ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2025-2026
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Τρία ενδεχόμενα)** Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Βρείτε κατάλληλες εκφράσεις για τα ενδεχόμενα:

   (α΄) Πραγματοποίηση μόνο του B.

   (β΄) Πραγματοποιήθηκαν το A και το B αλλά όχι το C.

   (γ΄) Τουλάχιστον ένα από τα συγκεκριμένα ενδεχόμενα πραγματοποιείται.

   (δ΄) Τουλάχιστον δύο από τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ε΄) Και τα τρία ενδεχόμενα πραγματοποιούνται.

   (ς΄) Κανένα από τα ενδεχόμενα δεν πραγματοποιείται.

   (ζ΄) Το πολύ ένα πραγματοποιείται.

   (η΄) Το πολύ δύο πραγματοποιούνται.

   Λύση:

   (α΄) $A'BC'$.

   (β΄) ABC'.

   (γ΄) $A \cup B \cup C$.

   (δ΄) $AB \cup AC \cup BC$.

   (ε΄) ABC.

   (ς΄) $A'B'C' = (A \cup B \cup C)'$.

   (ζ΄) $A'B'C' \cup AB'C' \cup A'BC' \cup A'B'C = (AB \cup AC \cup BC)'$.

   (η΄) $(ABC)' = A' \cup B' \cup C'$.

2. **(Άσπρες και μαύρες μπάλες)** Ένα κουτί περιέχει μια άσπρη μπάλα και 3 πανομοιότυπες μαύρες μπάλες.

   (α΄) Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη και χωρίς να την ξαναβάλουμε στο κουτί επιλέγουμε άλλη μία (δηλαδή έχουμε επιλογή χωρίς επανατοποθέτηση). Περιγράψτε τον δειγματικό χώρο Ω_1 αυτού του πειράματος.

   (β΄) Αν η επιλογή άσπρης μπάλας μας δίνει κέρδος 10 Ευρώ και η επιλογή μαύρης μπάλας μας δίνει κέρδος 5 Ευρώ, περιγράψτε το ενδεχόμενο συνολικά στις δύο επιλογές να κερδίσουμε 10 Ευρώ.

   (γ΄) Αν, αφού επιλέξουμε την πρώτη μπάλα, την ξαναβάλουμε στο κουτί πριν επιλέξουμε τη δεύτερη, έχουμε επιλογή *με επανατοποθέτηση*, και προκύπτει ένα διαφορετικό πείραμα. Περιγράψτε τον δειγματικό χώρο Ω_2 αυτού του πειράματος, και το ενδεχόμενο συνολικά στις δύο επιλογές να κερδίσουμε 15 Ευρώ.

   Λύση:

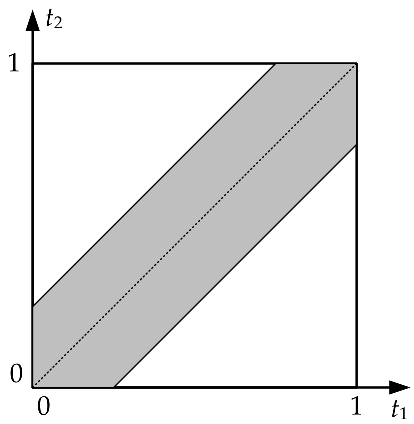
   (α΄) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο $\Omega_1 = \{AM, MA, MM\}$.

   Στην απάντησή μας, υποθέσαμε ότι οι μαύρες είναι πανομοιότυπες, δεν μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τους. Αν μπορούσαμε να τις διακρίνουμε, τότε ο δειγματικός χώρος θα ήταν ο

$$\begin{aligned} \Omega_1' = \{&AM_1, AM_2, AM_3, M_1A, M_2A, M_3A, M_1M_2, \\ &M_1M_3, M_2M_1, M_2M_3, M_3M_1, M_3M_2\}. \end{aligned}$$

   (β΄) Το ενδεχόμενο να κερδίσουμε συνολικά 10 Ευρώ είναι προφανώς το $A = \{MM\}$.

   (γ΄) Ο νέος δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega_2 = \{AM, MA, AA, MM\}$, και το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $B = \{AM, MA\}$.



Σχήμα 1: Άσκηση 3.

3. **(Διπλά τυχαία συνάντηση)** Ο Σταύρος και ο Γιάννης έχουν δώσει ραντεβού σε ένα μπαρ, και έχουν συμφωνήσει να συναντηθούν εντός μιας συγκεκριμένης ώρας. Καθένας όμως μπορεί να έρθει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα σε αυτήν την ώρα, χωρίς να δείχνει κάποια προτίμηση σε κάποια στιγμή ή εύρος στιγμών, και χωρίς να επηρεάζεται από το τι θα κάνει ο άλλος. Μοντελοποιήστε τον δειγματικό χώρο αυτού του πειράματος, ορίστε κάποιο μέτρο πιθανότητας που να συμφωνεί με το πραγματικό πρόβλημα, και ακολούθως χρησιμοποιήστε αυτό το μέτρο για να υπολογίσετε ποια είναι η πιθανότητα να μην περιμένει ο πρώτος που θα έρθει τον δεύτερο για περισσότερο από ένα τέταρτο της ώρας. *Υπόδειξη: Μελετήστε το τετράγωνο* $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

   Λύση: Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ζεύγη της μορφής (x,y), όπου $x, y \in [0,1]$, δηλαδή είναι το τετράγωνο του επιπέδου μεταξύ 0 και 1: $\Omega = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

   Η υπόθεσή μας ότι οι φίλοι δεν έχουν προτίμηση στην στιγμή που θα έρθουν, εντός της ώρας, μεταφράζεται στο ότι όλα τα ζεύγη τιμών έχουν την ίδια πιθανότητα. Παρατηρήστε ότι αναγκαστικά αυτό σημαίνει ότι όλα τα ζεύγη τιμών έχουν πιθανότητα ακριβώς 0, αλλιώς έχουμε άτοπο, γιατί το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των αποτελεσμάτων θα είναι άπειρο και όχι 1.

   Για να μπορέσουμε να λύσουμε την άσκηση, κάνουμε και την επιπλέον υπόθεση ότι ένα σύνολο σημείων έχει πιθανότητα να προκύψει ίση με το εμβαδόν του. Πράγματι, αυτός ο κανόνας δίνει στο τετράγωνο πιθανότητα 1, και ικανοποιεί και την διαίσθησή μας σχετικά με το ότι όλα τα ζεύγη τιμών προτιμώνται εξίσου από τους δύο φίλους. Με αυτή την υπόθεση, εύκολα προκύπτει ότι η πιθανότητα να μην περιμένει ο ένας τον άλλο για πάνω από ένα τέταρτο της ώρας ισούται με το σκιασμένο εμβαδόν του Σχήματος 1, το οποίο είναι ίσο (γιατί;) με $1 - 2(1/2)(3/4)(3/4) = 7/16$.

