ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2023-2024
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

   (α΄) Πραγματοποίηση μόνο του B.

   (β΄) Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C.

   (γ΄) Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.

   (δ΄) Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ε΄) Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ϛ΄) Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.

   (ζ΄) Το πολύ ένα πραγματοποιείται.

   (η΄) Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

   Λύση:

   (α΄) $A'BC'$.

   (β΄) ABC'.

   (γ΄) $A \cup B \cup C$.

   (δ΄) $AB \cup AC \cup BC$.

   (ε΄) ABC.

   (ϛ΄) $A'B'C' = (A \cup B \cup C)'$.

   (ζ΄) $A'B'C' \cup AB'C' \cup A'BC' \cup A'B'C = (AB \cup AC \cup BC)'$.

   (η΄) $(ABC)' = A' \cup B' \cup C'$.

2. **(Μικτός δειγματικός χώρος)** Ένα συνηθισμένο εξάπλευρο ζάρι ρίχνεται και το αποτέλεσμα N_1 καταγράφεται. Κατόπιν επιλέγεται ακέραιος N_2 από το 1 έως και το N_1.

   (α΄) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο Ω.

   (β΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο $A =$«το αποτέλεσμα του ζαριού ήταν 4».

   (γ΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο B στο οποίο $N_2 = 3$.

   (δ΄) Περιγράψτε το ενδεχόμενο C στο οποίο $N_2 = 6$.

   Λύση:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,1), \quad (2,1),(2,2), \quad (3,1),(3,2),(3,3), \quad (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),\\
&\qquad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5), \quad (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},\\
A &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\},\\
B &= \{(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\},\\
C &= \{(6,6)\}.
\end{aligned}$$

3. **(Δύο ζαριές)** Ένα ζάρι ρίχνεται 2 φορές και οι αριθμοί των κουκίδων καταγράφονται με τη σειρά που ήρθαν.

   (α΄) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω;

   (β΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A =$«το άθροισμα των κουκίδων είναι ζυγό»;

   (γ΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $B =$«και τα δύο ζάρια είναι ζυγά»;

   (δ΄) Το B είναι υποσύνολο του A ή το αντίστροφο;

(ε΄) Από ποια αποτελέσματα αποτελείται το ενδεχόμενο $A \cap B'$; Περιγράψτε το με λόγια.

(ς΄) Έστω C το ενδεχόμενο «οι ρίψεις διαφέρουν κατά 1». Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap C$;

Λύση:

(α΄)

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(i,j):\ 1 \le i,j \le 6\} \\
&= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),\ \ (1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2), \\
&\quad (1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),\ \ (1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4) \\
&\quad (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),\ \ (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}.
\end{aligned}$$

(β΄)

$$\begin{aligned}
A &= \{(i,j):\ 1 \le i,j \le 6, i+j=2k\} \\
&= \{(1,1),(3,1),(5,1),(2,2),(4,2),(6,2),(1,3),(3,3),(5,3), \\
&\quad (2,4),(4,4),(6,4),(1,5),(3,5),(5,5),(2,6),(4,6),(6,6)\}.
\end{aligned}$$

(γ΄)

$$\begin{aligned}
B &= \{(i,j): i,j \in \{2,4,6\}\} \\
&= \{(2,2),(4,2),(6,2),(2,4),(4,4),(6,4),(2,6),(4,6),(6,6)\}.
\end{aligned}$$

(δ΄) Από τα μέρη 3β΄ και 3γ΄ προκύπτει ότι $B \subset A$.

(ε΄)

$$\begin{aligned}
A \cap B' &= \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\} \\
&= \{(i,j):\ i,j \in \{1,3,5\}\}.
\end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο είναι το «και τα δύο ζάρια είναι περιττά».

(ς΄)

$$\begin{aligned}
C &= \{(1,2),(2,3),(2,1),(3,4),(3,2),(4,5),(4,3),(5,6),(5,4),(6,5)\} \\
&= \{(i,j):\ 1 \le i,j \le 6,\quad |i-j| = 1\}.
\end{aligned}$$

Προφανώς $A \cap C = \emptyset$.

4. **(Διαφορά μεταξύ αριθμών)** Δύο αριθμοί επιλέγονται τυχαία από το διάστημα $[0,1]$, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Η επιλογή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή χωρίς να δείχνουμε προτίμηση στα σημεία κάποιου υποσυνόλου του $[0,1]$. Βρείτε την πιθανότητα οι αριθμοί να διαφέρουν (κάτ' απόλυτη τιμή) περισσότερο από $\frac{1}{2}$. *(Υπόδειξη: μελετήστε το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ του R^2.)*

   Λύση:

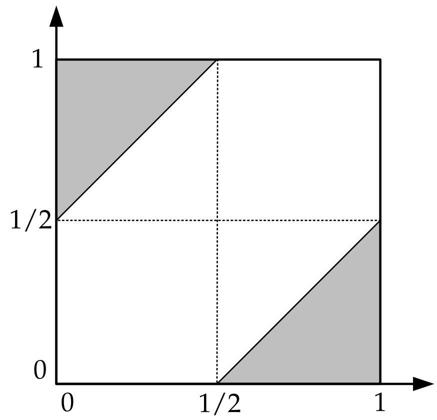
   Η επιλογή δύο *αριθμών* x, y στο διάστημα $[0,1]$ διαισθητικά αντιστοιχεί στην επιλογή ενός *σημείου* (x,y) στο τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ του Σχήματος 1. Οι δύο αριθμοί θα διαφέρουν περισσότερο από $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν το σημείο (x,y) βρίσκεται εντός των σκιασμένων τριγώνων, που καλύπτουν το $\frac{1}{4}$ του συνολικού εμβαδού του τετραγώνου. Εξ υποθέσεως, δεν υπάρχει κάποια περιοχή στο τετράγωνο που να προτιμάται από κάποια άλλη. Συνεπώς, η πιθανότητα κάθε υποσυνόλου θα είναι ανάλογη της επιφάνειας του αποκλειστικά, και άρα η πιθανότητα του ζητούμενου ενδεχόμενου ισούται με $\frac{1}{4}$.

5. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

   Λύση: Υπάρχουν συνολικά $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, και υποθέτουμε ότι είναι όλα ισοπίθανα. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες, πρέπει να βρούμε από πόσα αποτελέσματα αποτελείται καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.



Σχήμα 1: Άσκηση 4.

(α΄) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο A είναι το ακόλουθο:

$$A = \{126, 216, 135, 225, 315, 144, 234, 324, 414, 153, 243, 333, 423,\\ 513, 162, 252, 342, 432, 522, 612, 261, 351, 441, 531, 621\}.$$

Καθώς υπάρχουν 25 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο B είναι το ακόλουθο:

$$B = \{136, 226, 316, 145, 235, 325, 415, 154, 244, 334, 424, 514, 163, 253,\\ 343, 433, 523, 613, 262, 352, 442, 532, 622, 361, 451, 541, 631\}.$$

Καθώς υπάρχουν 27 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}.$$

6. **(Τυχαία συνάντηση)** Δύο άτομα, ο A και ο B, επισκέπτονται ένα μπαρ. Οι ώρες αφίξεως τους είναι X και Y, αντίστοιχα, όπου $0 \leq X, Y \leq T$. Αν ο A μένει για t_1 και ο B μένει για t_2 μονάδες χρόνου, ποια η πιθανότητα ότι ο A και ο B θα συναντηθούν;

Λύση: Η προφανής επιλογή για το δειγματικό χώρο είναι το τετράγωνο $\Omega = \{(X, Y) :\ 0 \leq X < Y \leq T\}$. Έστω το ενδεχόμενο ο A και ο B να συναντηθούν. Μαθηματικά, το ενδεχόμενο E μπορεί να περιγραφεί ως

$$E = \{(X, Y) : 0 \leq X \leq Y \leq X + t_1\} \cup \{(X, Y) : 0 \leq Y \leq X \leq Y + t_2\}.$$

Με άλλα λόγια, εάν ο A ήρθε πρώτος (δηλαδή $Y \geq X$), τότε ο A και ο B συναντιούνται όταν $Y \leq X + t_1$. Εάν ο B ήρθε πρώτος (δηλαδή $Y \leq X$), τότε συναντιούνται όταν $X \leq Y + t_2$. Τα Ω, E έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.

Σε αυτό το σημείο, υποθέτουμε ότι στο πείραμα δεν εμφανίζεται προτίμηση σε κάποιο σημείο (ή υποσύνολο) του δειγματικού χώρου σε σχέση με κάποιο άλλο (του ίδιου μεγέθους). Μαθηματικά, κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου έχει πιθανότητα ανάλογη του εμβαδού του, και επομένως, προκειμένου ο δειγματικός χώρος να έχει πιθανότητα 1,

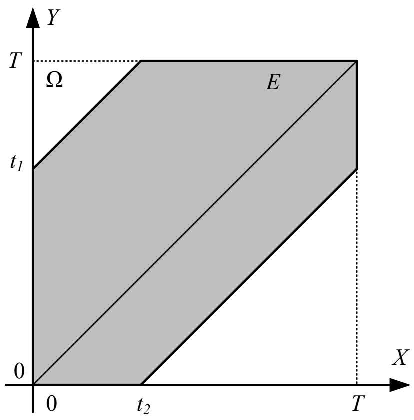
$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$|E| = T^2 - \left(\frac{1}{2}(T - t_1)^2 + \frac{1}{2}(T - t_2)^2\right) = T(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right).$$

Άρα,

$$P(E) = \frac{T(t_1 + t_2) - (t_1^2 + t_2^2)/2}{T^2}.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 6.

7. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Σχετικά με την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
&1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)'\right) = P\left(A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'\right) \\
&\quad \leq P(A_1') + P(A_2') + \cdots + P(A_n') = (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) + \cdots + (1 - P(A_n)) \\
&\quad = n - P(A_1) - P(A_2) - \cdots - P(A_n),
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα άνω βήματα.)

8. **(Αυστηρή ανισότητα)** Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, ισχύει η ιδιότητα $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, όπου A, B ενδεχόμενα. Να αποδείξετε ότι ισχύει και η ακόλουθη, ή να δώσετε αντιπαράδειγμα:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B).$$

Λύση: Η ιδιότητα δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω ένα ζάρι του οποίου τα αποτελέσματα έχουν τις ακόλουθες πιθανότητες:

$$P(1) = P(2) = \frac{1}{4}, \quad P(3) = P(4) = 0, \quad P(5) = P(6) = \frac{1}{4}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4\}$ τότε $A \subset B$ αλλά $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Μπορείτε να φτιάξετε μερικά παραδείγματα ακόμα;

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 15 ζεύγη παπουτσιών, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε στην τύχη, και χωρίς προτίμηση στις επιλογές, 3 αριστερά παπούτσια και 2 δεξιά παπούτσια. Έστω X το πλήθος των πλήρων ζευγαριών που θα βρεθούν μεταξύ των 5 παπουτσιών που θα επιλέξουμε. Παρατηρήστε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $X = 0$ (αν κανένα δεξί παπούτσι δεν είναι ζεύγος με κάποιο από τα αριστερά), $X = 1$ (αν μόνο το ένα από τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγος με κάποιο από τα τρία αριστερά), ή $X = 2$ (αν και τα δύο δεξιά παπούτσια είναι ζεύγη με δύο από τα τρία αριστερά παπούτσια). Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$.

   Λύση: Παρατηρήστε πως έχουμε $\binom{15}{3}$ τρόπους για να επιλέξουμε τα τρία αριστερά παπούτσια, και $\binom{15}{2}$ τρόπους για να επιλέξουμε τα δύο δεξιά παπούτσια. Επομένως, $|\Omega| = \binom{15}{3} \times \binom{15}{3}$.

   (α΄) Σχετικά με την $P(X = 0)$, υπάρχουν $\binom{15}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα τρία αριστερά παπούτσια, και για κάθε έναν από αυτούς, υπάρχουν $\binom{12}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε δύο δεξιά παπούτσια που δεν αντιστοιχούν σε κανένα από τα τρία αριστερά που έχουν επιλεγεί. Επομένως,

   $$P(X = 0) = \frac{\binom{15}{3}\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}\binom{15}{2}} = \frac{12 \times 11}{15 \times 14} = \frac{22}{35}.$$

   Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε και αν χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένες πιθανότητες.

   (β΄) Σχετικά με την $P(X = 1)$, έχουμε 15 επιλογές για το ζεύγος που θα επιλεγεί, 14 επιλογές για το επιπλέον δεξί παπούτσι, και $\binom{13}{2}$ επιλογές για τα δύο επιπλέον αριστερά παπούτσια. Επομένως,

   $$P(X = 1) = \frac{15 \times 14 \times \binom{13}{2}}{\binom{15}{3} \times \binom{15}{2}} = \frac{12}{35}.$$

   (γ΄) Σχετικά με την $P(X = 0)$, έχουμε $\binom{15}{2}$ επιλογές για τα δύο ζεύγη, και 13 επιλογές για το τρίτο μονό αριστερό παπούτσι, επομένως

   $$P(X = 2) = \frac{\binom{15}{2} \times 13}{\binom{15}{3}\binom{15}{2}} = \frac{1}{35}.$$

   Παρατηρήστε πως το άθροισμα των τριών πιθανοτήτων είναι μονάδα, όπως αναμενόταν. Η ιδιότητα αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ώστε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε από τις τρεις πιθανότητες, αν είχαμε υπολογίσει τις άλλες δύο.

10. **(Άσοι)** Μοιράζουμε στην τύχη 10 φύλλα από μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων. Ποια η πιθανότητα να περιέχει η μοιρασιά:

    (α΄) κανέναν άσσο;

    (β΄) το πολύ τρεις άσσους;

    (γ΄) τουλάχιστον έναν άσο και τουλάχιστον μια φιγούρα (δηλαδή βαλέ, ντάμα, ή ρήγα);

    Λύση:

    Για να απαντήσουμε τα άνω ερωτήματα, καταρχάς παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προβλήματος περιλαμβάνει όλες τις δυνατές (μη διατεταγμένες) 10άδες φύλλων που μπορούν να επιλεγούν από 52 φύλλα, οπότε $|\Omega| = \binom{52}{10} = \frac{52!}{(52-10)!10!} = 15,820,024,220$. Ακολούθως έχουμε:

    (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί κανένας άσσος. Υπάρχουν $\binom{48}{10}$ τρόποι με τους οποίους μπορεί να σχηματισθεί το A, ένας για κάθε μια επιλογή των 10 φύλλων από τα υπόλοιπα 48. Συνεπώς, $P(A) = \binom{48}{10}/\binom{52}{10} \simeq 0.41$.

    (β΄) Έστω B το ενδεχόμενο να πάρουμε το πολύ τρεις άσσους. Το ενδεχόμενο B' περιέχει όλες τις μοιρασιές στις οποίες πήραμε και τους 4 άσσους, και ο υπολογισμός της πιθανότητας του είναι απλούστερος. Πράγματι, υπάρχουν $\binom{4}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τους 4 άσσους και $\binom{48}{6}$ τρόποι να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 6 φύλλα. Συνεπώς,

    $$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{6}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.992.$$

(γ´) Έστω C το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον ένα άσο. Έστω D το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον μια φιγούρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχόμενου $C \cap D$. Για να την υπολογίσουμε, παρατηρούμε ότι:

$$P(C \cap D) = 1 - P(C' \cup D') = 1 - P(C') - P(D') + P(C' \cap D')$$
$$= 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{10} + \binom{12}{0}\binom{40}{10} - \binom{4}{0}\binom{12}{0}\binom{36}{10}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.55.$$

Εναλλακτικά, το ενδεχόμενο $C \cap D$ μπορεί να γραφεί ως

$$C \cap D = \bigcup_{\{i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots,9,\ i+j\leq 10\}} \text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες»}. \tag{1}$$

Τα ενδεχόμενα είναι ξένα, συνεπώς οι πιθανότητες τους μπορούν να προστεθούν για να προκύψει η πιθανότητα του C. Επιπλέον, οι πιθανότητές τους ισούνται με

$$P(\text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες»}) = \frac{\binom{4}{i}\binom{12}{j}\binom{36}{10-i-j}}{\binom{52}{10}}, \tag{2}$$

όπου $1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 9$. Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει η $P(C \cap D)$.

11. **(Seven Card Stud)** Κατά τα γνωστά, μια τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα, που χωρίζονται, με δύο διαφορετικούς τρόπους, σε 4 φυλές ($\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$) και 13 νούμερα $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$. Σε ένα παιχνίδι Seven Card Stud κάθε παίκτης λαμβάνει 7 φύλλα από μια τράπουλα.

(α´) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A ένας παίκτης να έχει 7 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα, 7 κούπες.)

(β´) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας παίκτης να έχει τουλάχιστον 5 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα 5,6 ή 7 κούπες).

(γ´) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου C ένας παίκτης να έχει τρία ζεύγη αλλά καμία τριάδα ή τετράδα; (Ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο ενδεχόμενο είναι να έχει τα φύλλα $(3\spadesuit, 3\heartsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, 8\spadesuit)$).

Λύση:

(α´) Συνολικά, οι συνδυασμοί φύλλων που μπορούμε να έχουμε είναι $\binom{52}{7}$. Οι συνδυασμοί φύλλων μιας συγκεκριμένης φυλής είναι $\binom{13}{7}$, και επειδή υπάρχουν 4 φυλές, τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{4\binom{13}{7}}{\binom{52}{7}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} = \frac{4}{77963}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένες πιθανότητες. Μπορείτε να γράψετε την απόδειξη;

(β´) Και πάλι, υπάρχουν $\binom{52}{7}$ συνδυασμοί φύλλων που μπορεί να έχει ένας παίκτης. Οι συνδυασμοί που περιλαμβάνουν ακριβώς 5 κούπες είναι $\binom{13}{5}\binom{39}{2}$, αφού έχουμε $\binom{13}{5}$ επιλογές για τις 5 κούπες, και $\binom{39}{2}$ για τα άλλα 2 φύλλα. Επειδή έχουμε 4 φυλές, προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν $4\binom{13}{5}\binom{39}{2}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 5 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτει πως υπάρχουν $4\binom{13}{6}\binom{39}{1}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 6 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Στο άνω σκέλος, βρήκαμε πως υπάρχουν $4\binom{13}{7}\binom{39}{0} = 4\binom{13}{7}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 7 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Άρα, τελικά

$$P(B) = \frac{4\binom{13}{5}\binom{39}{2} + 4\binom{13}{6}\binom{39}{1} + 4\binom{13}{7}\binom{39}{0}}{\binom{52}{7}} = \frac{208}{6805}.$$

(γ´) Και πάλι, οι συνδυασμοί όλου του δειγματικού χώρου είναι $\binom{52}{7}$. Θα μετρήσουμε τους συνδυασμούς που αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο C. Έχουμε $\binom{13}{3}$ επιλογές για τα τρία ζεύγη που μπορούμε να έχουμε. Έχουμε επίσης $\binom{4}{2}$ για τα 2 από τα 4 φύλλα που θα απαρτίζουν το κάθε ζεύγος. Τέλος, έχουμε 40 επιλογές για το έβδομο φύλλο. Άρα τελικά

$$P(C) = \frac{40\binom{13}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{78}{4223}.$$

12. **(n ζευγάρια διαγωνιζόμενων)** Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια ατόμων. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, έτσι ώστε κάθε ένα άτομο να πάρει το πολύ ένα βραβείο, και χωρίς κάποια προτίμηση στα άτομα που θα πάρουν τα βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;

    Λύση: Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι με τους οποίους τα n βραβεία μπορούν να καταλήξουν στα $2n$ άτομα, αφού υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους n που θα πάρουν βραβείο. Επίσης, υπάρχουν 2^n τρόποι με τους οποίους κάθε ζευγάρι θα πάρει από ένα βραβείο. Πράγματι, υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος από το πρώτο ζευγάρι θα πάρει το πρώτο βραβείο, 2 επιλογές για το δεύτερο, κ.ο.κ., και το σύνολο των επιλογών είναι $2 \times 2 \times \dots 2 = 2^n$. Προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

    $$2^n \Big/ \binom{2n}{n}.$$

13. **(Λεωφορείο)** Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει από n στάσεις.

