο 10 λεπτά μετά τη ρύθμισή του ενώ το ίδιο ισχύει και για το Β. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι που χτυπούν τα ξυπνητήρια είναι ανεξάρτητοι.

(α΄) Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν μέχρι να χτυπήσει το πρώτο από τα ξυπνητήρια.

(β΄) Αφότου χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι πόσος επιπλέον χρόνος περνάει μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο;

(γ΄) Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν, από την αρχή του χρόνου, μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο ξυπνητήρι.

57. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Οι από κοινού συνεχείς Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(x + 2y\right), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2], \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή $E[XY]$;

(β΄) Ποιες είναι οι περιθώριες $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

58. **(Πελταστές)** Πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές επιβεβαίωσαν την αναφορά του Ηροδότου ότι ένας Σπαρτιάτης πελταστής της κλασσικής εποχής μπορούσε να ρίξει το δόρυ σε μια απόσταση X ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των 60 και 150 μέτρων, μπορούσε να εκτοξεύσει ένα λίθο με χρήση σφεντόνας σε μια απόσταση Y επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των 90 και 210 μέτρων, και, επιπλέον, τα X, Y ήταν ανεξάρτητα. Βάσει των άνω:

(α΄) Γράψτε εκφράσεις για τις πυκνότητες $f_X(x), f_Y(y), f_{XY}(x, y)$. Επίσης, δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα $P(X > Y)$ σε μορφή διπλού ολοκληρώματος.

(β΄) Υπολογίστε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος του προηγούμενου σκέλους.

59. **(Age of Empires duels)** Ένας ιππότης μάχεται με ένα καταπέλτη μέχρι θανάτου. Ο ιππότης θα επιτύχει την εξόντωση του καταπέλτη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. X κατανεμημένη ομοιόμορφα μεταξύ των χρόνων 10 και 20. Ο καταπέλτης θα πετύχει την εξόντωση του ιππότη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. Y εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\theta = 15$. Οι Τ.Μ. X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) Γράψτε αναλυτικά ως κλαδική συνάρτηση την από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x, y)$ των X, Y. Σχεδιάστε στο επίπεδο xy το χωρίο όπου η $f_{XY}(x, y)$ λαμβάνει θετικές τιμές.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > Y)$ να εξοντώσει ο καταπέλτης πρώτος τον ιππότη;

60. **(Διασπορά αθροίσματος)** Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 με $\mathrm{VAR}(X_1) = \mathrm{VAR}(X_2) = 1$ και διασπορά του αθροίσματος $\mathrm{VAR}(X_1 + X_2) = 3$. Είναι οι X_1, X_2 ανεξάρτητες; Ποια είναι η συνδιακύμανσή τους; Αν είναι γνωστό ότι για κάποια σταθερά c οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και $X_2 - cX_1$ είναι ανεξάρτητες, τι συμπέρασμα βγάζετε για την σταθερά c;

61. **(Υπολογισμός περιθώριων πυκνοτήτων)** Το ζεύγος των Τ.Μ. X, Y έχει την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες πιθανότητας των X, Y.

10η Ομάδα Ασκήσεων

62. **(Πρόεδρος)** Ένας Πρόεδρος κάνει κάθε μέρα ένα τυχαία αριθμό από σαρδάμ. Όταν εκείνη την ημέρα είναι ξεκούραστος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.6) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 2$ και $p = 0.25$. Όταν όμως είναι κουρασμένος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα 0.4) η Τ.Μ. X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 3$ και $p = 0.5$.

(α΄) Με δεδομένο ότι μια συγκεκριμένη μέρα ο Πρόεδρος έκανε 2 σαρδάμ, ποια η πιθανότητα να ήταν ξεκούραστος;

(β΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του X όταν ο Πρόεδρος είναι ξεκούραστος;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα τα σαρδάμ του Πρόεδρου σε 100 μέρες στις οποίες είναι ξεκούραστος να ξεπεράσουν τα 55;

63. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α΄) Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X.

(β΄) Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητας το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ΄) Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

64. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

x \ y	1	2	3
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

x \ y	1	2	3
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

(α΄) Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;

(β΄) Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y, αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα να είναι σε φόρμα;

(γ΄) Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;

(δ΄) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

65. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι κάποιος φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.

    (α΄) Αν η κάθε ερώτηση έχει 65 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια καλή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.

    (β΄) Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.

66. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

67. **(Μπιφτέκια)** Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια. Ετοιμάζει το μείγμα, και αρχίζει να πλάθει τα μπιφτέκια, σκοπεύοντας το καθένα να έχει βάρος 200 γραμμάρια. Επειδή δεν μπορεί να υπολογίσει το βάρος του κάθε μπιφτεκιού επακριβώς, τα μπιφτέκια έχουν βάρη, σε γραμμάρια, που μοντελοποιούνται ως συνεχείς Τ.Μ. ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[180, 220]$.

    (α΄) Αν το μείγμα που έχει στη διάθεσή του ο μάγειρας έχει βάρος 20200 γραμμάρια, ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια;

    (β΄) Πόσο μείγμα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ώστε η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον 99%;

    Υποθέστε ότι *και* το τελευταίο μπιφτέκι που θα φτιάξει ο μάγειρας *πρέπει* να έχει την άνω κατανομή. Δηλαδή, ο μάγειρας δεν προχωρά στην κατασκευή ενός μπιφτεκιού που, κατά την εκτίμησή του, είναι μικρότερο του κανονικού.