4. **(Πρόβλημα Γαλιλαίου)** Ρίχνουμε διαδοχικά 3 συνηθισμένα ζάρια. Θεωρούμε ότι τα $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10;

   Λύση: Υπάρχουν συνολικά $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, και υποθέτουμε ότι είναι όλα ισοπίθανα. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες, πρέπει να βρούμε από πόσα αποτελέσματα αποτελείται καθένα από τα δύο ενδεχόμενα.

   (α΄) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο A είναι το ακόλουθο:

$$A = \{126, 216, 135, 225, 315, 144, 234, 324, 414, 153, 243, 333, 423,$$
$$513, 162, 252, 342, 432, 522, 612, 261, 351, 441, 531, 621\}.$$

   Καθώς υπάρχουν 25 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως το ενδεχόμενο B είναι το ακόλουθο:

$$B = \{136, 226, 316, 145, 235, 325, 415, 154, 244, 334, 424, 514, 163, 253, 343, 433, 523, 613, 262, 352, 442, 532, 622, 361, 451, 541, 631\}.$$

Καθώς υπάρχουν 27 αποτελέσματα, όλα ισοπίθανα, και καθένα με πιθανότητα $1/216$, προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{27}{216}.$$

5. **(Τρεις σφαίρες)** Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη (R) μία μπλε (B) και μία πράσινη (G) σφαίρα. Θεωρήστε ένα πείραμα κατά το οποίο επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί, και αφού την επανατοποθετήσουμε στο κουτί επιλέγουμε τυχαία άλλη μία σφαίρα. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος; Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, ποια είναι η πιθανότητα εκλογής μίας τουλάχιστον κόκκινης σφαίρας στις δύο δοκιμές; Απαντήστε τα άνω εκ νέου, υποθέτοντας ότι η πρώτη σφαίρα δεν επανατοποθετείται στο κουτί.

Λύση: Ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega_1 = \{RR, RB, RG, BR, BB, BG, GR, GB, GG\}.$$

Επειδή όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα, το ενδεχόμενο $A_1 = \{RR, RB, RG, BR, GR\}$ έχει πιθανότητα

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{5}{9}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρώτη σφαίρα δεν επανατοποθετείται στο κουτί. Ο νέος δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega_2 = \{RB, RG, BR, BG, GR, GB\}.$$

Επειδή όλα τα αποτελέσματα έχουν την ίδια πιθανότητα, το ενδεχόμενο $A_2 = \{RB, RG, BR, GR\}$ έχει πιθανότητα

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

6. **(Παιχνίδι)** Δύο παίκτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: Ένα δίκαιο κέρμα ρίχνεται 3 φορές. Έπειτα, ρίχνεται ένα δίκαιο ζάρι. Κερδίζει ο παίκτης A όταν το πλήθος των φορών που εμφανίστηκαν κορώνες και το αποτέλεσμα του ζαριού είναι και οι δύο ζυγοί ή και οι δύο μονοί αριθμοί. Σε διαφορετική περίπτωση, κερδίζει ο παίκτης B. (Π.χ., κερδίζει ο B εάν έρθουν 2 κορώνες και το ζάρι είναι 5.)

Προτείνετε ένα δειγματικό χώρο και μέτρο πιθανότητας που να αναπαριστά το παιχνίδι αυτό, και υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος. Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

Λύση: Ο πιο προφανής δειγματικός χώρος είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

όπου το H συμβολίζει τις κορώνες, το T τα γράμματα, το HHT να έρθουν πρώτα 2 κορώνες και μετά μια φορά γράμματα, κ.ο.κ. Το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι $|\Omega| = 8 \times 6 = 48$. Υποθέτοντας ότι κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο, προκύπτει πως το κάθε αποτέλεσμα θα έχει πιθανότητα $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{48}$.

Σχετικά με το αν το παιχνίδι είναι δίκαιο, έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο παίκτης A. Παρατηρήστε πως

$$A = \Big(\{HHT, HTH, THH, TTT\} \times \{2, 4, 6\}\Big) \bigcup \Big(\{HHH, HTT, THT, TTH\} \times \{1, 3, 5\}\Big),$$

που αποτελείται από $4 \times 3 + 4 \times 3 = 24$ ενδεχόμενα, άρα $P(A) = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ και το παιχνίδι είναι δίκαιο.

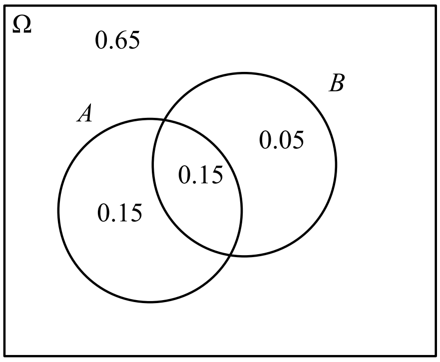
7. **(Χρήση ιδιοτήτων πιθανοτήτων)** Έστω ότι για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB), \qquad P(A'B) = 0.05.$$

(α΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$.

(β΄) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων $A \cup B$, $A'B'$, AB', $AB' \cup A'B$, $A \cup B'$, $A' \cup B$.

Λύση:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα Venn της Άσκησης 7.

(α΄) Κατά τα γνωστά, $P(A'B) = P(B) - P(AB)$, και επομένως

$$P(B) - P(AB) = 0.05 \Rightarrow P(B) - \frac{3}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow \frac{1}{4}P(B) = 0.05 \Rightarrow P(B) = 0.2.$$

Άρα, $P(A) = \frac{3}{2}P(B) = 0.3$, $P(AB) = \frac{3}{4}P(B) = 0.15$.

(β΄) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.2 - 0.15 = 0.35, \\
P(A'B') &= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65, \\
P(AB') &= P(A) - P(AB) = 0.3 - 0.15 = 0.15, \\
P(AB' \cup A'B) &= P(AB') + P(A'B) - P(AB'A'B) = 0.15 + 0.05 - 0 = 0.2, \\
P(A \cup B') &= P((A'B)') = 1 - P(A'B) = 1 - 0.05 = 0.95, \\
P(A' \cup B) &= P((AB')') = 1 - P(AB') = 1 - 0.15 = 0.85.
\end{aligned}$$

8. **(Εισόδημα)** Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο από μία περιοχή και καταγράφουμε το εισόδημά του. Έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να έχει εισόδημα πάνω από 600 Ευρώ είναι 90% ενώ η πιθανότητα να έχει εισόδημα μικρότερο των 1200 Ευρώ είναι 70%. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει εισόδημα μεγαλύτερο των 600 και μικρότερο των 1200 Ευρώ.