    (α΄) Να κατασκευαστεί δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών, και να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.

    (β΄) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας φοιτητές.

    Λύση:

    (α΄) Μια επιλογή είναι να ορίσουμε το δειγματικό χώρο ως το σύνολο όλων των επαναληπτικών διατάξεων k αντικειμένων επιλεγμένων από n επιλογές. Επομένως, η διάταξη $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ σημαίνει ότι ο πρώτος φοιτητής κατέβηκε στην n_1 στάση, ο δεύτερος στην n_2 στάση, κ.ο.κ., και τελικά ο φοιτητής k κατέβηκε στην στάση n_k. Τα στοιχεία αυτού του δειγματικού χώρου είναι συνολικά n^k.

    (β΄) Έστω p_1 η ζητούμενη πιθανότητα. Παρατηρούμε καταρχάς ότι αν $k > n$, δηλαδή υπάρχουν περισσότεροι φοιτητές από στάσεις, τότε $p_1 = 0$, δηλαδή σίγουρα σε κάποια στάση θα κατεβούν πάνω από ένας φοιτητές. Έστω τώρα πως $k \leq n$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $p_2 = 1 - p_1$ του ενδεχόμενου σε κάθε στάση να κατεβεί το πολύ ένας φοιτητής. Καταρχάς, από το προηγούμενο σκέλος ο δειγματικός χώρος έχει συνολικά n^k αποτελέσματα. Θα μετρήσουμε πόσα από αυτά καταλήγουν στο να κατεβούν όλοι οι φοιτητές μόνοι τους. Υπάρχουν n επιλογές για τον πρώτο φοιτητή, $n-1$ επιλογές για τον δεύτερο, κ.ο.κ., και τελικά $n-k$ επιλογές για τον τελευταίο. Άρα, τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

    $$p_1 = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n^k}.$$

14. **(Τράπουλα)** Ποια η πιθανότητα τραβώντας 5 φύλλα στην τύχη από μια τράπουλα να φέρετε:

    (α΄) Άσο μπαστούνι, δηλαδή να περιέχεται το φύλλο $A\spadesuit$.

    (β΄) Οποιονδήποτε άσο ανάμεσα στα φύλλα σας.

    (γ΄) Φουλ του άσου, δηλαδή 3 άσους και τα υπόλοιπα 2 φύλλα να είναι όμοια (π.χ., 2 ντάμες).

    Υποθέστε ότι όλοι οι συνδυασμοί 5 φύλλων είναι ισοπίθανοι.

    Λύση:

    (α΄) Παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{52}{5}$ συνδυασμοί φύλλων που μπορεί να έχουμε τραβήξει. Από αυτούς, υπάρχουν $\binom{51}{4}$ δυνατοί συνδυασμοί 4 φύλλων από τα υπόλοιπα 51, στους οποίους μπορούμε να προσθέσουμε τον Άσο μπαστούνι, και να φτιάξουμε έτσι όλους τους δυνατούς συνδυασμούς 5 φύλλων που περιέχουν τον Άσο μπαστούνι. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

    $$p = \frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{51!47!5!}{4!47!52!} = \frac{5}{52}.$$

    Το αποτέλεσμα είναι λογικό, και μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό και με ένα άλλο τρόπο: υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 52 χαρτιά, εκ των οποίων 5 είναι στο χέρι μας και 47 είναι στην υπόλοιπη τράπουλα, και το πείραμα είναι η αποκάλυψη ενός εξ αυτών ως ο Άσος μπαστούνι. Το ενδεχόμενο ο Άσος μπαστούνι να αποκαλυφθεί στο χέρι μας αποτελείται από 5 από 52 αποτελέσματα. Είναι διαισθητικά προφανές ότι τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, επομένως τελικά η πιθανότητα αυτού του ενδεχόμενου είναι $5/52$.

(β΄) Είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα να μην σηκώσουμε κανένα άσο. Από τους $\binom{52}{5}$ ισοπίθανους συνδυασμούς, υπάρχουν $\binom{48}{5}$ χωρίς ούτε ένα άσο, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \simeq 0.3412.$$

(γ΄) Υπάρχουν $\binom{52}{5}$ συνολικά συνδυασμοί φύλλων που μπορούν να επιλεγούν. Για να μετρήσουμε αυτούς που αντιστοιχούν σε φουλ του άσου, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{4}{3} = 4$ τρόποι για να επιλέξουμε ποιους 3 άσους θα διαλέξουμε, 12 τρόποι για να διαλέξουμε το νούμερο που θα έχει το ζεύγος, και $\binom{4}{2} = 6$ να επιλέξουμε τα 2 από τα 4 φύλλα που θα επιλέξουμε από το συγκεκριμένο νούμερα. Τελικά,

$$p = \frac{4 \times 12 \times 6}{\binom{52}{5}} \simeq 1.1 \times 10^{-4}.$$

15. **(Δώρα)** 6 άτομα ανταλλάσσουν δώρα εντελώς τυχαία. Ποια η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα άτομα να λάβει το δικό του δώρο;

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ακόλουθη εξίσωση:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\},\ |I|=k} P\left(\cap_{i\in I} A_i\right).$$

Λύση: Έστω X το πλήθος των ατόμων που καταλήγουν με το δώρο τους. Έστω επίσης A_i, $i = 1, \dots, 6$ το ενδεχόμενο να καταλήξει το άτομο i με το δώρο του. Πρέπει να υπολογίσουμε το ενδεχόμενο $X \geq 0$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= P(A_1 \cup \cdots \cup A_6) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \cdots - P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &= 6 \times \frac{1}{6} - \binom{6}{2} \times \frac{1}{6 \times 5} + \binom{6}{3} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4} - \binom{6}{4} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} \\ &\quad + \binom{6}{5} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} - \binom{6}{6} \times \frac{1}{6!} \simeq 0.6319, \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολύ κοντά στο $1 - e^{-1}$ (αυτό δεν είναι τυχαίο).

Στους άνω υπολογισμούς, η δεύτερη ισότητα προκύπτει με χρήση της υπόδειξης. Στην τρίτη ισότητα, οι διωνυμικοί όροι εμφανίζονται μετρώντας το πλήθος των όρων του κάθε αθροίσματος. Επίσης, για την ίδια ισότητα, υπολογίζουμε τους όρους του κάθε αθροίσματος, που είναι ίσοι μεταξύ τους με απλή συνδυαστική. Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα 2 άτομα να λάβουν το δώρο τους. Υπάρχουν συνολικά 6! δυνατές μεταθέσεις των δώρων. Από αυτές, υπάρχουν 4! μεταθέσεις στις οποίες τα δύο άτομα λαμβάνουν το δώρο τους, γιατί το τρίτο άτομο έχει 4 επιλογές, το τέταρτο άτομο έχει 3 επιλογές, κ.ο.κ. Έτσι η πιθανότητα είναι

$$P(A_i A_j) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6 \times 5}.$$

3η Ομάδα Ασκήσεων

16. **(Δημοφιλία)** Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

    Λύση: Συμβολίζοντας με $X > Y$ το ενδεχόμενο το άτομο X να είναι δημοφιλέστερο από το άτομο Y, παρατηρούμε πως

    $$P(A > C|A > B) = \frac{P(A > C, A > B)}{P(A > B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

    Οι τιμές των $P(A > C, A > B)$ και $P(A > B)$ προκύπτουν από συμμετρία.

17. **(Φωτιές)** Σε ένα δάσος θα ξεσπάσει κάθε καλοκαίρι έστω και μία πυρκαγιά με πιθανότητα 0.3, αν την προηγούμενη άνοιξη δεν έχει βρέξει σε αυτό, με πιθανότητα 0.2 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 1 φορά, και με πιθανότητα 0.1 αν την προηγούμενη άνοιξη έχει βρέξει σε αυτό 2 φορές. Κάθε άνοιξη σε αυτό το δάσος βρέχει 0, 1, ή 2 φορές με πιθανότητες, αντίστοιχα, 0.3, 0.3, και 0.4.

    (α΄) Με δεδομένο ότι ξέσπασε έστω και μια πυρκαγιά στο δάσος σε ένα καλοκαίρι, ποια η πιθανότητα να είχε βρέξει σε αυτό το δάσος την προηγούμενη άνοιξη 2 φορές;

    (β΄) Δίνεται ότι τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε διαφορετικά έτη είναι ανεξάρτητα. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. X που εκφράζει το πλήθος των ετών εντός μιας δεκαετίας κατά τα οποία θα ξεσπάσει έστω μια πυρκαγιά;

    Λύση:

    (α΄) Έστω B το ενδεχόμενο να ξεσπάσει πυρκαγιά και R_0, R_1, R_2 τα ενδεχόμενα να έχει βρέξει 0, 1 ή 2 φορές την προηγούμενη άνοιξη. Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, θα έχουμε

    $$\begin{aligned} P(R_2|B) = \frac{P(B|R_2)P(R_2)}{P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2)} \\ = \frac{0.1 \times 0.4}{0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.4} = \frac{4}{19}. \end{aligned}$$

    (β΄) Η πιθανότητα να ξεσπάσει έστω και μια πυρκαγιά σε ένα καλοκαίρι είναι

    $$P(B) = P(B|R_0)P(R_0) + P(B|R_1)P(R_1) + P(B|R_2)P(R_2) = 0.19.$$

    Επειδή τα ενδεχόμενα να ξεσπάσει πυρκαγιά είναι ανεξάρτητα, το πλήθος των ετών είναι διωνυμικά κατανεμημένο, με πλήθος πειραμάτων $N = 10$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = P(B) = 0.19$.

18. **(Χυλόπιτα)** Την πρώτη φορά που ο Ρωμαίος κάνει ερωτική εξομολόγηση στην Ιουλιέτα, αυτή αποκρίνεται θετικά με πιθανότητα 50%. Αν τον απορρίψει, αυτός ξανακάνει ερωτική εξομολόγηση, αλλά με πιθανότητα θετικής απόκρισης 20%. Αν η Ιουλιέτα τον απορρίψει και πάλι, ο Ρωμαίος κάνει μια τελευταία προσπάθεια, αλλά με πιθανότητα επιτυχίας 10%. Ποια είναι η πιθανότητα τελικά να τα φτιάξει ο Ρωμαίος με την Ιουλιέτα αν είναι διατεθειμένος να εξαντλήσει και τις τρεις προσπάθειές του;

    Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο Ρωμαίος να τα καταφέρει σε οποιαδήποτε από τις 3 προσπάθειές του. Έστω F το ενδεχόμενο να τα καταφέρει στην πρώτη προσπάθεια, S το ενδεχόμενο να τα καταφέρει στη δεύτερη προσπάθεια, και T να τα καταφέρει στην τρίτη προσπάθεια. Έχουμε:

    $$\begin{aligned} P(A) &= P(F) + P(F'S) + P(F'S'T) \\ &= P(F) + P(F')P(S|F') + P(F')P(S'|F')P(T|S'F') \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

19. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

(β΄) Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

Λύση:

(α΄) Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής: Υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμοί λέξεων που μπορούν να επιλεγούν, ενώ υπάρχουν οκτώ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν τις δύο δοσμένες λέξεις και μια από τις άλλες οκτώ. Επομένως, η πιθανότητα να καταλήξουμε με αυτές τις δύο λέξεις στον επιθετικό προσδιορισμό είναι $8/\binom{10}{3} = \frac{1}{15}$. Όμως, εμείς ενδιαφερόμαστε να εμφανίζεται πρώτα η λέξη Gorna και μετά η λέξη Severna. Λόγω συμμετρίας, τα δύο αυτά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα πρέπει να είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διατάξεις. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $10 \times 9 \times 8$ δυνατές διατάξεις τριών λέξεων. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων που ικανοποιούν την δοθείσα συνθήκη, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους για να επιλέξουμε τις δύο θέσεις που θα καταλάβουν οι δοσμένες λέξεις, και 8 επιλογές για την λέξη που θα συμπληρώσει την τριάδα. Επομένως, υπάρχουν 3×8 διατάξεις στο ενδεχόμενο που εξετάζουμε, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3\times 8}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{30}$, όπως και με την προηγούμενη λύση.

(β΄) Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί η λέξη Wakanda και B το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί η λέξη Mordor. Ζητείται να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$.

Υπάρχουν διάφορες λύσεις. Σχετικά με την πρώτη:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Σχετικά με την $P(A)$, παρατηρούμε πως έχουμε συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμούς. Από αυτούς, οι $\binom{9}{2}$ έχουν την λέξη Wakanda, αφού υπάρχουν $\binom{9}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε τις δύο άλλες λέξεις. Άρα τελικά:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Επίσης, το πλήθος των συνδυασμών που έχουν την λέξη Wakanda αλλά όχι τη λέξη Mordor είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε από οκτώ λέξεις (δηλαδή όλες εκτός της Wakanda και της Mordor) τις δύο από αυτές, για να συμπληρώσουν, μαζί με την λέξη Wakanda, την τριάδα. Επομένως,

$$P(AB) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{30},$$

και τελικά

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{7\times 10}{30\times 3} = \frac{7}{9}.$$

Σχετικά με τη δεύτερη λύση,

$$P(B|A) = 1 - P(B'|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)}.$$

Το ενδεχόμενο AB' είναι το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τρεις λέξεις και να υπάρχουν σε αυτές και η λέξη Wakanda και η λέξη Mordor. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχόμενου είναι το πλήθος των συνδυασμών αυτών των λέξεων με μια άλλη από τις οκτώ, δηλαδή οκτώ, διαιρεμένο με το πλήθος όλων των συνδυασμών, δηλαδή $\binom{10}{3}$. Επομένως,

$$P(AB') = \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15} \Rightarrow P(B|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)} = 1 - \frac{10}{15\times 3} = \frac{7}{9}.$$

Μια τελευταία λύση είναι απλώς να παρατηρούμε ότι με δεδομένο ότι στην διάταξη υπάρχει η Wakanda, υπάρχουν $\binom{9}{2}$ επιλογές για τις άλλες δύο λέξεις, εκ των οποίων οι $\binom{8}{2}$ δεν έχουν τη λέξη Mordor, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{9}.$$

20. **(Τρεις περιπτώσεις)** Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε AA, MM, AM. Το AA έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το MM και τις δύο μαύρες, ενώ το AM έχει την μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μαύρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μια πλευρά του είναι άσπρη. Ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι μαύρη; Απαντήστε το ερώτημα κάνοντας διαδοχικά τις ακόλουθες παραδοχές:

 (α΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά χωρίς να τη διαλέξει, αλλά επιλέγοντάς την στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην πλευρά.

 (β΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια άσπρη πλευρά.

 (γ΄) Ο φίλος μας δείχνει τη μια πλευρά προτιμώντας να δείξει, αν μπορεί, μια μαύρη πλευρά.

 Λύση: Έστω AA, AM, MM τα ενδεχόμενα ο φίλος μας να έχει επιλέξει το αντίστοιχο χαρτί. Έχουμε κατά περίπτωση:

 (α΄) Ορίζουμε επιπλέον το ενδεχόμενο $AM1$ ο φίλος μας να επιλέξει το χαρτί AM και να μας δείξει την πρώτη πλευρά του, που υποθέτουμε πως είναι αυτή που αναγράφεται πρώτη στο όνομα του χαρτιού AM, δηλαδή η άσπρη. Ομοίως ορίζουμε τα ενδεχόμενα $AM2$, $AA1$, $AA2$, $MM1$, $MM2$. Καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα $1/6$, λόγω συμμετρίας. Μας έχει δοθεί ότι έχει συμβεί το $E_1 = AA1 \cup AA2 \cup AM1$, και ζητείται η $P(AM|E_1)$. Έχουμε:

$$P(AM|E_1) = \frac{P(AM \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(AM1)}{P(AA1 \cup AA2 \cup AM1)} = \frac{1}{3}.$$

 (β΄) Σε αυτή την περίπτωση, ξέρουμε πως έχει συμβεί το ενδεχόμενο $E_2 = AM \cup AA$. Άρα,

$$P(AM|E_2) = \frac{P(AM \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(AM)}{P(A \cup AA)} = \frac{1}{2}.$$

 (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, ξέρουμε πως έχει συμβεί το ενδεχόμενο $E_3 = AA$. Άρα,

$$P(AM|E_3) = \frac{P(AM \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(\emptyset)}{P(AA)} = 0.$$

 Βεβαιωθείτε πως το αποτέλεσμα συμφωνεί με τη διαίσθησή σας, σε όλες τις περιπτώσεις.

21. **(Κάδος)** Από έναν κάδο που περιέχει 10 άσπρες, 20 μαύρες και 30 κόκκινες μπάλες, επιλέγουμε 4 χωρίς επανατοποθέτηση.

 (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα;

 (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα δεδομένου ότι δεν επιλέξαμε καμία κόκκινη;

 (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να μην επιλέξαμε καμία κόκκινη μπάλα, δεδομένου ότι επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη;

 Λύση:

 (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τουλάχιστον μια άσπρη μπάλα. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχόμενου A' να μην επιλεγεί καμία άσπρη μπάλα. Έχουμε συνολικά 60 μπάλες, άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{60}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε μπάλες, και μόνο $\binom{50}{4}$ από αυτούς δεν περιλαμβάνουν καμία άσπρη. Άρα,

$$P(A') = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{60}{4}} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\binom{50}{4}}{\binom{60}{4}} \simeq 0.5277.$$

 (β΄) Έστω B το ενδεχόμενο να μην επιλέξουμε καμία κόκκινη μπάλα. Ζητείται ο υπολογισμός του $P(A|B)$, για το οποίο όμως ισχύει

$$P(A|B) = 1 - P(A'|B) = 1 - \frac{P(A'B)}{P(B)} = 1 - \frac{\binom{20}{4}/\binom{60}{4}}{\binom{30}{4}/\binom{60}{4}} \simeq 0.8232.$$

 Η δεύτερη ισότητα προέκυψε με συλλογισμό παρόμοιο με αυτόν του πρώτου μέρους.

(γ΄) Παρομοίως, έχουμε

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(BA')}{P(A)} = \frac{P(B) - P(BA')}{1 - P(A')} = \frac{\left(\binom{30}{4} - \binom{20}{4}\right)/\binom{60}{4}}{1 - \binom{50}{4}/\binom{60}{4}} = \frac{\binom{30}{4} - \binom{20}{4}}{\binom{60}{4} - \binom{50}{4}} \simeq 0.0877.$$

22. **(Πινιάτα)** Μια πινιάτα σπάει αν δεχτεί ένα δυνατό χτύπημα ή δύο μέτρια χτυπήματα. Σε ένα πάρτι, αν ένα παιδί χτυπήσει την πινιάτα έχει πιθανότητες $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα δυνατό χτύπημα, $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα μέτριο χτύπημα, και $\frac{1}{2}$ να αστοχήσει. 4 παιδιά μπαίνουν σε σειρά για να χτυπήσουν μια πινιάτα, διαδοχικά, και μια φορά το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα να τη σπάσουν; Όλα τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα.