   Λύση: Θέτουμε $\Omega = [0, \infty)$. Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A = (600, \infty)$= «εισόδημα μεγαλύτερο των 600 Ευρώ» και $B = [0, 1200)$=«εισόδημα μικρότερο των 1200 Ευρώ» τότε γνωρίζουμε ότι $P(A) = 0.9$ και $P(B) = 0.7$. Ζητείται ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(A \cap B)$. Έχουμε:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\Omega) = 0.9 + 0.7 - 1 = 0.6.$$

9. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

   Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

   Λύση: Σχετικά με την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

   Σχετικά με την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
&1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)'\right) = P\left(A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'\right) \\
&\quad \leq P(A_1') + P(A_2') + \cdots + P(A_n') = (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) + \cdots + (1 - P(A_n)) \\
&\quad = n - P(A_1) - P(A_2) - \cdots - P(A_n),
\end{aligned}$$

   και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα άνω βήματα.)

2η Ομάδα Ασκήσεων

10. **(Άσοι)** Μοιράζουμε στην τύχη 10 φύλλα από μια συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων. Ποια η πιθανότητα να περιέχει η μοιρασιά:

   (α΄) κανέναν άσσο;

   (β΄) το πολύ τρεις άσσους;

   (γ΄) τουλάχιστον έναν άσο και τουλάχιστον μια φιγούρα (δηλαδή βαλέ, ντάμα, ή ρήγα);

   Λύση:

   Για να απαντήσουμε τα άνω ερωτήματα, καταρχάς παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προβλήματος περιλαμβάνει όλες τις δυνατές (μη διατεταγμένες) 10άδες φύλλων που μπορούν να επιλεγούν από 52 φύλλα, οπότε $|\Omega| = \binom{52}{10} = \frac{52!}{(52-10)!10!} = 15,820,024,220$. Ακολούθως έχουμε:

   (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί κανένας άσσος. Υπάρχουν $\binom{48}{10}$ τρόποι με τους οποίους μπορεί να σχηματισθεί το A, ένας για κάθε μια επιλογή των 10 φύλλων από τα υπόλοιπα 48. Συνεπώς, $P(A) = \binom{48}{10}/\binom{52}{10} \simeq 0.41$.

   (β΄) Έστω B το ενδεχόμενο να πάρουμε το πολύ τρεις άσσους. Το ενδεχόμενο B' περιέχει όλες τις μοιρασιές στις οποίες πήραμε και τους 4 άσσους, και ο υπολογισμός της πιθανότητας του είναι απλούστερος. Πράγματι, υπάρχουν $\binom{4}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τους 4 άσσους και $\binom{48}{6}$ τρόποι να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 6 φύλλα. Συνεπώς,

   $$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{6}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.992.$$

   (γ΄) Έστω C το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον ένα άσο. Έστω D το ενδεχόμενο να πάρουμε τουλάχιστον μια φιγούρα. Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχόμενου $C \cap D$. Για να την υπολογίσουμε, παρατηρούμε ότι:

   $$\begin{aligned} P(C \cap D) &= 1 - P(C' \cup D') = 1 - P(C') - P(D') + P(C' \cap D') \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{10} + \binom{12}{0}\binom{40}{10} - \binom{4}{0}\binom{12}{0}\binom{36}{10}}{\binom{52}{10}} \simeq 0.55. \end{aligned}$$

   Εναλλακτικά, το ενδεχόμενο $C \cap D$ μπορεί να γραφεί ως

   $$C \cap D = \bigcup_{\{i=1,\ldots,4,\ j=1,\ldots,9,\ i+j\leq 10\}} \text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες».} \tag{1}$$

   Τα ενδεχόμενα είναι ξένα, συνεπώς οι πιθανότητες τους μπορούν να προστεθούν για να προκύψει η πιθανότητα του C. Επιπλέον, οι πιθανότητές τους ισούνται με

   $$P(\text{«Λαμβάνονται } i \text{ άσοι και } j \text{ φιγούρες»}) = \frac{\binom{4}{i}\binom{12}{j}\binom{36}{10-i-j}}{\binom{52}{10}}, \tag{2}$$

   όπου $1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 9$. Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει η $P(C \cap D)$.

11. **(Seven Card Stud)** Κατά τα γνωστά, μια τράπουλα αποτελείται από $4 \times 13 = 52$ φύλλα, που χωρίζονται, με δύο διαφορετικούς τρόπους, σε 4 φυλές ($\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$) και 13 νούμερα $(A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K)$. Σε ένα παιχνίδι Seven Card Stud κάθε παίκτης λαμβάνει 7 φύλλα από μια τράπουλα.

   (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A ένας παίκτης να έχει 7 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα, 7 κούπες.)

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας παίκτης να έχει τουλάχιστον 5 φύλλα της ίδιας φυλής; (Για παράδειγμα 5,6 ή 7 κούπες).

   (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου C ένας παίκτης να έχει τρία ζεύγη αλλά καμία τριάδα ή τετράδα; (Ένα αποτέλεσμα που ανήκει στο ενδεχόμενο είναι να έχει τα φύλλα $(3\spadesuit, 3\heartsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, 8\spadesuit)$).

   Λύση:

(α΄) Συνολικά, οι συνδυασμοί φύλλων που μπορούμε να έχουμε είναι $\binom{52}{7}$. Οι συνδυασμοί φύλλων μιας συγκεκριμένης φυλής είναι $\binom{13}{7}$, και επειδή υπάρχουν 4 φυλές, τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A) = \frac{4\binom{13}{7}}{\binom{52}{7}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46} = \frac{4}{77963}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δεσμευμένες πιθανότητες. Μπορείτε να γράψετε την απόδειξη;

(β΄) Και πάλι, υπάρχουν $\binom{52}{7}$ συνδυασμοί φύλλων που μπορεί να έχει ένας παίκτης. Οι συνδυασμοί που περιλαμβάνουν ακριβώς 5 κούπες είναι $\binom{13}{5}\binom{39}{2}$, αφού έχουμε $\binom{13}{5}$ επιλογές για τις 5 κούπες, και $\binom{39}{2}$ για τα άλλα 2 φύλλα. Επειδή έχουμε 4 φυλές, προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν $4\binom{13}{5}\binom{39}{2}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 5 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Με παρόμοιο τρόπο, προκύπτει πως υπάρχουν $4\binom{13}{6}\binom{39}{1}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 6 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Στο άνω σκέλος, βρήκαμε πως υπάρχουν $4\binom{13}{7}\binom{39}{0} = 4\binom{13}{7}$ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν 7 ακριβώς φύλλα μιας φυλής. Άρα, τελικά

$$P(B) = \frac{4\binom{13}{5}\binom{39}{2} + 4\binom{13}{6}\binom{39}{1} + 4\binom{13}{7}\binom{39}{0}}{\binom{52}{7}} = \frac{208}{6805}.$$

(γ΄) Και πάλι, οι συνδυασμοί όλου του δειγματικού χώρου είναι $\binom{52}{7}$. Θα μετρήσουμε τους συνδυασμούς που αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο C. Έχουμε $\binom{13}{3}$ επιλογές για τα τρία ζεύγη που μπορούμε να έχουμε. Έχουμε επίσης $\binom{4}{2}$ για τα 2 από τα 4 φύλλα που θα απαρτίζουν το κάθε ζεύγος. Τέλος, έχουμε 40 επιλογές για το έβδομο φύλλο. Άρα τελικά

$$P(C) = \frac{40\binom{13}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{78}{4223}.$$

12. **(n ζευγάρια διαγωνιζόμενων)** Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια ατόμων. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, έτσι ώστε κάθε ένα άτομο να πάρει το πολύ ένα βραβείο, και χωρίς κάποια προτίμηση στα άτομα που θα πάρουν τα βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια;

Λύση: Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι με τους οποίους τα n βραβεία μπορούν να καταλήξουν στα $2n$ άτομα, αφού υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους n που θα πάρουν βραβείο. Επίσης, υπάρχουν 2^n τρόποι με τους οποίους κάθε ζευγάρι θα πάρει από ένα βραβείο. Πράγματι, υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος από το πρώτο ζευγάρι θα πάρει το πρώτο βραβείο, 2 επιλογές για το δεύτερο, κ.ο.κ., και το σύνολο των επιλογών είναι $2 \times 2 \times \ldots 2 = 2^n$. Προκύπτει τελικά πως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$2^n \Big/ \binom{2n}{n}.$$

13. **(n ζευγάρια κατασκόπων)** Από n ζευγάρια κατασκόπων ($2n$ συνολικά άτομα) διαλέγουμε στην τύχη $k \leq n$ άτομα για να τα συμπεριλάβουμε σε μία μυστική αποστολή, χωρίς κάποια προτίμηση σε άτομα. Ποια είναι η πιθανότητα

(α΄) να συμπεριληφθούν ακριβώς j άνδρες στην αποστολή; Προφανώς $0 \leq j \leq k$.

(β΄) να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στη αποστολή;

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{2n}{k}$ τρόποι για να φτιάξουμε την ομάδα των κατασκόπων που θα συμμετάσχουν στην μυστική αποστολή.

(α΄) Υπάρχουν $\binom{n}{j}$ συνδυασμοί να επιλεγούν οι j άντρες, και, για κάθε ένα από αυτούς τους συνδυασμούς, $\binom{n}{k-j}$ συνδυασμοί για να επιλεγούν οι $k-j$ γυναίκες που υπολείπονται. Επομένως, υπάρχουν $\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}$ τρόποι για να φτιάξουμε ομάδες με j άντρες, και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}\Big/\binom{2n}{k}.$$

(β΄) Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ συνδυασμοί με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τα k ζευγάρια ένα μέλος των οποίων θα συμμετάσχει. Για κάθε τέτοιο συνδυασμό, έχουμε 2 τρόπους να διαλέξουμε το μέλος του πρώτου ζευγαριού, 2 τρόπους να επιλέξουμε το μέλος του δεύτερου, κ.ο.κ., μέχρι το ζευγάρι k. Άρα, υπάρχουν $\binom{n}{k}2^k$ αποτελέσματα που δεν συμπεριλαμβάνουν άτομα του ίδιου ζευγαριού στην αποστολή, και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\binom{n}{k}2^k\Big/\binom{2n}{k}.$$

14. **(Παπουτσοθήκη)** Σε μια παπουτσοθήκη υπάρχουν 10 ζευγάρια παπούτσια, και συνεπώς συνολικά 20 παπούτσια. Ανοίγουμε την παπουτσοθήκη και παίρνουμε 4 παπούτσια, χωρίς προτίμηση στο συνδυασμό τους. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα στα 4 παπούτσια που πήραμε:

   (α΄) Να μην υπάρχει ούτε ένα ζευγάρι;

   (β΄) Να υπάρχει ακριβώς 1 ζευγάρι;

   (γ΄) Να υπάρχουν 2 ζευγάρια;

   Λύση: Έστω X το πλήθος από ζευγάρια παπουτσιών με το οποίο καταλήγουμε. Παρατηρούμε πως η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $0, 1, 2$. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες με τις οποίες λαμβάνει τις τιμές αυτές χρησιμοποιώντας συνδυαστική ανάλυση. Παρατηρούμε καταρχάς πως υπάρχουν 20 παπούτσια από τα οποία επιλέγονται τα 4, και επομένως υπάρχουν $\binom{20}{4}$ συνδυασμοί παπουτσιών που μπορεί να προκύψουν.

   (α΄) Μετράμε καταρχάς τους συνδυασμούς παπουτσιών στους οποίους δεν υπάρχει ζευγάρι. Υπάρχουν $\binom{10}{4}$ τρόποι να επιλεγούν τα ζευγάρια από τα οποία να επιλέξουμε ακριβώς ένα παπούτσι, και εκ των υστέρων έχουμε 2 επιλογές για το παπούτσι που θα πάρουμε από κάθε ένα από τα 4 ζευγάρια. Επομένως,

   $$P(X=0) = \frac{\binom{10}{4}2^4}{\binom{20}{4}} = \frac{224}{323}.$$

   (β΄) Μετράμε τώρα τους συνδυασμούς παπουτσιών που περιέχουν ένα ζευγάρι ακριβώς. Υπάρχουν 10 τρόποι να επιλέξουμε το ζευγάρι, $\binom{9}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα άλλα 2 ζευγάρια που θα εκπροσωπηθούν στην επιλογή μας, και για κάθε ένα από αυτά υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιο από τα 2 παπούτσια θα επιλεγεί. Τελικά,

   $$P(X=1) = \frac{10\binom{9}{2}2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{96}{323}.$$

   (γ΄) Τέλος, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\binom{10}{2}$ συνδυασμοί παπουτσιών που αποτελούνται από ακριβώς 2 από τα διαθέσιμα 10 ζευγάρια, και επομένως,

   $$P(X=2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323}.$$

15. **(Age of Empires Logic)** 20 πολεμικοί ελέφαντες και 30 πεζικάριοι επιχειρούν να επιβιβαστούν σε ένα αποβατικό σκάφος και από αυτούς επιλέγονται μόνο οι 10, χωρίς προτίμηση στο ποιοι θα επιβιβαστούν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλάχιστον 7 ελέφαντες;

   Λύση: Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 10 θέσεις για 50 «άτομα» (όπου ένα άτομο μπορεί να είναι πεζικάριος ή ελέφαντας), και επομένως ο δειγματικός χώρος έχει $\binom{50}{10}$ συνδυασμούς. Μετράμε καταρχάς τους συνδυασμούς με τους 7 ελέφαντες (και προφανώς 3 πεζικάριους). Έχουμε $\binom{20}{7}$ τρόπους για να διαλέξουμε τους 7 ελέφαντες από τους 20 διαθέσιμους, και μένουν 3 θέσεις που πρέπει να γεμίσουν με 3 από τους 30 πεζικάριους. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{30}{3}$ τρόπους, και τελικά υπάρχουν $\binom{20}{7}\binom{30}{3}$ συνδυασμοί με ακριβώς 7 ελέφαντες. Παρόμοια μπορεί να υπολογιστούν οι συνδυασμοί με 8, 9, 10 ελέφαντες, και τελικά το ενδεχόμενο A να υπάρχουν τουλάχιστον 7 ελέφαντες έχει πιθανότητα

   $$P(A) = \frac{\binom{20}{7}\binom{30}{3} + \binom{20}{8}\binom{30}{2} + \binom{20}{9}\binom{30}{1} + \binom{20}{10}}{\binom{50}{10}} \simeq 0.0365.$$