   Λύση: Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(F)$ τα 4 παιδιά να μην καταφέρουν να σπάσουν την πινιάτα, που προκύπτει κάπως πιο εύκολα. Έστω M_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να αστόχησε, έστω S_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε δυνατά, και έστω A_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε μέτρια. Στα άνω, $i = 1, 2, 3, 4$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(F) &= P(M_1M_2M_3M_4) + P(A_1M_2M_3M_4) + P(M_1A_2M_3M_4) + P(M_1M_2A_3M_4) + P(M_1M_2M_3A_4) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

   και τελικά η πιθανότητα να σπάσει η πινιάτα είναι $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

23. **(Κανόνας δεσμευμένης ολικής πιθανότητας)** Να δειχθεί πως, για τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα E, F και G, έχουμε:

$$P(E|F) = P(E|G \cap F)P(G|F) + P(E|G' \cap F)P(G'|F).$$

   Λύση: Έχουμε,

$$\begin{aligned} &P(E|G \cap F)P(G|F) + P(E|G' \cap F)P(G'|F) \\ &= \frac{P(E \cap G \cap F)}{P(G \cap F)}\frac{P(G \cap F)}{P(F)} + \frac{P(E \cap G' \cap F)}{P(G' \cap F)}\frac{P(G' \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(E \cap G \cap F) + P(E \cap G' \cap F)}{P(F)} = \frac{P((E \cap G \cap F) \cup (E \cap G' \cap F))}{P(F)} \\ &= \frac{P((E \cap F) \cap (G \cup G'))}{P(F)} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = P(E|F), \end{aligned}$$

   όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και η τρίτη από το ότι τα ενδεχόμενα $(E \cap G \cap F)$ και $(E \cap G' \cap F)$ είναι ξένα.

24. **(Τέσσερα διαφορετικά κέρματα)** Έχουμε 4 κέρματα. Τα δύο πρώτα είναι δίκαια, το τρίτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και το τέταρτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Διαλέγουμε ένα κέρμα στην τύχη, το ρίχνουμε 2 φορές, και φέρνουμε δύο φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε ένα από τα δύο δίκαια κέρματα;

   Λύση: Έστω 1, 2, 3, και 4 τα ενδεχόμενα να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο, δεύτερο, τρίτο, ή τέταρτο κέρμα αντίστοιχα. Εξ υποθέσεως $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$. Έστω το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο φορές γράμματα. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes:

$$P(1|TT) = \frac{P(TT|1)P(1)}{P(TT|1)P(1) + P(TT|2)P(2) + P(TT|3)P(3) + P(TT|4)P(4)} = \frac{P(TT|1)}{P(TT|1) + P(TT|2) + P(TT|3) + P(TT|4)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}} \simeq 0.3711.$$

   Στην τρίτη εξίσωση, κάναμε την υπόθεση ότι, δεδομένης της επιλογής του κέρματος, οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Τέλος, παρατηρήστε πως, λόγω συμμετρίας, $P(2|TT) = P(1|TT)$, άρα η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ένα από τα δίκαια κέρματα είναι περίπου $2 \times 0.3711 = 0.7422$.

4η Ομάδα Ασκήσεων

25. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

    (α΄) Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

    (β΄) Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

    Λύση: Θα λύσουμε και τα δύο σκέλη μαζί. Έστω x, με $x = 0, 1, \ldots, 5$, το πλήθος των τορπιλών που ο καπετάνιος θα αποστείλει στο μεταγωγικό A. Το μεταγωγικό A θα βυθιστεί αν δεν αστοχήσουν όλες, επομένως να βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)$. Με παρόμοιο συλλογισμό, το μεταγωγικό B θα βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right)$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή του κόστους στον εχθρό θα είναι

$$E(C) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right) + 8 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right) = \begin{cases} 6.1016, & x = 0, \\ 6.4688, & x = 1, \\ 6.3750, & x = 2, \\ 5.8125, & x = 3, \\ 4.7344, & x = 4, \\ 3.0508, & x = 5. \end{cases}$$

    Επομένως, αν ο κυβερνήτης στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_3) = 5.8125$, ενώ αν ο κυβερνήτης στείλει 1 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_1) = 6.4688$, που είναι και το μεγαλύτερο δυνατό.

26. **(Δράκοι και βαλλίστρες)** 10 βαλλίστρες βρίσκονται αντιμέτωπες με 2 δράκους. Κάθε βαλλίστρα μπορεί να εκτοξεύσει ένα μόνο βέλος, προς έναν από τους δύο δράκους, και θα τον πετύχει με πιθανότητα $p = 0.2$, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ένα χτύπημα από ένα βέλος αρκεί για να σκοτώσει τον κάθε δράκο. Όλες οι βαλλίστρες θα βάλλουν ταυτόχρονα.

    (α΄) Έστω ότι 3 από τις βαλλίστρες θα στοχεύσουν τον 1 δράκο, και οι άλλες 7 θα στοχεύσουν τον άλλο. Έστω X το πλήθος των δράκων που επιβιώνουν. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X.

    (β΄) Αν έστω ένας δράκος επιβιώσει, θα καταστρέψει όλες τις βαλλίστρες. Αν στόχος σας είναι να σκοτωθούν και οι δύο δράκοι, και να επιζήσουν έτσι οι βαλλίστρες, και έχετε επιλογή να επιλέξετε πόσες βαλλίστρες θα στραφούν προς κάθε δράκο, πόσες θα επιλέξετε να επιτεθούν σε κάθε δράκο; Δώστε πλήρως αιτιολογημένη απάντηση.

    (α΄) Καταρχάς, ο πρώτος δράκος θα επιβιώσει με πιθανότητα $p_1 = 0.8^3$ και ο δεύτερο δράκος με πιθανότητα $p_2 = 0.8^7$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= (1 - p_1)(1 - p_2), \\ P(X = 2) &= p_1 p_2, \\ P(X = 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1). \end{aligned}$$

    (β΄) Έστω ότι x βαλλίστρες θα χτυπήσουν τον πρώτο δράκο και $10 - x$ βαλλίστρες τον δεύτερο. Η πιθανότητα να χτυπηθούν και οι δύο δράκοι είναι

$$f(x) = (1 - p_1)(1 - p_2) = (1 - 0.8^x)(1 - 0.8^{10-x}) = (1 - e^{x \log 0.8})(1 - e^{\log 0.8(10-x)}).$$

    Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{x \log 0.8} \log 0.8(1 - e^{\log 0.8(10-x)}) + (1 - e^{x \log 0.8})e^{\log 0.8(10-x)} \log 0.8 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{x \log 0.8} - e^{10 \log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} - e^{10 \log 0.8} \Leftrightarrow e^{x \log 0.8} = e^{\log 0.8(10-x)} \Leftrightarrow x = 10 - x \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Άρα, το βέλτιστο είναι να μοιράσουμε τις βαλλίστρες. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι οι βαλλίστρες βάλλουν διαδοχικά. Αν έχουμε στοχεύσει τους δύο δράκους με 6 και 4 βαλλίστρες αντίστροφα, τότε η 6η βαλλίστρα που θα επιτεθεί στον πρώτο δράκο θα είναι λιγότερο χρήσιμη από την περίπτωση που στοχεύσει στον δεύτερο δράκο, γιατί ο δεύτερος δράκος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να επιζήσει από τα 4 βέλη που έχει δεχτεί, σε σχέση με τον πρώτο δράκο που έχει ήδη δεχτεί 5 βέλη.

27. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

Λύση: Ο μανάβης βγάζει 2 ευρώ καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και κατόπιν πουλάει, και -2 καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και δεν καταφέρνει να μεταπωλήσει. Έστω Z το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του μανάβη. Το αναμενόμενο κέρδος του εξαρτάται από το πόσες κολοκύθες επιλέγει να αγοράσει. Παίρνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 8 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 8 \times 2 = 16, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{10}, \\ 7 \times 2 - 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 \times 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 3 \times 2 = 4, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 16 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 8.$$

(β΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 7 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 7 \times 2 = 14, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 = 10, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 6, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 14 \times \frac{3}{10} + 10 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = \frac{96}{10}.$$

(γ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 6 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 6 \times 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{6}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$E(Z) = 12 \times \frac{6}{10} + 8 \times \frac{4}{10} = \frac{104}{10}.$$

(δ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 5 κολοκύθες. Θα τις πουλήσει σίγουρα όλες, άρα θα έχει κέρδος 10.

Άρα, τελικά, συμφέρει τον μανάβη να αγοράσει 6 κολοκύθες, διότι τότε μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος του.

28. **(Διαγωνισμός)** Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν 5 άντρες και 5 γυναίκες. Κατατάσσονται σύμφωνα με την επίδοσή τους, και δεν προβλέπεται δύο ή περισσότερα άτομα να καταταγούν στην ίδια θέση. Υπάρχουν 10! δυνατές κατατάξεις, και δίνεται πως είναι όλες ισοπίθανες. Έστω X η υψηλότερη σειρά που κατέλαβε γυναίκα. (Για παράδειγμα, έχουμε $X = 1$ αν πρώτη αναδείχτηκε μια γυναίκα, οποιαδήποτε από τις 5, ενώ έχουμε $X = 6$ αν οι 5 γυναίκες κατέλαβαν τις τελευταίες 5 θέσεις.) Να βρείτε την μάζα $p_X(x)$ του X. Επίσης, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$.

Λύση: Η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να προκύψει η κάθε μια από τις άνω τιμές χωριστά. Παρατηρούμε καταρχάς ότι υπάρχουν 10! διαφορετικές διατάξεις για τα 10 άτομα.

(α΄) Λόγω συμμετρίας, $P(X=1)=\frac{1}{2}$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, πρώτος βγαίνει ένας άντρας, και ακολουθεί μια γυναίκα. Υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 8! επιλογές για την διάταξη των υπολοίπων ατόμων. Άρα,

$$P(X=2)=\frac{5\times 5\times 8!}{10!}=\frac{5}{18}.$$

(γ΄) Ομοίως, υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 4 για τον δεύτερο, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 7 επιλογές για τα υπόλοιπα άτομα. Άρα,

$$P(X=3)=\frac{5\times 4\times 5\times 7!}{10!}=\frac{5}{36}.$$

(δ΄) Ομοίως,

$$P(X=4)=\frac{5\times 4\times 3\times 5\times 6!}{10!}=\frac{5}{84}.$$

(ε΄) Ομοίως,

$$P(X=5)=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 5\times 5!}{10!}=\frac{5}{252}.$$

(ς΄) Τέλος,

$$P(X=6)=\frac{5!\times 5!}{10!}=\frac{1}{252}.$$

Παρατηρήστε πως από τις άνω τιμές προκύπτει πως

$$\sum_{i=1}^{6} P(X=i)=1,$$

όπως θα έπρεπε.

Σχετικά με τη μέση τιμή της X, έχουμε

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{5}{84}+5\times\frac{5}{252}+6\times\frac{1}{252}=\frac{11}{6}\simeq 1.8333,$$

ενώ για τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{5}{18}+3^2\times\frac{5}{36}+4^2\times\frac{5}{84}+5^2\times\frac{5}{252}+6^2\times\frac{1}{252}=\frac{187}{42}\simeq 4.4524,\\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{275}{252}\simeq 1.0913.\end{aligned}$$

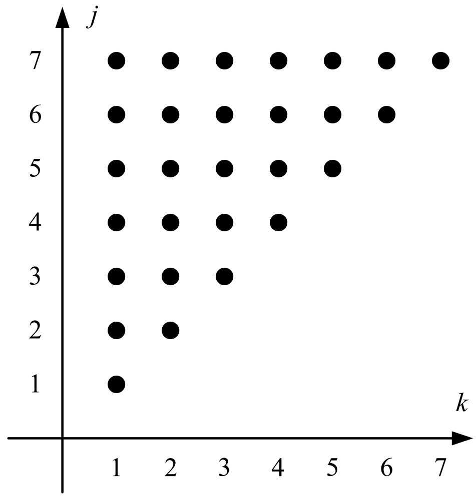
29. **(Μη αρνητικές ακέραιες Τ.Μ.)** Η Τ.Μ. N παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Δείξτε ότι

$$E(N)=\sum_{k=1}^{\infty}P(N\geq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N>k).$$

Λύση: Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}E(N)=\sum_{j=1}^{\infty} jP(N=j) &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{j}1\right)P(N=j)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}P(N=j)\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P(N=j)=\sum_{k=1}^{\infty}P(N\geq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N>k).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι προφανής. Η τέταρτη ισότητα προέκυψε με αλλαγή στη σειρά των αθροίσεων. Παρατηρήστε ότι και με τους δύο τρόπους άθροισης, τελικά καταλήγουμε στο να συμπεριλάβουμε στην άθροιση τους ίδιους συνδυασμούς συντελεστών (k,j). Οι συνδυασμοί αυτοί φαίνονται γραφικά στο Σχήμα 3. Στο σχήμα, ο όρος του διπλού αθροίσματος που αντιστοιχεί στο συνδυασμό συντελεστών (k,j), που ισούται με $P(N=j)$, αντιστοιχεί στην τελεία με κέντρο στις καρτεσιανές συντεταγμένες (k,j). Επομένως, δεν έχουν όλες οι τελείες του σχήματος το ίδιο βάρος όταν αθροίζονται, έχουν όμως το ίδιο βάρος όλες οι τελείες που βρίσκονται στην ίδια γραμμή. Η πρώτη διπλή άθροιση αντιστοιχεί στο να προσθέσουμε τους όρους πρώτα κατά γραμμές, ενώ η δεύτερη άθροιση αντιστοιχεί στο να προσθέσουμε τους όρους πρώτα κατά στήλες.



Σχήμα 3: Άσκηση 29.

30. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα στιλέτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές $1, 2, 3, 4$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά VAR(Y) της Y.

Λύση: Φανταστείτε ότι τα χτυπήματα αποφασίζονται ρίχνοντας ένα δίκαιο ζάρι με 4 πλευρές. Θα χρειαστούν ακριβώς 2 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 2 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (3,2),\ (3,3)\ ,(3,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (1,4).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 10, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, επομένως $P(Y = 2) = \frac{10}{16}$.

Παρομοίως, θα χρειαστούν ακριβώς 3 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 3 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{gathered}(3,1,1),\ (3,1,2),\ (3,1,3),\ (3,1,4),\ (2,2,1),\ (2,2,2),\ (2,2,3),\ (2,2,4),\ (2,1,2),\ (2,1,3),\\ (2,1,4),\ (1,1,3),\ (1,1,4),\ (1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,3,1),\ (1,3,2),\ (1,3,3),\ (1,3,4).\end{gathered}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 20, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, επομένως $P(Y = 3) = \frac{20}{64}$.

Ακολούθως παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 4 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 4 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{gathered}(1,1,1,2),\ (1,1,1,3),\ (1,1,1,4),\ (1,1,2,1),\ (1,1,2,2),\ (1,1,2,3),\ (1,1,2,4),\ (1,2,1,1),\\ (1,2,1,2),\ (1,2,1,3),\ (1,2,1,4),\ (2,1,1,1),\ (2,1,1,2),\ (2,1,1,3),\ (2,1,1,4).\end{gathered}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 15, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$, επομένως $P(Y = 4) = \frac{15}{256}$.

Τέλος, παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 5 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 5 φορές και έρθει ένα από τα αποτελέσματα

$$(1,1,1,1,1),\ (1,1,1,1,2),\ (1,1,1,1,3),\ (1,1,1,1,4),$$

κάτι που έχει πιθανότητα $\frac{4}{4^5} = \frac{1}{256}$. Επομένως $P(Y = 5) = \frac{1}{256}$.

Παρατηρήστε πως

$$P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) = \frac{10}{16} + \frac{20}{64} + \frac{15}{256} + \frac{1}{256} = \frac{640+320+60+4}{1024} = 1,$$

όπως αναμενόταν. Παρατηρήστε επίσης ότι όλα τα άνω αποτελέσματα θα μπορούσαν να γραφούν ως φύλλα ενός τετραδικού δέντρου.

Σχετικά με την κατανομή της Y, έχουμε

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ 10/16, & 2 \leq y < 3, \\ 15/16, & 3 \leq y < 4, \\ 255/256, & 4 \leq y < 5, \\ 1, & 5 \leq y. \end{cases}$$

Τέλος, για τη μέση τιμή και τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2 \times \frac{10}{16} + 3 \times \frac{20}{64} + 4 \times \frac{15}{256} + 5 \times \frac{1}{256} = \frac{625}{256} \simeq 2.4414, \\ E(Y^2) &= 2^2 \times \frac{10}{16} + 3^2 \times \frac{20}{64} + 4^2 \times \frac{15}{256} + 5^2 \times \frac{1}{256} = \frac{1625}{256} \simeq 6.3477, \\ \mathrm{VAR}(Y) &= \frac{1625}{256} - \left(\frac{625}{256}\right)^2 = \frac{393}{1015} \simeq 0.3872. \end{aligned}$$

5η Ομάδα Ασκήσεων

31. **(Υποβρύχιο)** Τα συντρίμμια ενός υποβρυχίου-μινιατούρα βρίσκονται εντός μιας περιοχής του βυθού η οποία έστω πως διαμερίζεται σε 100 τομείς. Τα συντρίμμια βρίσκονται σε ένα μόνο τομέα και είναι εξίσου πιθανό να βρίσκονται σε οποιονδήποτε εξ αυτών. Ένα σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις προκειμένου να εντοπίσει τα συντρίμμια και κατά την διάρκεια κάθε μιας κατάδυσης εξερευνά πλήρως έναν μόνο τομέα, και επομένως είτε διαπιστώνεται ότι τα συντρίμμια βρίσκονται εντός αυτού του τομέα (και επομένως το σκάφος δεν θα καταδυθεί ξανά) είτε όχι (και επομένως το σκάφος θα καταδυθεί ξανά).

(α΄) Έστω πως το σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις, φροντίζοντας ώστε όταν ένας τομέας εξερευνηθεί σε μία κατάδυση, να μην ξαναεξερευνηθεί σε καμία άλλη κατάδυση. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του πλήθους των καταδύσεων X που θα χρειαστούν προκειμένου τα συντρίμμια να εντοπιστούν; Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της;

(β΄) Έστω, εναλλακτικά, πως το σκάφος διάσωσης εκτελεί διαδοχικές καταδύσεις, αλλά λόγω κακής οργάνωσης κάθε κατάδυση είναι εξίσου πιθανό να είναι σε οποιονδήποτε από τους 100 τομείς, είτε αυτός έχει εξερευνηθεί προηγουμένως είτε όχι, και χωρίς προτίμηση στον τομέα. Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του X και ποια η αναμενόμενη τιμή της;

(γ΄) Έστω ένας συγκεκριμένος τομέας A στον οποίο ΔΕΝ βρίσκονται τα συντρίμμια. Στην περίπτωση του δεύτερου σκέλους ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των φορών που θα εξερευνηθεί αυτός ο τομέας;

Λύση:

(α΄) Σε αυτή την περίπτωση, θα γίνουν έως 100 καταδύσεις, και είναι εξίσου πιθανό το υποβρύχιο να εντοπισθεί σε κάθε μια από αυτές. Επομένως,

$$P(X=k)=\frac{1}{100},\ k=1,\dots,100,$$

και η αναμενόμενη τιμή είναι

$$E(X)=\frac{1+2+\cdots+100}{100}=\frac{100\times 101}{2\times 100}=50.5.$$

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, σε κάθε κατάδυση το πείραμα επαναλαμβάνεται εξ αρχής, και επομένως η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p=\frac{1}{100}$, επομένως

$$P(X=k)=\frac{1}{100}\times\left(\frac{99}{100}\right)^{k-1},\ k=1,\dots,$$

με αναμενόμενη τιμή, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, $E(X)=\frac{1}{p}=100$.