16. **(Βιβλία)** Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά 6 βιβλία μαθηματικών, 4 βιβλία φυσικής, 3 βιβλία ιστορίας, 5 βιβλία ξένων γλωσσών, και 2 λεξικά. Ποια είναι η πιθανότητα όλα τα βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

   Λύση: Υπάρχουν συνολικά 20 βιβλία, και 20! τρόποι με τους οποίους μπορούν να διαταχθούν. Η πιθανότητα να καταλήξουν όλα τα ομοειδή βιβλία μαζί μπορεί να υπολογιστεί αν μετρήσουμε πόσοι από τους 20! τρόπους διάταξης αντιστοιχούν σε αυτό το ενδεχόμενο. Παρατηρούμε ότι έχουμε καταρχάς 5! τρόπους για να βάλουμε τα 5 είδη βιβλίων στη σειρά. Για κάθε έναν από τους άνω τρόπους, έχουμε 6! επιλογές για το πως θα βάλουμε τα βιβλία μαθηματικών σε μια σειρά, 4! τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε τα βιβλία φυσικής στη σειρά, κ.ο.κ., και τελικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

   $$p = \frac{5!6!4!3!5!2!}{20!}.$$

17. **(Η άσκηση που έβαλα σε μια τελική εξέταση μια χρονιά που μιλούσαν οι φοιτητές πολύ στο αμφιθέατρο)** Κάποιος φοιτητής έχει εγγραφεί σε 4 μαθήματα και σχεδιάζει να αφιερώσει 10 ώρες μελέτης συνολικά πριν τις εξετάσεις. Έστω ότι κάθε μια από τις ώρες μελέτης αφιερώνεται σε ένα τυχαίο μάθημα από τα 4, με ίση πιθανότητα. Εάν κάθε μάθημα απαιτεί τουλάχιστον 2 ώρες μελέτης για επιτυχία στις εξετάσεις, υπολογίστε τις πιθανότητες των ενδεχομένων που ακολουθούν:

   (α΄) Αποτυχία σε όλα τα μαθήματα.

   (β΄) Επιτυχία ακριβώς σε 1 μάθημα.

   (γ΄) Επιτυχία ακριβώς σε 2 μαθήματα.

   (δ΄) Επιτυχία ακριβώς σε 3 μαθήματα.

   Παρατηρήστε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 4^{10} επαναληπτικές διατάξεις.

   Λύση: Έστω X το πλήθος των μαθημάτων στα οποία έχουμε επιτυχία. Παρατηρούμε πως ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 4^{10} επαναληπτικές διατάξεις, και στόχος μας είναι να μετρήσουμε πόσα αποτελέσματα αντιστοιχούν σε $0, 1, 2, 3$ περασμένα μαθήματα.

   (α΄) Καταρχάς παρατηρούμε πως επειδή έχουμε 4 μαθήματα και αρκούν 2 ώρες διαβάσματος για να περάσουμε το κάθε μάθημα, είναι βέβαιο πως με 10 ώρες διάβασμα θα περάσουμε τουλάχιστον ένα μάθημα. Επομένως,

$$P(X = 0) = 0.$$

   (β΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να επιτύχουμε σε ακριβώς ένα μάθημα. Θα μετρήσουμε τις επαναληπτικές διατάξεις που αντιστοιχούν σε αυτό το ενδεχόμενο. Καταρχάς, έχουμε 4 επιλογές για το μάθημα. Έχοντας επιλέξει το μάθημα, έχουμε 1 αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στο να διαβάζουμε μόνο αυτό, 10×3 αποτελέσματα που αντιστοιχούν στα να διαβάσουμε μόνο αυτό εκτός από 1 από τις 10 ώρες οπότε και θα διαβάσουμε ένα από τα 3 άλλα μαθήματα, $\binom{10}{2} \times 3 \times 2$ αποτελέσματα που να αντιστοιχούν στο να διαβάσουμε το μάθημα 8 ώρες και τις άλλες 2 να διαβάσουμε 2 διαφορετικά, και $\binom{10}{3} \times 3 \times 2 \times 1$ αποτελέσματα που αντιστοιχούν στο να διαβάσουμε το μάθημα 7 ώρες, και τις άλλες τρεις να διαβάσουμε καθένα από τα άλλα τρία για ακριβώς μια ώρα. (Παρατηρήστε ότι αν έχουμε επιτυχία μόνο σε ένα μάθημα, σίγουρα το έχουμε διαβάσει τουλάχιστον 7 ώρες.) Επομένως,

$$P(X = 1) = \frac{4 \times \left[1 + 10 \times 3 + \binom{10}{2} \times 3 \times 2 + \binom{10}{3} \times 3 \times 2\right]}{4^{10}} = \frac{4084}{4^{10}} \simeq 0.0039.$$

   (γ΄) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να επιτύχουμε σε ακριβώς δύο μαθήματα. Όπως και στο προηγούμενο σκέλος, θα μετρήσουμε πόσα αποτελέσματα (δηλαδή επαναληπτικές διατάξεις) αντιστοιχούν σε αυτό το ενδεχόμενο. Καταρχάς, έχουμε $\binom{4}{2}$ επιλογές για τα μαθήματα στα οποία θα επιτύχουμε. Έχοντας επιλέξει το ζεύγος, παρατηρούμε πως μπορεί αυτό το ζεύγος να εμφανιστεί μόνο του στη δεκάδα. Αυτό γίνεται με 2^{10} τρόπους, από τους οποίους πρέπει να αφαιρέσουμε ένα τρόπο που αντιστοιχεί στο να εμφανιστεί μόνο το πρώτο μέλος του ζεύγους, 1 τρόπο που αντιστοιχεί στο να εμφανιστεί μόνο το δεύτερο μέλος του ζεύγους, 10 τρόποι στους οποίους εμφανίζεται το πρώτο μέλος του ζεύγους μια φορά μόνο, και άλλοι 10 τρόποι στους οποίους εμφανίζεται το δεύτερο μέλος του ζεύγους μια φορά μόνο. Άρα τελικά υπάρχουν $2^{10} - 1 - 1 - 10 - 10$ τρόποι για να επιτύχουμε σε 2 μαθήματα, και να μην διαβάσουμε ούτε ώρα για κάποιο από τα άλλα 2. Υπάρχει περίπτωση όμως να επιτύχουμε στα δύο μαθήματα, και να έχουμε διαβάσει και ακριβώς μια ώρα ένα άλλο. Με παρόμοια συλλογιστική, αυτό γίνεται με $10 \times 2 \times (2^9 - 1 - 1 - 9 - 9) = 20 \times (2^9 - 20)$ τρόπους. Υπάρχει τέλος η περίπτωση να επιτύχουμε στα δύο μαθήματα και να έχουμε διαβάσει και άλλες δύο ώρες, από μια ώρα σε κάθε ένα από τα άλλα μαθήματα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{10}{2} \times 2 \times (2^8 - 1 - 1 - 8 - 8) = 90 \times (2^8 - 18)$ τρόπους. Τελικά