(γ΄) Έστω Y_i το πλήθος των φορών που θα εξεταστεί ο κάθε τομέας, με $i=1,\dots,100$. Έστω πως ο τομέας 100 είναι αυτός όπου βρίσκονται τα συντρίμμια. Λόγω συμμετρίας, θα πρέπει $E(Y_i)=K$ για κάποια σταθερά K, για $i=1,\dots,99$. Επιπλέον,

$$Y_1+\cdots+Y_{100}=X\Rightarrow E(Y_1+\cdots+Y_{100})=E(X)\Rightarrow 99K+1=100\Rightarrow K=1,$$

επομένως κάθε τομέας θα εξεταστεί κατά μέσο όρο μια φορά (και, μάλιστα, αυτός που έχει το υποβρύχιο θα εξεταστεί *ακριβώς* μια φορά).

32. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

(α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

(β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

(γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

(β΄) Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

(γ΄) Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

Λύση: Έστω τα ενδεχόμενα A ο επιθετικός να είναι «χέλι», B ο επιθετικός να είναι «μέτριος», και C ο επιθετικός να είναι «παλτό». Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}, \qquad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Έστω, επίσης το ενδεχόμενο G ο επιθετικός να σκοράρει σε ένα παιχνίδι. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(G|A) = \frac{2}{3}, \qquad P(G|B) = \frac{1}{3}, \qquad P(G|C) = \frac{1}{6}.$$

(α΄) Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|G) &= \frac{P(AG)}{P(G)} = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}} = \frac{4}{4+4+3} = \frac{4}{11} \simeq 0.3636. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε οτι η πιθανότητα ο επιθετικός να ήταν «χέλι» αυξήθηκε, όπως αναμενόταν.

(β΄) Αφού ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα άλλα και με την ίδια πιθανότητα $\frac{2}{3}$ σε καθένα από αυτά, το πλήθος των παιχνιδιών X στα οποία ο επιθετικός σκοράρει ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε πείραμα) $p = \frac{2}{3}$, επομένως

$$P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k},$$

και

$$E(X) = Np = \frac{20}{3} \simeq 6.6667, \qquad \mathrm{VAR}(X) = Np(1-p) = 10 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{9} \simeq 2.2222.$$

(γ΄) Έστω τώρα G_2 το ενδεχόμενο ο επιθετικός να σκοράρει σε ακριβώς 2 από τα 5 παιχνίδια. Όπως και στο προηγούμενο σκέλος, το πλήθος των παιχνιδιών στα οποία θα σκοράρει δίνεται από την διωνυμική κατανομή, επομένως

$$\begin{aligned} P(G_2|A) &= \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3, \\ P(G_2|B) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3, \\ P(G_2|C) &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

Και πάλι, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε

$$\begin{aligned} P(A|G_2) &= \frac{P(AG_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2|A)P(A)}{P(G_2|A)P(A) + P(G_2|B)P(B) + P(G_2|C)P(C)} \\ &= \frac{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{6}}{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{6}+\binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{4+16+3\times 5^3/2^5} = \frac{128}{128+512+375} \simeq 0.1261. \end{aligned}$$

33. **(Άλλοι δύο φίλοι)** Σε ένα άλλο τραπέζι της καφετέριας, συνομιλούν δύο φίλοι, ο A και ο B, εκ των οποίων ο A είναι υγιής, ενώ ο B έχει κορωνοϊό. Όποτε ο B φτερνίζεται, κολλά τον A με κορωνοϊό με πιθανότητα $p_1 = 0.05$. Τα διαδοχικά φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των φορών που πρέπει να φτερνιστεί ο B για να κολλήσει τον A, και με ποια παράμετρο ή παραμέτρους;

(β´) Πόσες φορές πρέπει να φτερνιστεί ο B ώστε ο A να έχει κολλήσει, σε κάποιο από τα φτερνίσματα, τον κορωνοϊό, με πιθανότητα τουλάχιστον 0.8;

Λύση:

(α´) Τα φτερνίσματα είναι ανεξάρτητα και όμοια, επομένως αν θεωρήσουμε επιτυχία να κολλήσει ο A και X είναι το πλήθος μέχρι το πρώτο επιτυχημένο φτέρνισμα, η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο $p = 0.05$.

(β´) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για την γεωμετρική κατανομή, $P(X > k) = (1-p)^k$. Επομένως,

$$P(X \leq k) \geq 0.8 \Leftrightarrow 1 - P(X > k) \geq 0.8 \Leftrightarrow P(X < k) \leq 0.2$$
$$\Leftrightarrow (1-p)^k \leq 0.2 \Leftrightarrow k \log(1-p) \leq \log 0.2 \Leftrightarrow k \geq \frac{\log 0.2}{\log(1-p)}.$$

34. **(160 ρίψεις κέρματος)** Ρίχνουμε 1 κέρμα, με πιθανότητα να έρθει κορώνα p, 160 ανεξάρτητες φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έρθει ακριβώς $k = 5$ φορές γράμματα αν $p = 99\%$, χρησιμοποιώντας ακριβή τύπο και την προσέγγιση που προκύπτει με χρήση της κατανομής Poisson.

Λύση: Έστω X ο αριθμός των φορών που ήρθαν γράμματα στις 160 ρίψεις ενός κέρματος με $P(K) = p = 0.99$. Η X έχει διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 160$ και πιθανότητα επιτυχίας $q = 1 - p = 0.01$.

Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση, έχουμε

$$P(X = k) = \binom{160}{5} 0.01^5 \times 0.99^{155} \simeq 0.01727.$$

Αφού το N είναι μεγάλο και το $\times q = 160 \times 0.01 = 1.6$ είναι της τάξεως του 1, μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή της X με την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = \times q = 1.6$. Επομένως:

$$P(X = k) \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.6} \frac{1.6^5}{5!} \simeq 0.01764.$$

35. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να μην φάει ένας καλεσμένος το φαγητό της επιλογής του. Το A μπορεί να γραφεί ως η ένωση δύο ξένων ενδεχόμενων A_1 και A_2, όπου A_1 είναι το ενδεχόμενο να ζητήσουν πάνω από 16 άτομα πίτσα, και A_2 το ενδεχόμενο να ζητήσουν περισσότερα από 12 άτομα μακαρονάδα, ή αλλιώς λιγότερα από 8 άτομα πίτσα. Έστω X το πλήθος των ατόμων που επιλέγουν πίτσα. Παρατηρούμε πως το X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 20$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = 0.6$ (η πιθανότητα επιτυχίας). Παρατηρούμε, τέλος, πως

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \sum_{x=17}^{20} P(X = x) + \sum_{x=0}^{7} P(X = x) \\ &= \sum_{x=0,1,2,3,4,5,6,7,17,18,19,20} \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \simeq 0.037. \end{aligned}$$

36. **(Μπάσκετ)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι καλείται να εκτελέσει 10 βολές. Ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, με πιθανότητα 0.6, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα 0.7, και ντεφορμέ με πιθανότητα 0.4, οπότε και βάζει κάθε βολή ανεξάρτητα από τις άλλες με πιθανότητα μόλις 0.2.

(α´) Με δεδομένο ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, ποια είναι η πιθανότητα να εκτελέσει 10 βολές και να βάλει τις 6; Ποια είναι η πιθανότητα του ίδιου ενδεχόμενου αν ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ;

(β´) Ο διαγωνιζόμενος εκτελεί 10 βολές και βάζει τις 6. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να είναι φορμαρισμένος;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο διαγωνιζόμενος να είναι φορμαρισμένος και B το ενδεχόμενο να βάλει 6 βολές.

(α΄) Δεδομένου ότι ο διαγωνιζόμενος είναι φορμαρισμένος, οι βολές είναι ανεξάρτητες, επομένως το πλήθος των επιτυχημένων βολών είναι διωνυμικά κατανεμημένο με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = 0.7$, επομένως

$$P(B|A) = \binom{10}{6} 0.7^6 0.3^4.$$

Για την περίπτωση που ο διαγωνιζόμενος είναι ντεφορμέ, με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$P(B|A') = \binom{10}{6} 0.2^6 0.8^4.$$

(β΄) Έχουμε, με χρήση του Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \\ &= \frac{\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4 0.6}{\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4 0.6 + \binom{10}{6}0.2^6 0.8^4 0.4} \simeq 0.9820. \end{aligned}$$

37. **(Παιχνίδι με ζάρι)** Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα δίκαιο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός τότε ο A κερδίζει και παίρνει B Ευρώ από τον B, ενώ αν ο X είναι άρτιος τότε ο A χάνει και δίνει a Ευρώ στον B.

(α΄) Ποια είναι η μάζα της τυχαίας μεταβλητής X;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο A;

(γ΄) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ a και B ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

Λύση:

(α΄) Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/6 + 1/6 = 1/3$. Επομένως,

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

(β΄) Η πιθανότητα να κερδίσει ο A ισούται με

$$\begin{aligned} P(X = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots) &= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots = \frac{1}{3} \times \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$1 + a + a^2 + \cdots = \frac{1}{1-a},$$

που με τη σειρά του μπορεί να αποδειχθεί με χρήση απλών ιδιοτήτων των ορίων και της ισότητας

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^n}{1 - a},$$

(γ΄) Το καθαρό κέρδος Z του A είναι μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή a με πιθανότητα $3/5$ και την τιμή $(-b)$ με πιθανότητα $2/5$. Η μέση τιμή της Z ισούται με

$$E(Z) = \frac{3}{5} \times a + \frac{2}{5} \times (-b),$$

και προκειμένου να είναι μηδέν πρέπει $a = 2b/3$.

6η Ομάδα Ασκήσεων

38. **(Εκλογές)** Έστω εκλογές στις οποίες συμμετέχουν 3 κόμματα, K_1, K_2, K_3. Μια τετραμελής οικογένεια ψηφίζει σύσσωμη, και κάθε ένα από τα 4 μέλη ψηφίζει ένα από τα κόμματα στην τύχη, χωρίς προτίμηση στο κόμμα, και ανεξάρτητα από το τι θα ψηφίζουν τα άλλα μέλη της οικογένειας.

(α΄) Έστω Z το πλήθος από διαφορετικά κόμματα που θα ψηφίζει η οικογένεια. Επομένως, αν για παράδειγμα, όλα τα μέλη ψηφίσουν το κόμμα K_1, έχουμε $Z = 1$. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Τ.Μ. Z;

(β΄) Έστω X το πλήθος των ψήφων που λαμβάνει το κόμμα K_1 και Y το πλήθος που λαμβάνει το κόμμα K_2. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y;

Λύση: Παρατηρούμε αρχικά πως ο δειγματικός χώρος, που θα χρησιμοποιηθεί και για τα δύο σκέλη, αποτελείται από $3^4 = 81$ επαναληπτικές διατάξεις.

(α΄) Παρατηρούμε πως το Z μπορεί να λάβει 3 τιμές, τις $1, 2, 3$. Παρατηρούμε επίσης πως από τις 81 επαναληπτικές διατάξεις, ακριβώς 3 περιλαμβάνουν μόνο ένα κόμμα. Επομένως,

$$P(Z = 1) = \frac{3}{81}.$$

Παρατηρούμε, επίσης, πως για κάθε έναν από τους 3 συνδυασμούς 2 κομμάτων, υπάρχουν 2^4 επαναληπτικές διατάξεις για να ψηφίσουν τα 4 άτομα, από τις οποίες οι 2 περιλαμβάνουν ένα μόνο κόμμα. Επομένως,

$$P(Z = 2) = \frac{3 \times (2^4 - 2)}{81} = \frac{42}{81}.$$

Τέλος, για να μετρήσουμε τις επαναληπτικές διατάξεις που εμφανίζουν και τα 3 κόμματα, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους να επιλέξουμε τα 2 άτομα που θα ψηφίσουν το ίδιο κόμμα, και $3! = 6$ τρόπους για να κατανείμουμε τα κόμματα στα άτομα. Επομένως,

$$P(Z = 3) = \frac{6 \times 6}{81} = \frac{36}{81}.$$

Παρατηρήστε πως, όπως αναμενόταν, $P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) = 1$, κάτι που θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει για να αποφύγουμε τους υπολογισμούς σε κάποια από τις άνω 3 περιπτώσεις.

(β΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$, όπου $x, y = 0, 1, 2, 3, 4$. Καταρχάς, αφού συνολικά θα ψηφίσουν 4 άτομα, η συγκεκριμένη πιθανότητα ισούται με 0 όταν $x + y > 4$. Στην περίπτωση που $x + y \leq 4$, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{4}{x}$ τρόποι για να επιλεγούν x από τα 4 άτομα που θα ψηφίσουν το κόμμα K_1 και $\binom{4-x}{y}$ τρόποι για να επιλεγούν y από τα $4 - x$ άτομα που απομένουν για να ψηφίσουν το κόμμα K_2. Επομένως,

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{\binom{4}{x}\binom{4-x}{y}}{3^4}, & 0 \leq x + y \leq 4, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Σε μορφή πίνακα, η από κοινού μάζα πιθανότητας των X, Y είναι

y / x	0	1	2	3	4
0	1/81	4/81	6/81	4/81	1/81
1	4/81	12/81	12/81	4/81	0
2	6/81	12/81	6/81	0	0
3	4/81	4/81	0	0	0
4	1/81	0	0	0	0

39. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{1}{5}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$p_Y(0) = \frac{1}{2},\ p_Y(1) = \frac{1}{4},\ p_Y(2) = \frac{1}{4}.$$

(α΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x,y)$;

(β΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(γ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(δ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

Λύση:

(α΄) Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$p_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4\},\ y \in \{0,1,2\},$$

και τελικά προκύπτει ο παρακάτω πίνακας που δίνει την $p_{XY}(x,y)$:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
2	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20

(β΄) Για να κερδίσει η Τρίπολη, πρέπει να έρθει το σκορ $1-0$, $2-1$, ή $2-0$ υπέρ της. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}.$$

(γ΄) Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, πρέπει να επιλέξουμε τιμές για τους διάφορους συνδυασμούς των (x,y) που εμφανίζονται ως ορίσματα της από κοινού μάζας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	0	0	1/6	1/6	1/6
1	1/5	0	1/60	1/60	1/60
2	0	1/5	1/60	1/60	1/60

Επομένως, η μέγιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 0 = \frac{2}{5}.$$

(δ΄) Παρόμοια, τώρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/5	1/5	1/10	0	0
1	0	0	1/20	1/10	1/10
2	0	0	1/20	1/10	1/10

Επομένως, η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X = 0,\ Y = 1) + P(X = 1,\ Y = 2) + P(X = 0,\ Y = 2) = 0.$$

40. **(Συνδιακύμανση X και $1/X$)** Έστω μια διακριτή Τ.Μ. X με σύνολο τιμών όλους τους ακέραιους εκτός του μηδενός. Έστω ότι η μάζα του X έχει την ιδιότητα ότι για κάθε ακέραιο k, $p(-k) = p(k)$. Να βρεθεί η συνδιακύμανση μεταξύ του X και του $Y = \frac{1}{X}$.

Λύση: Παρατηρήστε πως:

$$\mathrm{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X\frac{1}{X}) - E(X)E(Y) = 1 - E(X)E(Y).$$

Όμως $p(-k) = p(k)$ κι έτσι έχουμε:

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} k\,p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(k) - \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(-k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(k) - \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(k) = 0.$$

41. **(Ανάβαση Ζυγοβιστίου)** Στο ετήσιο ράλλυ Ανάβασης Ζυγοβιστίου, κάθε οδηγός που συμμετέχει για πρώτη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 10%, κάθε οδηγός που συμμετέχει για δεύτερη φορά θα εγκαταλείψει τον αγώνα με πιθανότητα 5%, ενώ οι οδηγοί που συμμετέχουν για τουλάχιστον τρίτη φορά θα εγκαταλείψουν τον αγώνα με πιθανότητα 1%. Σε έναν αγώνα συμμετέχουν συνολικά 30 οδηγοί, εκ των οποίων 10 για πρώτη φορά, 15 για δεύτερη φορά, και άλλοι 5 οδηγοί έχουν συμμετάσχει 3 ή περισσότερες φορές.

(α΄) Αν, μετά τον αγώνα, μάθουμε για ένα τυχαία επιλεγμένο οδηγό (χωρίς προτίμηση στην επιλογή) ότι εγκατέλειψε, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν η πρώτη του συμμετοχή;

(β΄) Κατά μέσο όρο πόσοι οδηγοί θα εγκαταλείψουν τον συγκεκριμένο αγώνα;

Λύση:

(α΄) Έστω E το ενδεχόμενο ο επιλεγμένος οδηγός να εγκαταλείψει, και έστω A_1, A_2 και A_3 τα ενδεχόμενα ο οδηγός αυτός να έχει συμμετάσχει για πρώτη φορά, και δεύτερη φορά, ή για τουλάχιστον 3 φορές αντιστοίχως. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A_1) = \frac{10}{10+15+5} = \frac{1}{3}, \quad P(A_2) = \frac{15}{10+15+5} = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{5}{10+15+5} = \frac{1}{6},$$

και, επιπλέον,

$$P(E|A_1) = 0.1, \quad P(E|A_2) = 0.05, \quad P(E|A_3) = 0.01.$$

Με χρήση του κανόνα του Bayes, έχουμε

$$\begin{aligned}
P(A_1|E) &= \frac{P(A_1E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.1 \times \frac{1}{3}}{0.1 \times \frac{1}{3} + 0.05 \times \frac{1}{2} + 0.01 \times \frac{1}{6}} = \frac{5}{9}, \\
P(A_2|E) &= \frac{P(A_2E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_2)P(A_2)}{P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.05 \times \frac{1}{2}}{0.1 \times \frac{1}{3} + 0.05 \times \frac{1}{2} + 0.01 \times \frac{1}{6}} = \frac{5}{12}, \\
P(A_3|E) &= \frac{P(A_3E)}{P(E)} = \frac{P(E|A_3)P(A_3)}{P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + P(E|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.01 \times \frac{1}{6}}{0.1 \times \frac{1}{3} + 0.05 \times \frac{1}{2} + 0.01 \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

(β΄) Έστω X_i, με $i = 1, \ldots, 30$, Τ.Μ. Bernoulli που ισούνται με 1 αν ο i-οστός οδηγός εγκαταλείψει και με 0 αν δεν εγκαταλείψει. Το πλήθος των οδηγών που εγκαταλείπουν είναι $\sum_{i=1}^{30} X_i$, επομένως κατά μέσο όρο θα εγκαταλείψουν

$$E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} E\left(X_i\right) = 10 \times 0.1 + 15 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 1.8$$

οδηγοί.

42. **(Age of Empires Rush)** 8 τοξότες επιτίθενται σε 5 χωρικούς, τους A, B, C, D, E. Κάθε τοξότης επιλέγει να επιτεθεί σε ένα χωρικό στην τύχη, χωρίς προτίμηση στο χωρικό, και ανεξάρτητα από τους άλλους τοξότες.

    (α΄) Έστω X το πλήθος από τοξότες που θα επιτεθούν στον χωρικό A. Γράψτε τη μάζα του X.

    (β΄) Έστω Y το πλήθος των χωρικών που δεν θα δεχτεί επίθεση από κανένα τοξότη. Υπολογίστε την $E(Y)$. *(Υπόδειξη: $E(\sum Y_i) = \sum E(Y_i)$.)*

    (γ΄) Έστω Z το πλήθος των χωρικών στους οποίους επιτίθεται τουλάχιστον ένας τοξότης. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z = 1)$.

    Λύση:

    (α΄) Υπάρχουν 8 τοξότες, κάθε ένας από τους οποίους επιλέγει τον A με πιθανότητα $\frac{1}{5}$ ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Αν θεωρήσουμε ότι για κάθε τοξότη εκτελείται ένα πείραμα που είναι επιτυχημένο αν ο τοξότης επιλέξει τον A, προκύπτει τελικά πως η κατανομή του X είναι διωνυμική με παραμέτρους $N = 8$ πειράματα, και πιθανότητα επιτυχίας του κάθε πειράματος $p = 1/5$.

    (β΄) Έστω Y_i, $i = 1, \ldots, 5$ Τ.Μ. Bernoulli που είναι ίσες με 1 όταν ο χωρικός i δε δεχτεί επίθεση από κανένα, και 0 αλλιώς. Παρατηρήστε πως $E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \left(\frac{4}{5}\right)^8$ και πως $Y = \sum_{i=1}^{5} Y_i$. Επομένως,

    $$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{5} E(Y_i) = 5\left(\frac{4}{5}\right)^8 \simeq 0.8389.$$

    (γ΄) Παρατηρήστε πως ο δειγματικός χώρος περιλαμβάνει 5^8 επαναληπτικές διατάξεις. Για παράδειγμα, η επαναληπτική διάταξη (A, E, B, D, C, C, C, B) σημαίνει ότι ο πρώτος τοξότης επιτίθεται στον χωρικό A, ο δεύτερος τον χωρικό E, κοκ.
    Ακολούθως, παρατηρούμε πως από τις 5^8 διατάξεις, μόνο 5 αντιστοιχούν στο να δεχτεί επίθεση μόνο ένας 1 χωρικός, οι

    $$(A, A, \ldots, A),\ (, , \ldots, ,), \ldots, (E, E, \ldots, E).$$

    Άρα, τελικά

    $$P(Z = 1) = \frac{5}{5^8} = \frac{1}{5^7} \simeq 1.28 \times 10^{-5}.$$

43. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό. Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \mathrm{COV}(X, Y)$.

    Λύση: Αφού οι X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$, συνολικά πρέπει να εξετάσουμε $4 \times 4 = 16$ περιπτώσεις, για να προσδιορίσουμε την από κοινού μάζα πιθανότητας. Έχουμε:

    $$\begin{aligned}
P(X=1, Y=1) &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}, \\
P(X=1, Y=2) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \\
P(X=1, Y=3) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\
P(X=1, Y=4) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\
P(X=2, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \\
P(X=2, Y=2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\
P(X=2, Y=3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\
P(X=3, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}, \\
P(X=3, Y=2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}, \\
P(X=4, Y=1) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Όλα τα άλλα ζεύγη έχουν μηδενική πιθανότητα να συμβούν. Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ζεύγη με θετική πιθανότητα έχουν την ίδια πιθανότητα. Πράγματι, έχουμε να τοποθετήσουμε τα δύο καλά πεπόνια σε δύο από 5 διαθέσιμες θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους, όλους με την ίδια πιθανότητα (λόγω συμμετρίας), άρα αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$. Προκύπτει επομένως η ακόλουθη από κοινού μάζα:

y \ x	1	2	3	4	$p_Y(y)$
1	1/10	1/10	1/10	1/10	4/10
2	1/10	1/10	1/10	0	3/10
3	1/10	1/10	0	0	2/10
4	1/10	0	0	0	1/10
$p_X(x)$	4/10	3/10	2/10	1/10	

Ακολούθως, εύκολα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\
E(Y) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\
E(XY) &= \frac{1}{10} \times (1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1) \\
&= \frac{35}{10}, \\
\mathrm{COV}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{35}{10} - 2 \times 2 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ήταν αναμενόμενο ότι η συνδιακύμανση είναι αρνητική. Πράγματι, αν αργήσουμε να βρούμε το πρώτο καλό πεπόνι, σημαίνει ότι έχουνε ανοίξει πολλά χαλασμένα, επομένως θα είναι πλέον πιο εύκολο να βρούμε το δεύτερο καλό πεπόνι.

44. **(Μεταγραφές)** Στην αρχή του πρωταθλήματος, μια ομάδα κάνει 3 μεταγραφές παικτών. Κάθε μεταγραφή θα είναι, ανεξάρτητα από τις άλλες, επιτυχημένη, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ικανοποιητική, με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και αποτυχημένη, με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Έστω X, Y, και Z τα πλήθη των επιτυχημένων, ικανοποιητικών, και αποτυχημένων μεταγραφών, αντίστοιχα.

(α΄) Να δώσετε μαθηματικό τύπο για την πιθανότητα $P(Y = y)$, όπου $y = 0, 1, 2, 3$.

(β΄) Να προσδιορίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των X, Y.

Λύση:

(α΄) Κάθε μεταγραφή θα είναι ικανοποιητική με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ανεξάρτητα από τις άλλες, επομένως η Y είναι διωνυμικά κατανεμημένη με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 3$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = \frac{1}{3}$. Επομένως,

$$P(Y = y) = \binom{3}{y} \left(\frac{1}{3}\right)^y \left(\frac{1}{3}\right)^{3-y}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως $P(X = x, Y = y) = 0$, όταν $x + y > 3$. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, παρατηρούμε πως

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y|X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \binom{3-x}{y} \left(\frac{2}{3}\right)^y \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x-y}.$$

Η άνω δεσμευμένη πιθανότητα προέκυψε διότι αν κάποια μεταγραφή δεν είναι επιτυχημένη, θα είναι είναι ικανοποιητική είτε αποτυχημένη με δεσμευμένες πιθανότητες

$$P(I|E') = \frac{P(IE')}{P(E')} = \frac{P(I)}{P(E')} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}, \quad P(A|E') = \frac{P(AE')}{P(E')} = \frac{P(A)}{P(E')} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως,

x / y	0	1	2	3
0	1/216	1/24	1/8	1/8
1	1/36	1/6	1/4	0
2	1/18	1/6	0	0
3	1/27	0	0	0

Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι υπάρχουν $3^3 = 27$ περιπτώσεις, κάθε μια εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα κελί του άνω πίνακα, και σε ορισμένα κελιά αντιστοιχούν πολλές. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P(X=0,Y=0) &= P(AAA) = \left(\frac{1}{6}\right)^3, \\
P(X=0,Y=1) &= P(AAI)+P(AIA)+P(IAA) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right), \\
P(X=0,Y=2) &= P(AII)+P(IIA)+P(IAI) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right), \\
P(X=0,Y=3) &= P(III) = \left(\frac{1}{3}\right)^3, \\
P(X=1,Y=0) &= P(EAA)+P(AEA)+P(AAE) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right), \\
P(X=2,Y=0) &= P(EEA)+P(EAE)+P(AEE) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right), \\
P(X=3,Y=0) &= P(EEE) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \\
P(X=1,Y=1) &= P(EAI)+P(EIA)+P(AEI)+P(AIE)+P(IAE)+P(IEA) \\
&= 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right), \\
P(X=2,Y=1) &= P(EEI)+P(EIE)+P(IEE) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right), \\
P(X=1,Y=2) &= P(EII)+P(IIE)+P(IEI) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

45. **(Πανδημίες)** Έστω X το πλήθος των εμβολίων για τη νόσο COVID που έχει κάνει ένα άτομο τυχαία επιλεγμένα από μια ομάδα ατόμων και έστω Y το πλήθος από φορές που έχει νοσήσει. Δίνεται ότι η από κοινού μάζα πιθανότητας των X και Y είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3
1	1/16	1/16	1/16	1/8
2	1/16	1/8	1/8	1/16
3	1/8	1/16	1/16	1/16

(α΄) Είναι οι Τ.Μ. X και Y ανεξάρτητες;

(β΄) Υπολογίστε την συνδιακύμανση $\mathrm{COV}(X,Y)$.

(γ΄) Με δεδομένο ότι ένα άτομο έχει νοσήσει 2 ή 3 φορές, ποια η πιθανότητα να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια;

(δ΄) Σε ένα δείγμα 100 ατόμων που περιγράφονται από την άνω από κοινού μάζα πιθανότητας, και για τα οποία τα ζεύγη (X_i, Y_i) και (X_j, Y_j) είναι ανεξάρτητα για $i \neq j$, ποια είναι η ακριβής μάζα του πλήθους Z των ατόμων που έχουν νοσήσει ακριβώς μια φορά και έχουν εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές;

Λύση: Παρατηρούμε, καταρχάς, πως

$$P(X=0)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}, \qquad P(X=1)=\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{1}{4},$$
$$P(X=2)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}, \qquad P(X=3)=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{1}{4},$$
$$P(Y=1)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}, \quad P(Y=2)=\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{3}{8},$$
$$P(Y=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16},$$

επομένως

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}, \\ E(Y) &= 1\times\frac{5}{16}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{5}{16}=2. \end{aligned}$$

(α΄) Για να είναι οι X, Y ανεξάρτητες, θα πρέπει για κάθε συνδυασμό (x, y) όπου $x \in \{0,1,2,3\}$ και $y \in \{1,2,3\}$, να ισχύει
$$P(X=x, Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$
Όμως αυτό δεν ισχύει, για διάφορους συνδυασμούς των x, y. Για παράδειγμα, $P(X=0, Y=1)=\frac{1}{16}$, ενώ $P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{64}$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0,1,2,3,\ y=1,2,3} xyP(X=x, Y=y) \\ &= 1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{16} \\ &\quad +6\times\frac{1}{16}+9\times\frac{1}{16}=\frac{45}{16}, \\ \mathrm{COV}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(γ΄) Έστω A το ενδεχόμενο το άτομο να νοσήσει 2 ή 3 φορές, και B το ενδεχόμενο να έχει κάνει το πολύ δύο εμβόλια. Κατά τα γνωστά για τη δεσμευμένη πιθανότητα,

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(X=0,1,2,\ Y=2,3)}{P(Y=2)+P(Y=3)}=\frac{3\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{5}{16}}=\frac{9}{11}.$$

(δ΄) Ένα άτομο θα νοσήσει ακριβώς μια φορά και θα εμβολιαστεί ακριβώς δύο φορές με πιθανότητα $P(X=2,\ Y=1)=\frac{1}{16}$. Επειδή τα διαφορετικά ζεύγη των (X_i, Y_i) είναι ανεξάρτητα, προκύπτει πως η Z ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N=100$ και $p=\frac{1}{16}$.

46. **(Τίτσου)** Το αμφιθεατρικό παιχνίδι Τίτσου παίζεται με 4 παίκτες, τους P_1, P_2, P_3, και P_4. Χρησιμοποιείται μια συνηθισμένη τράπουλα που αποτελείται από τετράδες των δεκατριών αριθμών $2, \ldots, 10, J, Q, K, A$, στην οποία έχουν προστεθεί 4 ειδικά φύλλα (Δράκος, Γαλοπούλα, Μαγιόνγκ, Σκύλος). Επομένως, η τράπουλα έχει συνολικά $4\times 14=56$ φύλλα. Στην αρχή του παιχνιδιού η τράπουλα μοιράζεται στα 4 και οι παίκτες λαμβάνουν από 14 φύλλα ο καθένας. Σε αυτή τη φάση, όταν ένας από τους παίκτες λάβει και τα 4 φύλλα ενός αριθμού, για παράδειγμα και τους 4 άσσους, τότε η τετράδα αυτή καλείται βόμβα. (Διευκρίνιση: αν γνωρίζεται το παιχνίδι, αγνοήστε άλλους κανόνες που δεν αναφέρονται ρητώς εδώ.)

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα, όταν μοιραστούν τα φύλλα, να υπάρχει παίκτης που να έχει λάβει και τα 4 ειδικά φύλλα;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν σε διαφορετικούς παίκτες;

(γ΄) Κατά μέσο όρο, πόσες βόμβες υπάρχουν, και στους 4 παίκτες, όταν μοιραστούν τα φύλλα;

Λύση:

(α΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα συγκεκριμένα ο παίκτης P_1 να πάρει και τα 4 ειδικά φύλλα. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{56}{14}$ δυνατοί συνδυασμοί 14 φύλλων που μπορεί να λάβει ο P_1. Από αυτούς, ακριβώς $\binom{52}{10}$ είναι αυτοί που έχουν και τα 4 ειδικά φύλλα, αφού υπάρχουν άλλα 52 φύλλα, και για να συμπληρώσουμε τα 14 πρέπει να πάρουμε άλλα 10. Επομένως, η πιθανότητα να πάρει ο P_1 τα 4 ειδικά φύλλα είναι $\binom{52}{10}/\binom{56}{14}$. Καθώς υπάρχουν 4 παίκτες, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p_1 = 4\frac{\binom{52}{10}}{\binom{56}{14}} = 0.0109.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως η πιθανότητα ο Σκύλος να είναι μαζι με τον Δράκο είναι $13/55$ γιατί ο Σκύλος έχει 13 θέσεις, στο χέρι αυτού που έχει τον Δράκο, επι συνόλου 55 θέσεων που μένουν, για να καταλήξει μαζί του. Ακολούθως, με δεδομένο οτι ο Σκύλος και ο Δράκος είναι μαζί, το Μαγιόνγκ θα είναι μαζί τους με πιθανότητα $12/54$, κ.ο.κ., και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_1 = \frac{13 \times 12 \times 11}{55 \times 54 \times 53} = 0.0109.$$

(β΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν στον ίδιο παίκτη. Παρατηρούμε πως η πιθανότητα να καταλήξουν και οι 2 στον παίκτη P_1 είναι $\binom{54}{12}/\binom{56}{14}$, καθώς ο παίκτης P_1 θα λάβει ένα συνδυασμό 14 φύλλων από 56, και για να συμπληρωθεί ένας συνδυασμός με τον Σκύλο και τον Δράκο πρέπει να επιλεγούν άλλα 12 φύλλα από 54. Η πιθανότητα ο Σκύλος και ο Δράκος να καταλήξουν μαζί σε έναν οποιονδήποτε παίκτη είναι τετραπλάσια, λόγω συμμετρίας, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p_2 = 1 - \frac{4\binom{54}{12}}{\binom{56}{14}} = 0.7636.$$

Εναλλακτικά, η πιθανότητα είναι $42/55 = 0.7636$, γιατί, αν θεωρήσουμε ότι ο Σκύλος βρίσκεται στα χέρια κάποιου παίκτη, υπάρχουν $3 \times 14 = 42$ θέσεις όπου μπορεί να βρίσκεται ο Δράκος ώστε να είναι στα χέρια άλλου παίκτη.

(γ΄) Αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα p_3 ο παίκτης P_1 να έχει βόμβα με άσσους. Υπάρχουν $\binom{56}{14}$ συνδυασμοί που μπορεί να λάβει, και από αυτούς, παρόμοια με το πρώτο σκέλος, $\binom{52}{10}$ έχουν όλους τους άσσους. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα p_3 είναι

$$p_3 = \frac{\binom{52}{10}}{\binom{56}{14}}.$$

Έστω τώρα I_{ij} μια Τ.Μ. που είναι μονάδα αν ο παίκτης $i = 1, 2, 3, 4$, έχει βόμβα με το νούμερο $j = 1, 2, \ldots, 13$. Η ζητούμενη ποσότητα είναι η μέση τιμή

$$E\left[\sum_{i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots 13} I_{ij}\right] = \sum_{i=1,\ldots,4, j=1,\ldots 13} E\left[I_{ij}\right] = 4 \times 13 \times p_3 = 0.1417.$$

7η Ομάδα Ασκήσεων

47. **(Πλημμύρες)** Το ύψος της στάθμης του Πηνειού κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & x \in [0, 10], \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

Στον Πηνειό βρίσκονται 4 γέφυρες, οι A, B, C, D, οι οποίες θα γίνουν απροσπέλαστες αν το ύψος της στάθμης υπερβεί τα 6, 7, 8, και 9 μέτρα αντίστοιχα.

(α΄) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της Τ.Μ. X;

(β΄) Έστω Y η Τ.Μ. που εκφράζει το πλήθος από γέφυρες που θα γίνουν απροσπέλαστες κατά τη διάρκεια μίας πλημμύρας. Ποια είναι η μάζα πιθανότητας της Y?

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$E(X) = \int_0^{10} \frac{10-x}{50} x \, dx = \int_0^{10} \left(\frac{10x}{50} - \frac{x^2}{50} \right) dx = \int_0^{10} \left(\frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{150} \right)' dx = \frac{100}{10} - \frac{1000}{150} = \frac{10}{3}.$$

(β΄) Το πλήθος των γεφυρών που θα γίνουν απροσπέλαστες είναι από 0 έως και 4. Οι πιθανότητες να συμβούν τα αντίστοιχα ενδεχόμενα είναι

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= \int_0^6 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_0^6 = \frac{84}{100}, \\
P(Y = 1) &= \int_6^7 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_6^7 = \frac{7}{100}, \\
P(Y = 2) &= \int_7^8 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_7^8 = \frac{5}{100}, \\
P(Y = 3) &= \int_8^9 \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_8^9 = \frac{3}{100}, \\
P(Y = 4) &= \int_9^{10} \frac{10-x}{50} dx = \left[\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \right]_9^{10} = \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

48. **(Λάμπες)** Δύο λάμπες έχουν τυχαίες διάρκειες ζωής X και Y, ανεξάρτητες μεταξύ τους, που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x(1-x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} k_2 y e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(α΄) Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων k_1 και k_2.

(β΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(Y > \frac{1}{2})$.

(γ΄) Επιλέγουμε μια από τις δύο λάμπες στην τύχη, χωρίς προτίμηση στην επιλογή, και έστω T η διάρκεια ζωής της. Έστω το ενδεχόμενο A να επιλέξαμε την λάμπα με πυκνότητα $f(x)$. Δίνεται ότι το ενδεχόμενο A είναι ανεξάρτητο από τις άνω διάρκειες ζωής. Με δεδομένο ότι εν τέλει η διάρκεια ζωής της λάμπας που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχόμενου A;

Λύση:

(α΄) Σχετικά με την k_1, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_0^1 k_1 x(1-x) \, dx = k_1 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)' dx = \frac{1}{6} k_1,$$

επομένως $k_1 = 6$. Σχετικά με την k_2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = \int_0^{\infty} k_2 y e^{-y}\,dy = \int_0^{\infty} k_2 y(-e^{-y})'\,dy = \lim_{h\to\infty} k_2 \left[ye^{-y}\right]_h^0 + \lim_{h\to\infty} k_2 \int_0^h e^{-y}\,dy$$

$$= k_2\left(0 - \lim_{h\to\infty}\frac{h}{e^h}\right) + k_2 \lim_{h\to\infty}\left(1-e^{-h}\right) = k_2,$$

επομένως $k_2 = 1$.

(β΄)

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x(1-x)\,dx = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)'dx = 6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$P\left(Y > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} ye^{-y}\,dy = \lim_{h\to\infty}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{h} ye^{-y}\,dy\right]$$

$$= \lim_{h\to\infty}\left[-ye^{-y}\right]_{\frac{1}{2}}^{h} + \lim_{h\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{h} e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

(γ΄) Κάνοντας χρήση του Κανόνα του Bayes,

$$\begin{aligned}
P\left(A|T > \frac{1}{2}\right) &= \frac{P(A, T > \frac{1}{2})}{P(T > \frac{1}{2}|A)P(A) + P(T > \frac{1}{2}|A')P(A')}\\
&= \frac{P(A, X > \frac{1}{2})}{P(X > \frac{1}{2}|A)P(A) + P(Y > \frac{1}{2}|A')P(A')}\\
&= \frac{P(A)P(X > \frac{1}{2})}{P(A)P(X > \frac{1}{2}) + P(A')P(Y > \frac{1}{2})} = \frac{1}{1+3e^{-1}}.
\end{aligned}$$

49. **(Διάρκεια παραμονής σε εξέταση)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων συμμετέχουν δύο ειδών φοιτητές, οι διαβασμένοι και οι αδιάβαστοι. Κάθε φοιτητής ανήκει στη κάθε μια από τις άνω δύο κατηγορίες με πιθανότητα $p = 0.5$. Ένας διαβασμένος φοιτητής παραμένει στην αίθουσα για χρονική διάρκεια X με πυκνότητα $f_X(x)$ ενώ ένας αδιάβαστος για χρονική διάρκεια Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$ όπου

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X)$ και $E(Y)$.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει στην αίθουσα για πάνω από μια ώρα ένας διαβασμένος φοιτητής; Ποια είναι η ίδια πιθανότητα αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να είναι διαβασμένος με δεδομένο ότι μια ώρα ακριβώς μετά την έναρξη της εξέτασης ο φοιτητής παραμένει στην αίθουσα;

Λύση:

(α΄)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3},\\
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\,dy = \int_0^2 y\left(\frac{2-y}{2}\right)dy = \int_0^2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)'dy\\
&= \left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right]_0^2 = 2 - 8/6 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(β΄)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4}, \\
P(Y \geq 1) &= \int_1^2 \left(\frac{2-y}{2}\right) dy = \left[-\frac{(2-y)^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

(γ΄) Έστω R το ενδεχόμενο το φοιτητής να είναι διαβασμένος και S το ενδεχόμενο να παραμείνει για πάνω από μία ώρα στην αίθουσα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$
P(R|S) = \frac{P(S|R)P(R)}{P(S|R)P(R) + P(S|R')P(R')} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.
$$

50. **(Καντάδες)** Κάθε βράδυ ο Ρωμαίος κάνει μια καντάδα στην Ιουλιέτα. Η διάρκεια της καντάδας του είναι μια συνεχής Τ.Μ. X (σε λεπτά) με πυκνότητα:

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in [0,1], \\ ax, & x \in [1,3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}
$$

Αν ο χρόνος ξεπεράσει τα 2 λεπτά, η μητέρα της Ιουλιέτας του πετάει έναν κουβά με μπουγαδόνερο.