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\left[(2^{10} - 22) + 20 \times (2^9 - 20) + 90 \times (2^8 - 18)\right]}{4^{10}} = \frac{193572}{4^{10}} \simeq 0.1846.$$

   (δ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε όλα τα υπόλοιπα σκέλη, συμπεριλαμβανομένου *και* του επόμενου:

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 4) = \frac{624120}{4^{10}} \simeq 0.5952.$$

   (ε΄) Θα εφαρμόσουμε διαφορετική στρατηγική σε σχέση με τα σκέλη για τις περιπτώσεις $X = 1$ και $X = 2$. Για να περάσουμε και τα 4 μαθήματα, σημαίνει ότι είτε διαβάσαμε 3 μαθήματα για 2 ώρες και 1 μάθημα για 4 (κάτι που μπορεί να γίνει με 4 τρόπους), είτε διαβάσαμε 2 μαθήματα για 2 ώρες και 2 μαθήματα για 3 ώρες (κάτι που μπορεί να γίνει με 6 τρόπους). Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαβάσουμε 3 συγκεκριμένα μαθήματα για 2 ώρες και το τελευταίο για 4 ώρες είναι $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2}$, ενώ οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαβάσουμε 2 συγκεκριμένα μαθήματα για 2 ώρες και τα άλλα 2 για 3 ώρες το καθένα είναι $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{3}$. Τελικά,

$$P(X=4) = \frac{4 \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} + 6 \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{3}}{4^{10}} = \frac{226800}{4^{10}} \simeq 0.2163.$$

Παρατηρήστε ότι η μέθοδος του σκέλους για την $P(X=4)$ θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στα υπόλοιπα. Ομοίως, η μέθοδος που εφαρμόστηκε για τα σκέλη για τις $P(X=1)$, $P(X=2)$ επίσης θα μπορούσε να εφαρμοστεί και στα υπόλοιπα.

18. **(Δώρα)** 6 άτομα ανταλλάσσουν δώρα εντελώς τυχαία. Ποια η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα άτομα να λάβει το δικό του δώρο;

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ακόλουθη εξίσωση:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\},\ |I|=k} P\left(\cap_{i \in I} A_i\right).$$

Λύση: Έστω X το πλήθος των ατόμων που καταλήγουν με το δώρο τους. Έστω επίσης A_i, $i = 1, \ldots, 6$ το ενδεχόμενο να καταλήξει το άτομο i με το δώρο του. Πρέπει να υπολογίσουμε το ενδεχόμενο $X \geq 0$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= P(A_1 \cup \cdots \cup A_6) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) + \cdots - P(A_1 A_2 \ldots A_n) \\ &= 6 \times \frac{1}{6} - \binom{6}{2} \times \frac{1}{6 \times 5} + \binom{6}{3} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4} - \binom{6}{4} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} \\ &\quad + \binom{6}{5} \times \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} - \binom{6}{6} \times \frac{1}{6!} \simeq 0.6319, \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολύ κοντά στο $1 - e^{-1}$ (αυτό δεν είναι τυχαίο).

Στους άνω υπολογισμούς, η δεύτερη ισότητα προκύπτει με χρήση της υπόδειξης. Στην τρίτη ισότητα, οι διωνυμικοί όροι εμφανίζονται μετρώντας το πλήθος των όρων του κάθε αθροίσματος. Επίσης, για την ίδια ισότητα, υπολογίζουμε τους όρους του κάθε αθροίσματος, που είναι ίσοι μεταξύ τους με απλή συνδυαστική. Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα 2 άτομα να λάβουν το δώρο τους. Υπάρχουν συνολικά 6! δυνατές μεταθέσεις των δώρων. Από αυτές, υπάρχουν 4! μεταθέσεις στις οποίες τα δύο άτομα λαμβάνουν το δώρο τους, γιατί το τρίτο άτομο έχει 4 επιλογές, το τέταρτο άτομο έχει 3 επιλογές, κ.ο.κ. Έτσι η πιθανότητα είναι

$$P(A_i A_j) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6 \times 5}.$$

3η Ομάδα Ασκήσεων

19. **(Χυλόπιτα)** Την πρώτη φορά που ο Ρωμαίος κάνει ερωτική εξομολόγηση στην Ιουλιέτα, αυτή αποκρίνεται θετικά με πιθανότητα 50%. Αν τον απορρίψει, αυτός ξανακάνει ερωτική εξομολόγηση, αλλά με πιθανότητα θετικής απόκρισης 20%. Αν η Ιουλιέτα τον απορρίψει και πάλι, ο Ρωμαίος κάνει μια τελευταία προσπάθεια, αλλά με πιθανότητα επιτυχίας 10%. Ποια είναι η πιθανότητα τελικά να τα φτιάξει ο Ρωμαίος με την Ιουλιέτα αν είναι διατεθειμένος να εξαντλήσει και τις τρεις προσπάθειές του;

    Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο Ρωμαίος να τα καταφέρει σε οποιαδήποτε από τις 3 προσπάθειές του. Έστω F το ενδεχόμενο να τα καταφέρει στην πρώτη προσπάθεια, S το ενδεχόμενο να τα καταφέρει στη δεύτερη προσπάθεια, και T να τα καταφέρει στην τρίτη προσπάθεια. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(F) + P(F'S) + P(F'S'T) \\ &= P(F) + P(F')P(S|F') + P(F')P(S'|F')P(T|S'F') \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{16}{25}. \end{aligned}$$

20. **(Σύνοδος Κορυφής)** Σε μια σύνοδο κορυφής, δύο αρχηγοί κρατών επιλέγουν, για τον επιθετικό προσδιορισμό ενός κράτους, μια διάταξη τριών λέξεων επιλεγμένων από τις ακόλουθες δέκα: Republika, Nova, Severna, Gorna, Vardarska, (Skopje), Ilidenska, Wakanda, Mordor, Tatooine. Όλες οι δυνατές διατάξεις είναι ισοπίθανες.