(α΄) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a.

(β΄) Έστω πως ο Ρωμαίος σταματάει τις καντάδες μόλις φάει έναν κουβά νερό στο κεφάλι. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του συνολικού πλήθους καντάδων που θα κάνει (συμπεριλαμβανομένης της τελευταίας);

(γ΄) Έστω τώρα πως ο Ρωμαίος συνεχίζει τις καντάδες ακόμα κι αν κάποιες μέρες του ρίξουν τον κουβά. Ποια είναι η πιθανότητα σε δύο βδομάδες (14 ημέρες) να καταφέρει να κάνει ακριβώς 10 καντάδες χωρίς να του ρίξει η μητέρα της Ιουλιέτας τον κουβά;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας να είναι μονάδα, δηλαδή

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow a \int_0^1 x^3\, dx + a \int_1^3 x\, dx = 1 \Leftrightarrow a\left[\frac{1}{4} - 0\right] + a\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{4}a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4}{17}.
$$

(β΄) Ο Ρωμαίος θα φάει τον κουβά στο κεφάλι με πιθανότητα

$$
q = \int_2^3 ax\, dx = a\left[\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right] = \frac{10}{17}.
$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι καντάδες είναι ανεξάρτητα πειράματα που έχουν δύο αποτελέσματα, δηλαδή αποτυχία, αν ο Ρωμαίος δεν φάει τον κουβά στο κεφάλι, και επιτυχία, αν ο Ρωμαίος φάει τον κουβά στο κεφάλι, και επαναλαμβάνονται μέχρι να συμβεί η πρώτη επιτυχία. Επομένως, το πλήθος X των καντάδων είναι γεωμετρική Τ.Μ. με παράμετρο $q = \frac{10}{17}$, επομένως

$$
E(X) = \frac{1}{q} = \frac{17}{10}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{1-q}{q^2} = 1.19.
$$

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε καντάδα είναι ένα πείραμα που είναι επιτυχημένο αν ο Ρωμαίος δεν φάει τον κουβά, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $p = \frac{7}{10}$, και αποτυχημένο αν φάει τον κουβά. Το πλήθος των επιτυχιών ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, επομένως τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$
\binom{14}{10} \left(\frac{7}{17}\right)^{10} \left(\frac{10}{17}\right)^4 \simeq 0.0168.
$$

51. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}
$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως ένας φοιτητής θα περάσει αν και μόνο αν $Y \geq 5$, επομένως απαιτούμε

$$\int_5^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \int_5^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0 + e^{-5/v} = \frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{v} = -\log 10 \Leftrightarrow v = \frac{5}{\log 10} \simeq 2.1715.$$

(β΄) Ειδικά για την περίπτωση $k = 10$, έχουμε

$$P(Y = 10) = \int_{10}^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \int_{10}^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = e^{-10/v}.$$

Στις περιπτώσεις $k = 0, 1, \ldots, 9$, έχουμε

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \int_k^{k+1} \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}.$$

Σχετικά με τη μέση τιμή της άνω Τ.Μ. Y, κατά τα γνωστά από τον ορισμό της μέσης τιμής διακριτών Τ.Μ., έχουμε

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{10} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{9} k \left[e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}\right] + 10 \left[e^{-10/v}\right].$$

52. **(Χημείο)** Στην αρχή μιας δίωρης εξέτασης, στο Χημείο βρίσκονται 60 φοιτητές. Κάθε ένας από αυτούς θα αποχωρήσει από την εξέταση μετά από ένα τυχαίο χρόνο X ο οποίος μετράται σε ώρες και έχει την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Οι χρόνοι αποχώρησης διαφορετικών φοιτητών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου X;

(β΄) Έστω Y το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν στην αίθουσα ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του Y;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^\infty x f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(1+x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)'\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{6} \simeq 1.1667, \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2(1+x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)'\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{1}{4} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{3} \simeq 1.6667, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} \simeq 0.3056.
\end{aligned}$$

(β΄) Ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης, κάθε φοιτητής θα έχει αποχωρήσει με πιθανότητα

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(1+x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x + \frac{x^2}{2}\right)'\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \simeq 0.3750.$$

Υπάρχουν 60 φοιτητές, καθένας εκ των οποίων θα έχει φύγει στο τέλος της μιας ώρας ανεξάρτητα από του υπόλοιπους με πιθανότητα $\frac{3}{8}$. Επομένως, το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 60$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Επομένως, κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή,

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \binom{60}{y}\left(\frac{5}{8}\right)^y \left(\frac{3}{8}\right)^{60-y}, \qquad y = 1, \ldots, 60, \\ E(Y) &= Np = 60 \times \frac{5}{8} = \frac{75}{2} \simeq 37.5, \\ \mathrm{VAR}(Y) &= Np(1-p) = 60 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{225}{16} \simeq 14.0625. \end{aligned}$$

53. **(Διάρκεια παραμονής σε εξέταση)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων συμμετέχουν δύο ειδών φοιτητές, οι διαβασμένοι και οι αδιάβαστοι. Κάθε φοιτητής ανήκει στη κάθε μια από τις άνω δύο κατηγορίες με πιθανότητα $p = 0.5$. Ένας διαβασμένος φοιτητής παραμένει στην αίθουσα για χρονική διάρκεια X με πυκνότητα $f_X(x)$ ενώ ένας αδιάβαστος για χρονική διάρκεια Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$ όπου

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X)$ και $E(Y)$.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει στην αίθουσα για πάνω από μια ώρα ένας διαβασμένος φοιτητής; Ποια είναι η ίδια πιθανότητα αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής να είναι διαβασμένος με δεδομένο ότι μια ώρα ακριβώς μετά την έναρξη της εξέτασης ο φοιτητής παραμένει στην αίθουσα;

Λύση:

(α΄)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}, \\ E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \int_0^2 y\left(\frac{2-y}{2}\right)dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)' dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^2 = 2 - 8/6 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(β΄)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4}, \\ P(Y \geq 1) &= \int_1^2 \left(\frac{2-y}{2}\right) dy = \left[-\frac{(2-y)^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(γ΄) Έστω R το ενδεχόμενο το φοιτητής να είναι διαβασμένος και S το ενδεχόμενο να παραμείνει για πάνω από μία ώρα στην αίθουσα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$P(R|S) = \frac{P(S|R)P(R)}{P(S|R)P(R) + P(S|R')P(R')} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

8η Ομάδα Ασκήσεων

54. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

    Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

    Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

    (α΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

    (β΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

    Λύση:

    (α΄) Παρατηρούμε πως ο χρόνος που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση και των δύο είναι $Z = \min\{X, Y\}$. Το ελάχιστο δύο εκθετικών Τ.Μ. είναι επίσης εκθετική Τ.Μ., σύμφωνα με τη θεωρία. Ειδικά στην περίπτωσή μας, έχουμε

    $$P(\min\{X, Y\} \le x) = 1 - P(\min(X, Y) \ge x) = 1 - P(X \ge x, Y \ge x)$$
    $$1 - P(X \ge x)P(Y \ge x) = 1 - e^{-x}e^{-x} = 1 - e^{-2x},$$

    επομένως πράγματι το ελάχιστο $\min\{X, Y\}$ είναι εκθετική Τ.Μ. με μέση τιμή $\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξυπηρέτηση θα αρχίσει κατά μέσο όρο μετά από χρόνο $E(\min\{X, Y\}) = \frac{1}{2}$.

    (β΄) Σχετικά με το χρόνο που θα γλιτώσει ο ένας εκ των δύο, παρατηρούμε πως από τη στιγμή που αδειάζει η μία ουρά, η άλλη ουρά θα αδειάσει πάλι μετά από εκθετικό χρόνο με μέση τιμή 1, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης.

55. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο A και πίτσα από το εστιατόριο B. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο A και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο B. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

    (α΄) Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. *(Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια A και B αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της* $\max(X_A, X_B)$*, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)*

    (β΄) Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

    Λύση:

    (α΄) Εάν $F(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου χρόνου $X = \max(X_A, X_B)$ τότε

    $$\begin{aligned} F(x) &= P(\max(X_A, X_B) \le x) = P(X_A \le x, X_B \le x) = P(X_A \le x)P(X_B \le x) \\ &= (1 - e^{-x/30})(1 - e^{-x/20}) = 1 - e^{-x/30} - e^{-x/20} + e^{-x/12}, \end{aligned}$$

    όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των X_A, X_B. Άρα η πυκνότητα $f(x)$ της X είναι

    $$f(x) = F'(x) = \frac{1}{30}e^{-x/30} + \frac{1}{20}e^{-x/20} - \frac{1}{12}e^{-x/12}.$$

    Συνεπώς η μέση τιμή είναι

    $$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{30}e^{-x/30}dx + \int_0^\infty \frac{x}{20}e^{-x/20}dx - \int_0^\infty \frac{x}{12}e^{-x/12}dx \\ &= 30 + 20 - 12 = 38. \end{aligned}$$

    Το ολοκληρώματα προκύπτουν παρατηρώντας πως ισούνται με τις μέσες τιμές εκθετικών Τ.Μ. με παραμέτρους 30, 20, και 12 αντιστοίχως.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή του πιο σύντομου χρόνου $\min(X_A, X_B)$. Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής:

$$\begin{aligned} P(\min(X_A, X_B) \leq x) &= 1 - P(\min(X_A, X_B) > x) = 1 - P(X_A > x, X_B > x) \\ &= 1 - P(X_A > x)P(X_B > x) = 1 - e^{-x/30}e^{-x/20} = 1 - e^{x/12}. \end{aligned}$$

Άρα ο πιο σύντομος χρόνος έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο 12, και επομένως η μέση τιμή του είναι 12.

56. **(Αριθμητικοί υπολογισμοί με την κανονική κατανομή)** Έστω X μια Τ.Μ. με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

(α΄) Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθούν οι $P(X < 1.22)$ και $P(X > -1.22)$.

(β΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > 2.7)$ και η πιθανότητα $P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7)$.

(γ΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η $P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1)$.

(δ΄) Αν $\mu = -1$ και $\sigma^2 = 4$, να βρεθούν οι $P(X > 3)$ και $P(X > 3|X > 2)$.

(ε΄) Αν $\mu = -2$ και $\sigma^2 = 3.5$, να βρεθεί η μέση τιμή των $Y = 1 - X^2$ και $Y = (X + 2)^{15}$.

(ς΄) Αν $\mu = 2$, να βρεθεί η τιμή της διασποράς για την οποία $P(X < 0) = 1/3$.

Λύση: Έχουμε, κατά περίπτωση:

(α΄) Αντικαθιστώντας τις σχετικές τιμές της $\Phi(z)$ από τον πίνακα τιμών της Φ, έχουμε

$$\begin{aligned} P(X < 1.22) &= \Phi(1.22) \simeq 0.8888, \\ P(X > -1.22) &= 1 - P(X \leq -1.22) = 1 - \Phi(-1.22) = \Phi(1.22) \simeq 0.8888. \end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε

$$P(X > 2.7) = 1 - P(X \leq 2.7) = 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) = 1 - \Phi(1.7) \simeq 1 - 0.9554 = 0.0446,$$

και

$$\begin{aligned} P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7) &= P(X < -4.7) + P(X > 2.7) = \Phi\left(\frac{-4.7 - 1}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) \\ &= \Phi(-5.7) + 1 - \Phi(1.7) \simeq 0 + 1 - 0.9554 = 0.0446. \end{aligned}$$

(γ΄) Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα,

$$\begin{aligned} P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1) &= P(X > 2.1) + P(-1 < X < 1) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2.1 - 1}{1}\right) + \Phi\left(\frac{1 - 1}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - 1}{1}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.1) + \Phi(0) - \Phi(-2) \simeq 1 - 0.8643 + 0.5 - 0.0228 = 0.6129. \end{aligned}$$

(δ΄) Εδώ έχουμε

$$P(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(2) \simeq 0.0228,$$

και

$$P(X > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668,$$

οπότε

$$P(X > 3|X > 2) = \frac{P(X > 3, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - \Phi(3)}{1 - \Phi(2)} \simeq 0.0593.$$

(ε΄) Για $Y = 1 - X^2$ έχουμε:

$$E(Y) = E\left((1 - X^2\right) = 1 - E\left(X^2\right) = 1 - (\sigma^2 + \mu^2) = 1 - 3.5 - 4 = -6.5.$$

Για $Y = (X + 2)^{15}$ έχουμε:

$$E(Y) = E\left((X + 2)^{15}\right) = E\left(W^{15}\right),$$

όπου $W = X+2$ είναι μια Τ.Μ. με κατανομή $N(0, 3.5)$, δηλαδή με μέση τιμή μηδέν. Έστω $f(x)$ η πυκνότητα της W. Παρατηρήστε πως

$$E(Y) = E\left(W^{15}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} f(w)\, dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw.$$

Παρατηρήστε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw &= \int_{-\infty}^{0} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw + \int_{0}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw \\ &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw.\end{aligned}$$

Καθένα από τα άνω όρια είναι πεπερασμένο, γιατί η συνάρτηση $e^{-w^2/(2\sigma^2)}$ μειώνεται πολύ πιο γρήγορα από την w^{15}.

(Αν θέλουμε να κάνουμε μια αυστηρή απόδειξη, μπορούμε να ξεκινήσουμε παρατηρώντας πως με μερικές εφαρμογές του κανόνα L'Hôpital προκύπτει ότι

$$\lim_{w\to\infty} \frac{w^{15}}{e^{w^2/(4\sigma^2)}} = 0,$$

άρα υπάρχει κάποιο W έτσι ώστε για $w > W$ να έχουμε

$$w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)} < e^{w^2/(4\sigma^2)} \times e^{-w^2/(2\sigma^2)} = e^{-w^2/4\sigma^2},$$

του οποίου το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[W, \infty]$ είναι πεπερασμένο. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στην άνω απόδειξη;)

Επιπλέον, τα δύο όρια είναι αντίθετα, γιατί

$$\int_{-\infty}^{0} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw = -\int_{0}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw.$$

Αυτό προκύπτει αν κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής $w \to -w$ σε ένα από τα δύο.

Άρα τελικά το άθροισμα των δύο καταχρηστικών ολοκληρωμάτων είναι 0, και τελικά $E[Y] = 0$.

(ς΄) Έχουμε:

$$\begin{aligned}P(X<0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(X-2 < 0-2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\frac{X-2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma = -\frac{2}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}.\end{aligned}$$

Από τον πίνακα τιμών της Φ, βλέπουμε πως για την αντίστροφη της Φ έχουμε $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0.43$, άρα τελικά

$$\sigma \simeq -\frac{2}{-0.43} = 4.65 \Leftrightarrow \sigma^2 \simeq 21.63.$$

57. **(Μέση τιμή της Τ.Μ. Cauchy)** Μια Τ.Μ. X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παραμέτρους $\gamma > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν η πυκνότητά της ισούται με

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Επιβεβαιώστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ είναι μονάδα.

(β΄) Να δείξετε ότι η Τ.Μ. Cauchy δεν έχει μέση τιμή, γιατί η απόπειρα υπολογισμού του καταχρηστικού ολοκληρώματος που την ορίζει καταλήγει σε απροσδιοριστία $\infty - \infty$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} + \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} (\arctan t)'\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} (\arctan t)'\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan t\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\arctan t\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = 1.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα κάναμε αντικατάσταση $t = \frac{x-x_0}{\gamma}$, ενώ στην τρίτη, χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα της αντίστροφης εφαπτόμενης $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$.

(β΄) Από τον ορισμό των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{x dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{x dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]},$$

εφόσον υπάρχουν και τα δύο ολοκληρώματα και δεν προκύπτει απροσδιοριστία. Παρατηρήστε πως έχουμε σπάσει το αρχικό ολοκλήρωμα σε δύο καταχρηστικά αριστερά και δεξιά της θέσης x_0, για να εκμεταλλευτούμε την προφανή συμμετρία.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_0} \frac{x dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} &= \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{\left(t+\frac{x_0}{\gamma}\right)dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{t dt}{\pi(1+t^2)} + \frac{x_0}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\gamma}{\pi}\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_{-\infty}^{0} + \frac{x_0}{\pi}\left[\arctan t\right]_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{\gamma}{\pi}\left[0-\infty\right] + \frac{x_0}{\pi}\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\infty.\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα κάναμε αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x-x_0}{\gamma}$, ενώ στην δεύτερη χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές σχέσεις

$$\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]' = \frac{t}{1+t^2}, \qquad (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, με εντελώς ανάλογο τρόπο, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{\infty} \frac{x dx}{\pi\gamma\left[1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]} &= \frac{\gamma}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\left(t+\frac{x_0}{\gamma}\right)dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{\gamma}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{t dt}{\pi(1+t^2)} + \frac{x_0}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\gamma}{\pi}\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_{0}^{\infty} + \frac{x_0}{\pi}\left[\arctan t\right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{\gamma}{\pi}\left[\infty-0\right] + \frac{x_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \infty.\end{aligned}$$

Άρα τελικά, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει, λόγω απροσδιοριστίας $\infty-\infty$, και τελικά δεν υπάρχει η μέση τιμή.

9η Ομάδα Ασκήσεων

58. **(Περιφερειακές/Δημοτικές Εκλογές)** Στις περιφερειακές/δημοτικές εκλογές ο Σταύρος ψήφισε σε δύο διαφορετικά εκλογικά τμήματα. Στο πρώτο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις δημοτικές εκλογές, και στο δεύτερο εκλογικό τμήμα ψήφισε για τις περιφερειακές εκλογές. Στο πρώτο τμήμα, ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. X και στο δεύτερο τμήμα ο χρόνος αναμονής ήταν Τ.Μ. Y. Δίνεται ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες, και η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,1]$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο Σταύρος να χρειάστηκε συνολικό χρόνο $X+Y>2$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

   (α΄) Η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,2]$.

   (β΄) Η Y είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή 1.

   Λύση:

   (α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία

$$P(X+Y\geq 2) = \iint_{(x,y)\geq 2} f_{XY}(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_{2-x}^{2} \frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{1}{4}.$$

   (β΄) Παρόμοια,

$$\begin{aligned} P(X+Y\geq 2) &= \iint_{(x,y)\geq 2} f_{XY}(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_{2-x}^{\infty} e^{-y}\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left[e^{-y}\right]_{\infty}^{2-x}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{x-2}\,dx = \left[e^{x-2}\right]_0^1 = e^{-1}-e^{-2}. \end{aligned}$$

59. **(Διάρκεια ζωής)** Ένα μελάνι εκτυπωτή του CSLAB έχει διάρκεια ζωής X, όπου X είναι Τ.Μ., που μετράται σε μέρες, με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x\in[0,a], \\ 0, & x\notin[0,a], \end{cases}$$

   όπου a μια άγνωστη παράμετρος. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής X να υπερβεί τις 10 μέρες είναι $\frac{1}{3}$.

   Επίσης, όταν παραγγέλνεται ένα μελάνι, φτάνει στο CSLAB μετά από τυχαίο χρόνο Y που είναι επίσης Τ.Μ., αλλά με πυκνότητα εκθετική, με παράμετρο $\theta=1$, επίσης σε μέρες.

   (α΄) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου a.

   (β΄) Αν το CSLAB παραγγείλει να έρθει το επόμενο μελάνι τη στιγμή που τοποθετεί ένα νέο μελάνι στον εκτυπωτή, ποια είναι η πιθανότητα το επόμενο μελάνι να φτάσει στο CSLAB αφού ο εκτυπωτής έχει ξεμείνει από το νέο μελάνι; Δίνεται ότι η X και Y είναι ανεξάρτητες.

   Λύση:

   (α΄) Το a είναι μεγαλύτερο του 10, αλλιώς η πιθανότητα να υπερβεί η X το 10 θα ήταν μηδέν. Έχουμε,

$$\int_{10}^{a} \frac{1}{a}\,dx = \frac{a-10}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 15.$$

   (β΄) Λόγω ανεξαρτησίας,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{15}, & 0\leq x\leq 15,\ y\geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

   Επομένως, αν R είναι το χωρίο όπου η από κοινού πυκνότητα είναι θετική, και επιπλέον $y>x$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y>X) &= \iint_R \frac{e^{-y}}{15}\,dA = \int_0^{10}\left(\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{15}\,dy\right)\,dx = \frac{1}{15}\int_0^{10}\left(\int_x^{\infty} (-e^{-y})'\,dy\right)\,dx \\ &= \frac{1}{15}\int_0^{10} e^{-x}\,dx = \frac{1}{15}\int_0^{10}(-e^{-x})'\,dx = \frac{1}{15}(1-e^{-10}). \end{aligned}$$

60. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Δύο από κοινού συνεχείς Τ.Μ., X και Y, περιγράφονται από την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2(2-y), & x, y \in [0,1], \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

(β΄) Να προσδιορίσετε την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$.

(γ΄) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X < 2Y)$.

Λύση:

(α΄) Θα πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στο επίπεδο, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, να είναι μονάδα. Όμως, έχουμε

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\, dA = \iint_{[0,1]\times[0,1]} cx^2(2-y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 cx^2(2-y)\, dy \right) dx$$
$$= c\int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 (2-y)\, dy \right) dx = c\left(\int_0^1 (2-y)\, dy \right) \left(\int_0^1 x^2\, dx \right).$$

Το πρώτο από τα άνω ολοκληρώματα ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου με ύψος 1 και μήκη βάσεων 2 και 1, επομένως ισούται με $\frac{3}{2}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα εύκολα προκύπτει οτι είναι $\frac{1}{3}$. Άρα τελικά προκύπτει πως $c = 2$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy.$$

Παίρνουμε περιπτώσεις. Αν $x \notin [0,1]$, τότε η άνω ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού μηδενική, επομένως και $f_X(x) = 0$. Αν όμως $x \in [0,1]$, τότε

$$f_X(x) = \int_0^1 2x^2(2-y)\, dy = 2x^2 \int_0^1 (2-y)\, dy = 3x^2.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε πως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε πως το ολοκλήρωμα της $f_X(x)$ πράγματι ισούται με 1.

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P(X < 2Y) = P((X,Y) \in R) = \iint_R f(x,y)\, dA,$$

όπου $R = \{(x,y) : x < 2y\}$. Το χωρίο αυτό μπορεί να σπάσει σε δύο υποχωρία, το χωρίο $R_1 = R \cap ([0,1] \times [0,1])$ και το χωρίο $R_2 = R - R_1$. Στο δεύτερο χωρίο, το άνω ολοκλήρωμα είναι 0, διότι σε αυτό είναι μηδενική η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X < 2Y) &= \iint_{R_1} f(x,y)\, dA = \int_0^1 \left(\int_{x/2}^1 2x^2(2-y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 2x^2 \left(\int_{x/2}^1 \left[-\frac{(2-y)^2}{2} \right]' dy \right) dx = \int_0^1 2x^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[-1 + 4 + \frac{x^2}{4} - 2x \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 3x^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + x^3 \right]' dx = \frac{1}{20} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{20}. \end{aligned}$$

61. **(Age of Empires duels)** Ένας ιππότης μάχεται με ένα καταπέλτη μέχρι θανάτου. Ο ιππότης θα επιτύχει την εξόντωση του καταπέλτη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. X κατανεμημένη ομοιόμορφα μεταξύ των χρόνων 10 και 20. Ο καταπέλτης θα πετύχει την εξόντωση του ιππότη σε χρόνο που μοντελοποιείται ως συνεχής Τ.Μ. Y εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\theta = 15$. Οι Τ.Μ. X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α΄) Γράψτε αναλυτικά ως κλαδική συνάρτηση την από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x,y)$ των X, Y. Σχεδιάστε στο επίπεδο xy το χωρίο όπου η $f_{XY}(x,y)$ λαμβάνει θετικές τιμές.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X > Y)$ να εξοντώσει ο καταπέλτης πρώτος τον ιππότη;

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in [10,20], \\ 0, & x \notin [10,20], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{15}e^{-y/15}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Επομένως, λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{150}e^{-y/15}, & 10 \leq x \leq 20,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Η πυκνότητα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4 (αριστερά), όπου φαίνεται και το ζητούμενο χωρίο.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P(X > Y) = \iint_{R_1} f_{XY}(x,y)\, dA,$$

όπου $R_1 = \{(x,y) : x > y\}$. Επειδή όμως η πυκνότητα είναι μηδενική εκτός του χωρίου $R_2 = \{(x,y) : 10 \leq x \leq 20,\ y \geq 0\}$, εν τέλει η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα στο χωρίο $R = R_1 \cap R_2 = \{10 \leq x \leq 20,\ 0 \leq y \leq x\}$. (Παρατηρήστε πως μπορούμε να αντικαθιστούμε ανισοϊσότητες με ανισότητες χωρίς πρόβλημα, προκειμένου να ολοκληρώνουμε πυκνότητες.)

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \iint_R \frac{1}{150}e^{-y/15}\, dA = \int_{10}^{20} \left(\int_0^x \frac{1}{150}e^{-y/15} dy \right) dx = \frac{1}{10}\int_{10}^{20} \left(\int_0^x \left[-e^{-y/15}\right]' dy \right) dx \\ &= \frac{1}{10}\int_{10}^{20} \left[1 - e^{-x/15}\right] dx = 1 + \frac{15}{10}\int_{10}^{20} \left[e^{-x/15}\right]' dx = 1 + \frac{15}{10}\left[e^{-20/15} - e^{-10/15}\right] \\ &\simeq 0.6253. \end{aligned}$$

Η πιθανότητα που υπολογίσαμε ισούται με τον όγκο του στερεού στο Σχήμα 4 (δεξιά).

62. **(Από κοινού πυκνότητα)** Έστω X, Y από κοινού τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ 0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $c > 0$ άγνωστη σταθερά.

(α΄) Ποια η τιμή της σταθεράς c;

(β΄) Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες των X, Y.

(γ΄) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

Λύση: Παρατηρούμε καταρχάς πως

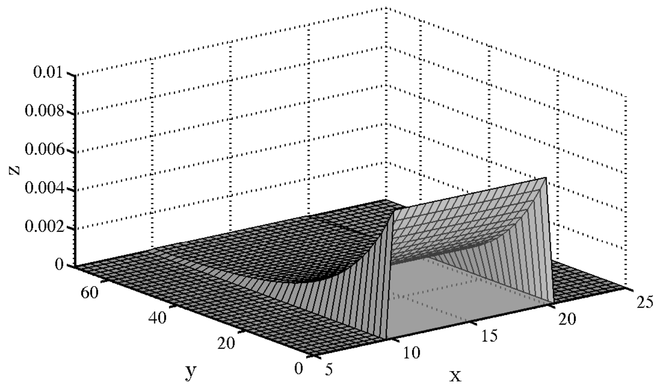
$$\begin{aligned} 1 = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{XY}\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 6x^c y\, dy \right) dx &= 6\int_0^1 x^c \left(\int_0^1 y\, dy \right) dx \\ &= 3\int_0^1 x^c\, dx = \frac{3}{c+1}\int_0^1 \left(x^{c+1}\right)' dx = \frac{3}{c+1} \Rightarrow c = 2. \end{aligned}$$

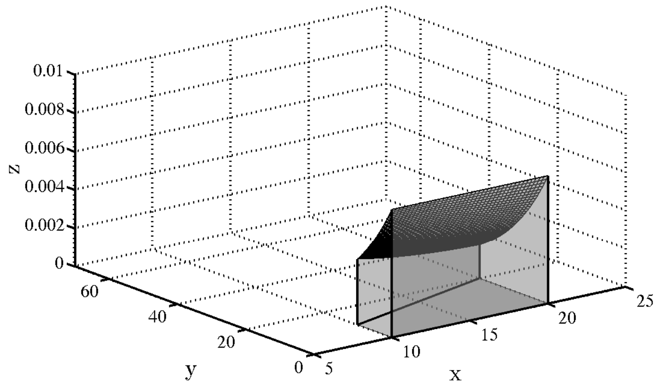
Σχετικά με τις περιθώριες, κατά τα γνωστά από τη θεωρία έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx.$$

Αν $x \in [0,1]$, τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^1 6x^2 y\, dy = 6x^2 \int_0^1 (y^2/2)'\, dy = 3x^2,$$





Σχήμα 4: Άσκηση 62.

ενώ αν $x \notin [0,1]$, τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, προκύπτει πως

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

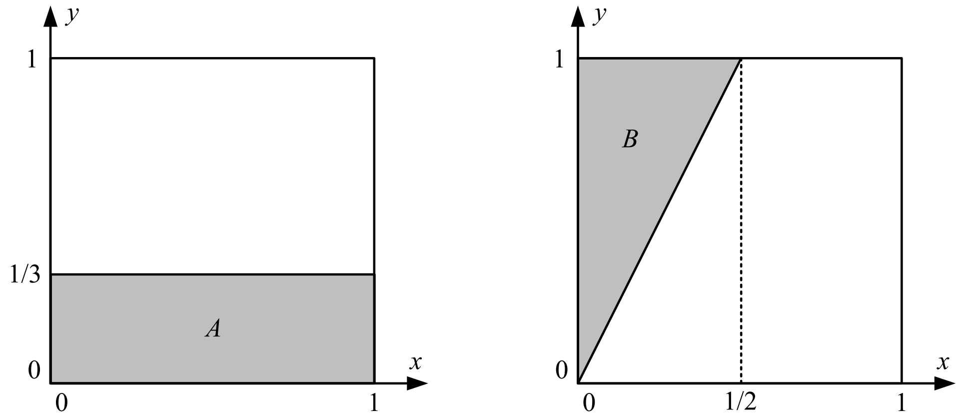
Σχετικά με τις ζητούμενες πιθανότητες, επειδή η από κοινού πυκνότητα είναι μηδενική εκτός του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$, τελικά υπολογίζονται ολοκληρώνοντας την από κοινού κατανομή στα χωρία

$$A = \{(x,y):\ 0 \le x \le \frac{1}{3},\ 0 \le y \le 1\}, \quad B = \{(x,y):\ 0 \le x, y \le 1,\ y \ge 2x\},$$

που εμφανίζονται εμφανίζονται στο Σχήμα 5. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X < 1/3) &= \iint_A f_{XY}(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1/3} 6x^2 y\,dx \right) dy = 6 \int_0^1 \left(y \int_0^{1/3} (x^3/3)'\,dx \right) dy \\ &= \frac{6}{3^4} \int_0^1 y\,dy = (1/3)^3 = 1/27, \\ P(Y > 2X) &= \iint_B f(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^{y/2} 6x^2 y\,dx \right) dy = 6 \int_0^1 \left(y \int_0^{y/2} x^2\,dx \right) = \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy = 1/20. \end{aligned}$$

Για την πρώτη πιθανότητα θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει και την περιθώρια πυκνότητα της X.



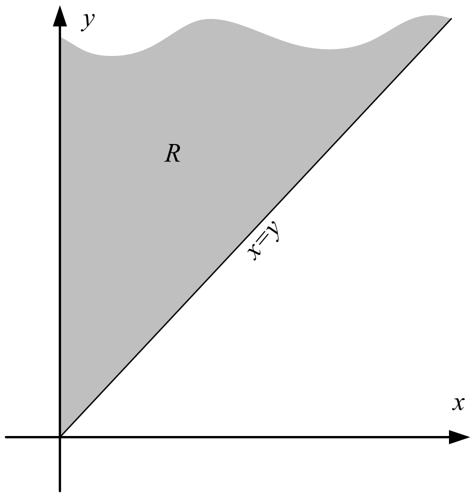
Σχήμα 5: Άσκηση 63.

63. **(Μη αρνητικές συνεχείς Τ.Μ.)** Στη γενική περίπτωση που η X είναι μη αρνητική Τ.Μ. με κατανομή πιθανότητας $F_X(\cdot)$ δείξτε ότι
$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx.$$
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε πως
$$E(X) = \int_0^\infty y f_X(y)\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\, dy,$$
και αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης με εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini.)

Λύση: Έχουμε
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty y f_X(y)\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\, dy = \int_0^\infty \left(\int_0^y f_X(y)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_X(y)\, dy \right) dx = \int_0^\infty P(X > x)\, dx = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx. \end{aligned}$$
Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του Fubini. Συγκεκριμένα, τα δύο σκέλη ισούνται και τα δύο με το ολοκλήρωμα της $f_X(y)$ στο σκιασμένο άπειρο τριγωνικό χωρίο
$$R = \{(x, y) :\ y \geq 0, 0 \leq x \leq y\ \} = \{(x, y) :\ x \geq 0, y \geq x\ \}$$
του Σχήματος 6.

64. **(Ελάχιστο n τυχαίων μεταβλητών)** Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες Τ.Μ., όλες με την ίδια συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Έστω επίσης $V = \min\{X_1, X_2 \ldots, X_n\}$. Να βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F_V(v)$ της V, συναρτήσει της $F_X(x)$. Στην ειδική περίπτωση που όλες οι X_i έχουν κατανομή Εκθ(θ), ποια είναι η κατανομή της V;

Λύση: Παρατηρούμε πως:
$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) = 1 - P(V > v) = 1 - P\big(\{X_1 > v\} \cap \{X_2 > v\} \cap \cdots \cap \{X_n > v\}\big) \\ &= 1 - P(X_1 > v)P(X_2 > v) \ldots P(X_n > v) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq v))(1 - P(X_1 \leq v)) \ldots (1 - P(X_n \leq v)) = 1 - (1 - F_X(v))^n. \end{aligned}$$
Στην ειδική περίπτωση που η $F_X(x)$ είναι εκθετική με παράμετρο θ, δηλαδή
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$
τότε με αντικατάσταση στην άνω προκύπτει πως
$$F_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{nv}{\theta}}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0, \end{cases}$$
δηλαδή η V είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένη, με παράμετρο θ/n.



Σχήμα 6: Άσκηση 64.

10η Ομάδα Ασκήσεων

65. **(Εκτελέσεις αλγόριθμου)** Κάθε φορά που εκτελείται ένας αλγόριθμος, η εκτέλεση διαρκεί έναν τυχαίο χρόνο ο οποίος ισούται με 2, 4, 10 ή 20 δευτερόλεπτα, με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ και $\frac{1}{8}$. Υποθέτουμε ότι οι διάρκειες διαδοχικών εκτελέσεων είναι ανεξάρτητες.

(α΄) Έστω X το πλήθος των φορών που η εκτέλεση πήρε λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα, σε ένα συνολικό πλήθος 24 εκτελέσεων. Να περιγράψετε με ακρίβεια την κατανομή του X και να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διασπορά του.

(β΄) Έστω Y ο συνολικός χρόνος που πήραν οι 24 διαδοχικές εκτελέσεις. Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά του Y.

(γ΄) Αποδείξτε ότι η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος των 24 εκτελέσεων να ξεπερνά τα 276 δευτερόλεπτα, είναι το πολύ 50%.

(δ΄) Έστω Z η πρώτη φορά που ο αλγόριθμος πήρε λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα. Να περιγράψετε με ακρίβεια την κατανομή του Z και να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $Z > 5$.

Λύση:

(α΄) Κάθε εκτέλεση διαρκεί λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα με πιθανότητα ίση με $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Επειδή οι εκτελέσεις είναι ανεξάρτητες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε 24 ανεξάρτητα πειράματα καθένα εκ των οποίων είναι επιτυχία (με πιθανότητα $\frac{3}{4}$), όταν η εκτέλεση διαρκεί λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα. Προκύπτει λοιπόν πως η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 24$ και $p = \frac{3}{4}$. Κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή, $E(X) = Np = 18$ και $\text{VAR}(X) = Np(1-p) = \frac{9}{2}$.

(β΄) Έστω Y_i ο χρόνος που πήρε η εκτέλεση i. Παρατηρούμε πως $Y = \sum_{i=1}^{24} Y_i$, επομένως

$$\begin{aligned}
E(Y_i) &= 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 10 \times \frac{1}{8} + 20 \times \frac{1}{8} = \frac{23}{4}, \\
E(Y) &= E\left(\sum_{i=1}^{24} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{24} E(Y_i) = 24 \times \frac{23}{4} = 138, \\
E(Y_i^2) &= 2^2 \times \frac{1}{2} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 10^2 \times \frac{1}{8} + 20^2 \times \frac{1}{8} = \frac{137}{2}, \\
\text{VAR}(Y) &= \text{VAR}\left(\sum_{i=1}^{24} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{24} \text{VAR}(Y_i) = 24 \times \left[E(Y_i^2) - (E(Y_i))^2\right] \\
&= 24 \times \left(\frac{137}{2} - \left(\frac{23}{4}\right)^2\right) = 24 \times \frac{567}{16} = \frac{1701}{2}.
\end{aligned}$$

(γ΄) Θα εφαρμόσουμε την ανισότητα του Markov:

$$P(Y > 276) \leq P(Y \geq 276) \leq \frac{E(Y)}{276} = \frac{138}{276} = \frac{1}{2}.$$

(δ΄) Επειδή οι εκτελέσεις είναι ανεξάρτητες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε μια θα είναι επιτυχής αν διαρκέσει λιγότερο από 5 δευτερόλεπτα, και έτσι προκύπτει πως η Z είναι γεωμετρικά κατανεμημένη με παράμετρο την πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή $p = \frac{3}{4}$. Κατά τα γνωστά από την γεωμετρική κατανομή, η πιθανότητα του ενδεχόμενου $Z > 5$ ισούται με

$$P(Z > 5) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^5 = \frac{1}{2^{10}}.$$

66. **(Exit Poll)** Έστω εκλογές με 10^6 ψηφοφόρους στις οποίες κάθε ψηφοφόρος ψηφίζει το κόμμα A με πιθανότητα $p = 0.25$ ανεξάρτητα από τους άλλους ψηφοφόρους. Στις εκλογές αυτές διενεργείται exit poll στο οποίο συμμετέχουν 10^4 ψηφοφόροι, και στο οποίο κάθε ένας από αυτούς ψηφίζει όπως θα ψήφιζε στις εκλογές.