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγούν, στη διάταξη των τριών λέξεων, οι λέξεις Gorna και Severna, και επιπλέον η λέξη Gorna να εμφανίζεται σε κάποια θέση πριν τη λέξη Severna;

    (β΄) Με δεδομένο ότι μια από τις τρεις λέξεις που τελικά επελέγησαν είναι η Wakanda, ποια είναι η πιθανότητα να ΜΗΝ έχει επιλεγεί ΚΑΙ η λέξη Mordor;

    Λύση:

    (α΄) Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής: Υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμοί λέξεων που μπορούν να επιλεγούν, ενώ υπάρχουν οκτώ συνδυασμοί που περιλαμβάνουν τις δύο δοσμένες λέξεις και μια από τις άλλες οκτώ. Επομένως, η πιθανότητα να καταλήξουμε με αυτές τις δύο λέξεις στον επιθετικό προσδιορισμό είναι $8/\binom{10}{3} = \frac{1}{15}$. Όμως, εμείς ενδιαφερόμαστε να εμφανίζεται πρώτα η λέξη Gorna και μετά η λέξη Severna. Λόγω συμμετρίας, τα δύο αυτά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα πρέπει να είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$.
    Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διατάξεις. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $10 \times 9 \times 8$ δυνατές διατάξεις τριών λέξεων. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων που ικανοποιούν την δοθείσα συνθήκη, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{3}{2} = 3$ τρόπους για να επιλέξουμε τις δύο θέσεις που θα καταλάβουν οι δοσμένες λέξεις, και 8 επιλογές για την λέξη που θα συμπληρώσει την τριάδα. Επομένως, υπάρχουν 3×8 διατάξεις στο ενδεχόμενο που εξετάζουμε, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3\times 8}{10\times 9\times 8} = \frac{1}{30}$, όπως και με την προηγούμενη λύση.

    (β΄) Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί η λέξη Wakanda και B το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί η λέξη Mordor. Ζητείται να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$.
    Υπάρχουν διάφορες λύσεις. Σχετικά με την πρώτη:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

    Σχετικά με την $P(A)$, παρατηρούμε πως έχουμε συνολικά $\binom{10}{3}$ συνδυασμούς. Από αυτούς, οι $\binom{9}{2}$ έχουν την λέξη Wakanda, αφού υπάρχουν $\binom{9}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε τις δύο άλλες λέξεις. Άρα τελικά:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

    Επίσης, το πλήθος των συνδυασμών που έχουν την λέξη Wakanda αλλά όχι τη λέξη Mordor είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε από οκτώ λέξεις (δηλαδή όλες εκτός της Wakanda και της Mordor) τις δύο από αυτές, για να συμπληρώσουν, μαζί με την λέξη Wakanda, την τριάδα. Επομένως,

$$P(AB) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{30},$$

και τελικά

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{7 \times 10}{30 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

Σχετικά με τη δεύτερη λύση,

$$P(B|A) = 1 - P(B'|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)}.$$

Το ενδεχόμενο AB' είναι το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τρεις λέξεις και να υπάρχουν σε αυτές και η λέξη Wakanda και η λέξη Mordor. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχόμενου είναι το πλήθος των συνδυασμών αυτών των λέξεων με μια άλλη από τις οκτώ, δηλαδή οκτώ, διαιρεμένο με το πλήθος όλων των συνδυασμών, δηλαδή $\binom{10}{3}$. Επομένως,

$$P(AB') = \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15} \Rightarrow P(B|A) = 1 - \frac{P(AB')}{P(A)} = 1 - \frac{10}{15 \times 3} = \frac{7}{9}.$$

Μια τελευταία λύση είναι απλώς να παρατηρούμε ότι με δεδομένο ότι στην διάταξη υπάρχει η Wakanda, υπάρχουν $\binom{9}{2}$ επιλογές για τις άλλες δύο λέξεις, εκ των οποίων οι $\binom{8}{2}$ δεν έχουν τη λέξη Mordor, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{9}.$$

21. **(Κάδος)** Από έναν κάδο που περιέχει 10 άσπρες, 20 μαύρες και 30 κόκκινες μπάλες, επιλέγουμε 4 χωρίς επανατοποθέτηση.

    (α΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα;

    (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη μπάλα δεδομένου ότι δεν επιλέξαμε καμία κόκκινη;

    (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να μην επιλέξαμε καμία κόκκινη μπάλα, δεδομένου ότι επιλέξαμε τουλάχιστον μία άσπρη;

    Λύση:

    (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τουλάχιστον μια άσπρη μπάλα. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχόμενου A' να μην επιλεγεί καμία άσπρη μπάλα. Έχουμε συνολικά 60 μπάλες, άρα υπάρχουν συνολικά $\binom{60}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε μπάλες, και μόνο $\binom{50}{4}$ από αυτούς δεν περιλαμβάνουν καμία άσπρη. Άρα,

    $$P(A') = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{60}{4}} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\binom{50}{4}}{\binom{60}{4}} \simeq 0.5277.$$

    (β΄) Έστω B το ενδεχόμενο να μην επιλέξουμε καμία κόκκινη μπάλα. Ζητείται ο υπολογισμός του $P(A|B)$, για το οποίο όμως ισχύει

    $$P(A|B) = 1 - P(A'|B) = 1 - \frac{P(A'B)}{P(B)} = 1 - \frac{\binom{20}{4}/\binom{60}{4}}{\binom{30}{4}/\binom{60}{4}} \simeq 0.8232.$$

    Η δεύτερη ισότητα προέκυψε με συλλογισμό παρόμοιο με αυτόν του πρώτου μέρους.

    (γ΄) Παρομοίως, έχουμε

    $$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) - P(BA')}{P(A)} = \frac{P(B) - P(BA')}{1 - P(A')} = \frac{\left(\binom{30}{4} - \binom{20}{4}\right)/\binom{60}{4}}{1 - \binom{50}{4}/\binom{60}{4}} = \frac{\binom{30}{4} - \binom{20}{4}}{\binom{60}{4} - \binom{50}{4}} \simeq 0.0877.$$

22. **(Εξέταση)** Μια καθηγήτρια εξετάζει ένα φοιτητή στην ύλη ενός μαθήματος ως εξής. Ο φοιτητής απαντά 6 ερωτήσεις, με τις απαντήσεις του να είναι σωστές ή λάθος. Αν απαντήσει σωστά σε 4 και άνω ερωτήσεις, ο φοιτητής περνά το μάθημα, αλλιώς δεν περνά το μάθημα. Δίνεται ότι ο φοιτητής θα είναι αδιάβαστος με πιθανότητα $p_A = 1/2$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.2, θα είναι μισοδιαβασμένος με πιθανότητα $p_B = 1/3$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.5, και διαβασμένος με πιθανότητα $p_C = 1/6$, οπότε και θα απαντήσει σωστά την κάθε ερώτηση με πιθανότητα 0.8. Σε κάθε μια από τις άνω τρεις περιπτώσεις, η κάθε απάντηση είναι σωστή ή λάθος ανεξάρτητα από τις άλλες απαντήσεις.

(α΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, να δοθεί ένας τύπος για τη μάζα πιθανότητας του πλήθους X των σωστών απαντήσεων που αυτός θα δώσει.

(β΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

(γ΄) Με δεδομένο ότι ο φοιτητής πέρασε το μάθημα, ποια ήταν η πιθανότητα να ήταν αδιάβαστος;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο φοιτητής να είναι αδιάβαστος, B το ενδεχόμενο να είναι μισοδιαβασμένος, και C το ενδεχόμενο να είναι διαβασμένος. Έστω επίσης S_i, με $i = 1, \ldots, 6$, το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απάντησε σωστά την ερώτηση i. Μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6},$$
$$P(S_i|A) = 0.2, \quad P(S_i|B) = 0.5, \quad P(S_i|C) = 0.8, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

Τέλος, έστω D το ενδεχόμενο ο φοιτητής να περάσει το μάθημα.