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα το κόμμα A να λάβει στο exit poll μεταξύ 24.5% και 25.5%;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα το κόμμα A να λάβει στις εκλογές ποσοστό εντός του άνω εύρους;

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και για τα δύο σκέλη. Έστω X_i Τ.Μ. Bernoulli που περιγράφουν τι ψηφίζουν οι ψηφοφόροι. Κατά τα γνωστά:

$$\begin{aligned} P\left(0.245 \leq \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \leq 0.255\right) &= P\left(\frac{0.245N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^N X_i - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{0.255N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) \\ = \Phi\left(\frac{\sqrt{N}(0.255-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}(0.245-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) &= \Phi\left(\frac{\sqrt{N}\times 0.005}{\sqrt{\frac{3}{16}}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{N}\times 0.005}{\sqrt{\frac{3}{16}}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{0.02\sqrt{N}}{\sqrt{3}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Στο exit poll έχουμε $N = 10^4$, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$p_1 = 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 1 \simeq 0.7518,$$

ενώ στις κανονικές εκλογές έχουμε $N = 10^6$, επομένως έχουμε

$$p_2 = 2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) - 1 \simeq 1.$$

67. **(Τσικνοπέμπτη)** Ένα σουβλατζίδικο έχει 100 τραπέζια 4 θέσεων. Σε κάθε ένα από αυτά, $i, i = 1, 2, \ldots$, κάθεται ένα τυχαίο πλήθος από άτομα X_i για το οποίο ισχύει ότι

$$P(X_i = 2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i = 3) = P(X_4 = 4) = \frac{1}{4}.$$

(α΄) Να υπολογίσετε τα $E(X_i)$ και $E(X_i^2)$.

(β΄) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα σε μια μέρα να έρθουν άνω των 280 ατόμων;

(γ΄) Αν ο εστιάτορας κάθετε απειλητικά στην είσοδο και δεν αφήνει ομάδες των δύο ατόμων να καθίσουν, αλλά και πάλι γεμίσουν τα τραπέζια, κατά μέσο όρο πόσοι περισσότεροι θα καθίσουν;

Λύση:

(α΄) Έστω X το πλήθος σε κάποιο τραπέζι. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4}, \\ E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{33}{4}, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{33}{4} - \frac{121}{16} = \frac{132 - 121}{16} = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

(β΄) Κατά τα γνωστά από Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 280\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 275}{10\sqrt{\frac{11}{16}}} > \frac{5}{10\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{10\sqrt{\frac{11}{16}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, η μέση τιμή των ατόμων σε κάθε τραπέζι είναι

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 = \frac{7}{2},$$

δηλαδή $\frac{7}{2} - \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$ παραπάνω άτομα ανά τραπέζι. Στο σύνολο, κατά μέσο όρο, αρχικά είχαμε $100 \times \frac{11}{4} = 275$ άτομα, και πλέον έχουμε $100 \times \frac{7}{2} = 350$ άτομα, δηλαδή 75 άτομα επιπλέον.

68. **(Καφετέρια)** Κάθε πελάτης μιας καφετέριας αγοράζει (α) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα κουλούρι, με 1 ευρώ, (β) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα καφέ, με 2 ευρώ, ή (γ) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ ένα κουλούρι και ένα καφέ, δίνοντας συνολικά 3 ευρώ.

(α΄) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την διασπορά των χρημάτων που αφήνει ο κάθε πελάτης.

(β΄) Αν έρθουν 100 πελάτες, ποια είναι η πιθανότητα η συνολική είσπραξη να υπερβεί τα 190 ευρώ?

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 = 2, \\ E(X^2) &= \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 3^2 = \frac{14}{3}, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{14}{3} - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(β΄) Με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, έχουμε

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 190\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 2}{\sqrt{100}\sqrt{\frac{2}{3}}} > \frac{190 - 100 \times 2}{\sqrt{100}\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) = 1 - \Phi\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0.8897.$$

69. **(Σεισμοί)** Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα, κάνοντας όπου χρειάζεται αιτιολογημένες προσεγγίσεις.

(α΄) Σε έναν οικισμό, A, με 10^4 πέτρινα σπίτια, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 2600 σπίτια;

(β΄) Σε ένα άλλο οικισμό, B, με επίσης 10^4 σπίτια αλλά από τούβλα και τσιμέντο, λόγω ενός σεισμού κάθε σπίτι θα καταρρεύσει με πιθανότητα $\frac{1}{4000}$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Ποια είναι η πιθανότητα να καταρρεύσουν το πολύ 3 σπίτια;

(γ΄) Σε ένα τρίτο οικισμό, C, με επίσης 10^4 σπίτια, αλλά κάθε ένα είναι χτισμένο από πέτρα με πιθανότητα 0.5 ή από τούβλα και τσιμέντο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τα άλλα. Οι πιθανότητες να γκρεμιστούν λόγω σεισμού τα δύο είδη σπιτιών δίνονται στα προηγούμενα σκέλη. Ποια είναι η πιθανότητα να γκρεμιστούν το πολύ 1300 σπίτια;

Λύση:

(α΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 10000$, Τ.Μ. Bernoulli που ισούται με 1 αν γκρεμιστεί το αντίστοιχο σπίτι, και 0 αλλιώς. Έχουμε $\mu = E(X_i) = \frac{1}{4}$ και $\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$. Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{10^4} X_i < 2600\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} X_i - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}} < \frac{2600 - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{100}{100\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε $N = 10^4$ ανεξάρτητα πειράματα καθένα με επιτυχία (δηλαδή να γκρεμιστεί το σπίτι) $p = \frac{1}{4000}$, επομένως $Np = 2.5$, που είναι κοντά στη μονάδα, επομένως το πλήθος των σπιτιών που θα γκρεμιστούν ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = 2.5$, και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3\right) \simeq 0.2138.$$

(γ΄) Έστω τυχαία επιλεγμένο σπίτι. Έστω A το ενδεχόμενο να γκρεμιστεί, και έστω B το ενδεχόμενο να είναι από πέτρα. Θα έχουμε, από τον κανόνα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B') = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4000} \times \frac{1}{2} \simeq \frac{1}{8}.$$

Παρόμοια με το πρώτο σκέλος, έστω X_i, $i = 1, \ldots, 10000$, Τ.Μ. Bernoulli που ισούται με 1 αν γκρεμιστεί το αντίστοιχο σπίτι, και 0 αλλιώς. Έχουμε, σε αυτό το σκέλος $\mu = E(X_i) = \frac{1}{8}$ και $\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{8} \times \frac{7}{8}$. Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα,

$$P\left(\sum_{i=1}^{10^4} X_i < 1300\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} X_i - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}} < \frac{1300 - 10^4\mu}{\sqrt{10^4\sigma^2}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{50}{100\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right).$$

70. **(Σουβλάκια και Μπύρες)** Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ X σουβλάκια και Y μπύρες, όπου X, Y διακριτές Τ.Μ. Όταν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, οι X, Y δίνονται από την κάτω αριστερά από κοινού μάζα, ενώ όταν δεν είναι σε φόρμα, από την κάτω δεξιά από κοινού μάζα:

x \ y	1	2	3
3	1/12	1/12	1/4
4	1/12	1/4	1/4

x \ y	1	2	3
3	1/6	1/6	1/6
4	1/6	1/6	1/6

Ο Σταύρος είναι κάθε βράδυ σε φόρμα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από τα άλλα βράδια.

(α΄) Με δεδομένο ότι ο Σταύρος έφαγε ένα βράδυ 4 σουβλάκια, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν σε φόρμα εκείνο το βράδυ;

(β΄) Ποιες είναι οι μάζες πιθανότητας των Τ.Μ. X και Y, αν δεν γνωρίζουμε αν ο Σταύρος είναι σε φόρμα, αλλά μόνο την πιθανότητα να είναι σε φόρμα;

(γ΄) Αν κάθε σουβλάκι έχει 600 θερμίδες και κάθε μπύρα έχει 200 θερμίδες, κατά μέσο όρο πόσες θερμίδες καταναλώνει ο Σταύρος κάθε βράδυ;

(δ΄) Ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητα ο Σταύρος να καταναλώσει πάνω από 350 σουβλάκια σε 100 διαδοχικά βράδια;

Λύση:

(α΄) Έστω A το ενδεχόμενο εκείνο το βράδυ ο Σταύρος να ήταν σε φόρμα, και C το ενδεχόμενο να έφαγε 4 σουβλάκια. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Bayes,

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C|A)P(A) + P(C|A')P(A')} = \frac{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{7}{25}.$$

(β΄) Έστω A το ενδεχόμενο ο Σταύρος να είναι σε φόρμα. Έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= P(X=3|A)P(A) + P(X=3|A')P(A') = \frac{5}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{48}, \\
P(X=4) &= P(X=4|A)P(A) + P(X=4|A')P(A') = \frac{7}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{25}{48}, \\
P(Y=1) &= P(Y=1|A)P(A) + P(Y=1|A')P(A') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24}, \\
P(Y=2) &= P(Y=2|A)P(A) + P(Y=2|A')P(A') = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3}, \\
P(Y=3) &= P(Y=3|A)P(A) + P(Y=3|A')P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(γ΄) Ο Σταύρος καταναλώνει κάθε βράδυ κατά μέσο όρο

$$\begin{aligned}
E(600X + 200Y) &= 600E(X) + 200E(Y) \\
&= 600\left(3 \times \frac{23}{48} + 4 \times \frac{25}{48}\right) + 200\left(1 \times \frac{7}{24} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{3}{8}\right) = 2529.2
\end{aligned}$$

θερμίδες.

(δ΄) Τα σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος σε ένα βράδυ έχουν μέση τιμή και διασπορά που υπολογίζονται, κατά τα γνωστά, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E(X) &= 3\times\frac{23}{48}+4\times\frac{25}{48}=3.5208,\\ E(X^2) &= 3^2\times\frac{23}{48}+4^2\times\frac{25}{48}=12.6458,\\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=0.2498. \end{aligned}$$

Έστω X_i το πλήθος από σουβλάκια που θα φάει ο Σταύρος το βράδυ i, $i=1,\ldots,100$. Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ.,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i>350\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100E(X)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}}>\frac{350-100E(X_i)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}}\right)\\ &\simeq 1-\Phi\left(\frac{350-100E(X_i)}{\sqrt{100\mathrm{VAR}(X_i)}}\right)=0.6614 \end{aligned}$$

71. **(Ανθοδέσμες)** Κάθε μέρα ο Ρωμαίος αγοράζει μια ανθοδέσμη για την Ιουλιέτα. Υπάρχουν 5 είδη από ανθοδέσμες, με αντίστοιχες τιμές 1, 2, 4, 7 και 16 φιορίνια. Ο Ρωμαίος αγοράζει ανθοδέσμη ενός είδους στην τύχη, χωρίς ιδιαίτερη προτίμηση στο είδος, ανεξάρτητα από μέρα σε μέρα, για 6 μήνες (180 ημέρες).

(α΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει ξοδέψει συνολικά περισσότερες από χίλια φιορίνια για ανθοδέσμες σ' αυτούς τους 6 μήνες.

(β΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει αγοράσει την ακριβή ανθοδέσμη που κάνει 16 φιορίνια συνολικά λιγότερες από 30 φορές σ' αυτούς τους 6 μήνες.

Λύση:

(α΄) Το φιορίνια που δίνει ο Ρωμαίος την ημέρα i για αγορά ανθοδέσμης είναι μια τυχαία μεταβλητή X_i με μέση τιμή

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{5}+16\times\frac{1}{5}=6.$$

Επίσης,

$$E(X_i^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{1}{5}+16^2\times\frac{1}{5}=\frac{326}{5},$$

άρα

$$\mathrm{VAR}(X_i)=\frac{326}{5}-6^2=29.2.$$

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{180}X_i>1000\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{180}X_i-180\times 6}{\sqrt{180\times 29.2}}>\frac{1000-180\times 6}{\sqrt{180\times 29.2}}\right)\\ &\simeq P\left(Z>-1.1035\right)=1-\Phi\left(-1.1035\right)=0.8651. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

(β΄) Έστω η Τ.Μ. Bernoulli Y_i που είναι 1 αν ο Ρωμαίος αγόρασε την ακριβή ανθοδέσμη την ημέρα i και 0 αλλιώς. Έχουμε, κατά τα γνωστά από τις Τ.Μ. Bernoulli,

$$E(Y_i)=\frac{1}{5},\quad \mathrm{VAR}(Y_i)=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογισθεί ως

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{180}Y_i<30\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{30}Y_i-180\times\frac{1}{5}}{\sqrt{180\times\frac{4}{5}}}<\frac{30-180\times\frac{1}{5}}{\sqrt{180\times\frac{4}{25}}}\right)\\ &\simeq P\left(Z<\frac{30-180\times\frac{1}{5}}{\sqrt{180\times\frac{4}{25}}}\right)=P(Z<-1.1180)=\Phi(-1.1180)=0.1318. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

72. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι κάποιος φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.

(α΄) Αν η κάθε ερώτηση έχει 65 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια καλή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.

(β΄) Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.

Λύση:

(α΄) Έχουμε 110 πειράματα, όλα με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{65}$, καθένα εκ των οποίων είναι επιτυχία ανεξάρτητα από τα άλλα, επομένως η πιθανότητα ο φοιτητής να έχει ακριβώς 2 απαντήσεις σωστές είναι, σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή,

$$\binom{110}{2} p^2 (1-p)^{108} \simeq 0.2659.$$

Επειδή, πάντως, το πλήθος των πειραμάτων είναι μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας σε καθένα από αυτά είναι μικρή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με την κατανομή Poisson με $\lambda = 110 \times \frac{1}{65}$, επομένως προσεγγιστικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \simeq 0.2636.$$

Πράγματι, παρατηρήστε ότι αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά καλή.

(β΄) Οι βαθμοί που παίρνει ο φοιτητής στην ερώτηση i είναι μια τυχαία μεταβλητή X_i που λαμβάνει την τιμή 10 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και την τιμή -3 με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 10 \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \\ E(X_i^2) &= 10^2 \times \frac{1}{4} + (-3)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{127}{4}, \\ \mathrm{VAR}(X_i) &= \frac{127}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{507}{16} \simeq 31.6875. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ισούται με

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{i=1}^{110} X_i > 0\right] &= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{110} X_i - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}} > \frac{0 - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right] \\ &\simeq P\left[Z > -\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right) = 1 - \Phi(0.4658) \simeq 0.6793. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

73. **(Διόρθωση γραπτών)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων, τα γραπτά των φοιτητών ανήκουν σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

(α΄) Ένα γραπτό είναι λευκή κόλλα με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και ο διδάσκοντας βάζει βαθμό 0, και χρειάζεται 12 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τη διόρθωση.

(β΄) Ένα γραπτό δεν είναι λευκή κόλλα αλλά έχει έκταση λιγότερη από 2 σελίδες, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα τετράπλευρο ζάρι και βάζει ως βαθμό το αποτέλεσμα X της ζαριάς, με το X να λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, 4$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 20 δευτερόλεπτα.

(γ΄) Για τα υπόλοιπα γραπτά, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα εξάπλευρο ζάρι και βάζει βαθμό $4+Y$, όπου Y είναι το αποτέλεσμα της ζαριάς και λαμβάνει τιμές $Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 30 δευτερόλεπτα.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας και η μέση τιμή του βαθμού Z ενός φοιτητή;

(β΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου W για να διορθωθεί ένα γραπτό;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο διδάσκοντας να διορθώσει μέσα σε 2 ώρες τουλάχιστον 320 γραπτά; (Αγνοούμε τους χρόνους μετάβασης από γραπτό σε γραπτό και άλλους χρόνους πέραν αυτών της διόρθωσης, και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διόρθωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.)

Λύση:

(α΄) Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό 0 αν παραδώσει λευκή κόλλα, δηλαδή με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 1, 2, 3, 4$ αν παραδώσει γραπτό που δεν είναι λευκό αλλά με λιγότερες από 2 σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, και επιπλέον το ζάρι φέρει z, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Επομένως, η πιθανότητα $P(Z = z)$ είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Τέλος, ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, αν το γραπτό του είναι 2 ή περισσότερες σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, και επιπλέον το ζάρι έρθει $z - 4$, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Άρα, ο βαθμός θα είναι z με πιθανότητα $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. Συγκεντρωτικά,

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & z = 0, \\ \frac{1}{8}, & z = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{18}, & z = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

Επομένως, η μέση τιμή $E(Z)$ της βαθμολογίας Z είναι

$$E(Z) = \sum_{z=0}^{10} z p_Z(z) = 0 \times \frac{1}{6} + (1 + 2 + 3 + 4) \times \frac{1}{8} + (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \times \frac{1}{18} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

(β΄) Με πιθανότητα $\frac{1}{6}$ ο διδάσκοντας θα χρειαστεί 12 δευτερόλεπτα για να διορθώσει το γραπτό, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα χρειαστεί 20 δευτερόλεπτα, και με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ θα χρειαστεί 30 δευτερόλεπτα. Επομένως,

$$p_W(12) = \frac{1}{6}, \qquad p_W(20) = \frac{1}{2}, \qquad p_W(30) = \frac{1}{3},$$

και

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{3} \times 30 = 22, \\ E(W^2) &= \frac{1}{6} \times 144 + \frac{1}{2} \times 400 + \frac{1}{3} \times 900 = 524. \\ \mathrm{VAR}(W) &= E(W^2) - (E(W))^2 = 524 - 484 = 40. \end{aligned}$$

(γ΄) Έστω W_i, $i = 1, 2, \ldots$ οι χρόνοι διόρθωσης των διαδοχικών γραπτών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{320} W_i \leq 7200\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{320} W_i - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}} \leq \frac{7200 - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}}\right) \\ &\simeq P\left(Z \leq \frac{160}{10\sqrt{128}}\right) = P\left(Z \leq \sqrt{2}\right) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) \simeq 0.9214. \end{aligned}$$

74. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

Λύση: Έστω οι 1000 Τ.Μ. Bernoulli X_i, $i = 1, \ldots, 1000$, τέτοιες ώστε $X_i = 1$ αν έρθει ο i-οστός Ζυγοβιστινός, και $X_i = 0$ αν δεν έρθει. Έχουμε $E(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ και $\mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ επομένως η τυπική απόκλιση των X_i ισούται με $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}(X_i)} = \frac{1}{2}$.

Έστω πως ο έφορος της εκκλησίας προμηθεύεται K καρέκλες. Τότε, η πιθανότητα να μην επαρκούν οι καρέκλες ισούται με

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma} > \frac{K - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}} > \frac{K - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{K-500}{5\sqrt{10}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{K-500}{5\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο αριθμός K πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$1 - \Phi\left(\frac{K-500}{5\sqrt{10}}\right) < 0.01 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0.99) < \frac{K-500}{5\sqrt{10}} \Leftrightarrow K > 500 + 5\sqrt{10}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 536.78,$$

και επειδή το K πρέπει να είναι ακέραιο, προκύπτει ότι ο έφορος πρέπει να αγοράσει 537 καρέκλες. Στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση Φ, άρα και η αντίστροφή της Φ^{-1}, είναι γνησίως αύξουσες.

Μία ελαφρώς καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει αν αρχικά προσεγγίζαμε την $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K + \frac{1}{2}\right)$. (Μπορείτε να καταλάβετε γιατί;) Θα προέκυπτε τότε ότι $K + \frac{1}{2} > 536.78 \Leftrightarrow K > 536.28$, επομένως και πάλι $K = 537$.

Χωρίς την προσέγγιση, αλλά με χρήση υπολογιστή, προκύπτει πως πράγματι ο $K = 537$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διωνυμικής με παραμέτρους N και p υπερβαίνει το 0.99. Επομένως, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν εισήγαγε κάποιο σφάλμα.