(α΄) Αν ο φοιτητής είναι αδιάβαστος, τότε κάθε μια από τις 6 ερωτήσεις θα απαντηθεί σωστά με πιθανότητα 0.2 ανεξάρτητα από τις άλλες. Επομένως, το πλήθος X των σωστών απαντήσεων θα ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 6$ και $p = 0.2$ και θα έχουμε

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0.2^k 0.8^{6-k}.$$

(β΄) Ο φοιτητής θα περάσει το μάθημα αν απαντήσει τουλάχιστον 4 ερωτήσεις σωστά. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(D) = \binom{6}{4} 0.2^4 0.8^2 + \binom{6}{5} 0.2^5 0.8^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 0.8^0 \simeq 0.0170.$$

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}P(D|A)}{\frac{1}{2}P(D|A) + \frac{1}{3}P(D|B) + \frac{1}{6}P(D|C)}, \end{aligned}$$

όπου η $P(D|A)$ είναι αυτή που έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος, ενώ για τις άλλες δεσμευμένες πιθανότητες, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} P(D|B) &= \binom{6}{4} 0.5^4 0.5^2 + \binom{6}{5} 0.5^5 0.5^1 + \binom{6}{6} 0.5^6 0.5^0 \simeq 0.3438, \\ P(D|C) &= \binom{6}{4} 0.8^4 0.2^2 + \binom{6}{5} 0.8^5 0.2^1 + \binom{6}{6} 0.8^6 0.2^0 \simeq 0.9091. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση, τελικά προκύπτει πως

$$P(A|D) \simeq 0.0243.$$

23. **(Δημοφιλία)** Έξι άτομα, έστω A, B, C, D, E, και F είναι διατεταγμένα σύμφωνα με τη δημοφιλία τους, χωρίς όμως να γνωρίζουν τη διάταξή τους, και υποθέτουν ότι όλες οι διατάξεις είναι εξίσου πιθανές. Με δεδομένο ότι τα άτομα μαθαίνουν ότι ο A είναι πιο δημοφιλής από τον B, ποια είναι η πιθανότητα που δίνουν στο ενδεχόμενο ο A να είναι πιο δημοφιλής και από τον C;

Λύση: Συμβολίζοντας με $X > Y$ το ενδεχόμενο το άτομο X να είναι δημοφιλέστερο από το άτομο Y, παρατηρούμε πως

$$P(A > C | A > B) = \frac{P(A > C, A > B)}{P(A > B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Οι τιμές των $P(A > C, A > B)$ και $P(A > B)$ προκύπτουν από συμμετρία.

24. **(Κλέφτης)** Το συρτάρι A περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά κέρματα ενώ το συρτάρι B περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Ένας κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο κέρματα στην τύχη.

(α΄) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά;

(β΄) Αν διαπιστωθεί (κατά την σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά κέρματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι A;

Λύση: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A ο κλέφτης να ανοίξει το συρτάρι A, B ο κλέφτης να ανοίξει το συρτάρι B, και GG ο κλέφτης να πάρει δύο χρυσά κέρματα. Υποθέτουμε πως $P(A) = P(B) = 1/2$, και επιπλέον παρατηρούμε πως

$$P(GG|A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{5}, \qquad P(GG|B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{12}.$$

(α΄) Με χρήση του κανόνα της ολικής πιθανότητας,

$$P(GG) = P(GG|A)P(A) + P(GG|B)P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{120}.$$

(β΄) Με διπλή χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A|GG) = \frac{P(A \cap GG)}{P(GG)} = \frac{P(GG|A)P(A)}{P(GG)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{17}{120}} = \frac{12}{17}.$$

Όπως αναμενόταν, η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη του $1/2$.

25. **(Πινιάτα)** Μια πινιάτα σπάει αν δεχτεί ένα δυνατό χτύπημα ή δύο μέτρια χτυπήματα. Σε ένα πάρτι, αν ένα παιδί χτυπήσει την πινιάτα έχει πιθανότητες $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα δυνατό χτύπημα, $\frac{1}{4}$ να δώσει ένα μέτριο χτύπημα, και $\frac{1}{2}$ να αστοχήσει. 4 παιδιά μπαίνουν σε σειρά για να χτυπήσουν μια πινιάτα, διαδοχικά, και μια φορά το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα να τη σπάσουν; Όλα τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα.

    Λύση: Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(F)$ τα 4 παιδιά να μην καταφέρουν να σπάσουν την πινιάτα, που προκύπτει κάπως πιο εύκολα. Έστω M_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να αστόχησε, έστω S_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε δυνατά, και έστω A_i το ενδεχόμενο το παιδί i να προσπάθησε να χτυπήσει την πινιάτα και να την χτύπησε μέτρια. Στα άνω, $i = 1, 2, 3, 4$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(F) &= P(M_1M_2M_3M_4) + P(A_1M_2M_3M_4) + P(M_1A_2M_3M_4) + P(M_1M_2A_3M_4) + P(M_1M_2M_3A_4) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

    και τελικά η πιθανότητα να σπάσει η πινιάτα είναι $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

26. **(Τέσσερα διαφορετικά κέρματα)** Έχουμε 4 κέρματα. Τα δύο πρώτα είναι δίκαια, το τρίτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και το τέταρτο έρχεται γράμματα με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Διαλέγουμε ένα κέρμα στην τύχη, το ρίχνουμε 2 φορές, και φέρνουμε δύο φορές γράμματα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξαμε ένα από τα δύο δίκαια κέρματα;

    Λύση: Έστω 1, 2, 3, και 4 τα ενδεχόμενα να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο, δεύτερο, τρίτο, ή τέταρτο κέρμα αντίστοιχα. Εξ υποθέσεως $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$. Έστω το ενδεχόμενο να φέρουμε δύο φορές γράμματα. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes:

$$P(1|TT) = \frac{P(TT|1)P(1)}{P(TT|1)P(1) + P(TT|2)P(2) + P(TT|3)P(3) + P(TT|4)P(4)} =$$
$$\frac{P(TT|1)}{P(TT|1) + P(TT|2) + P(TT|3) + P(TT|4)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}} \simeq 0.3711.$$

    Στην τρίτη εξίσωση, κάναμε την υπόθεση ότι, δεδομένης της επιλογής του κέρματος, οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Τέλος, παρατηρήστε πως, λόγω συμμετρίας, $P(2|TT) = P(1|TT)$, άρα η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ένα από τα δίκαια κέρματα είναι περίπου $2 \times 0.3711 = 0.7422$.

4η Ομάδα Ασκήσεων

27. **(Βάσια)** Ο κυβερνήτης του υποβρυχίου «Χατζηπαναγής» έχει στο στόχαστρο ένα κομβόι από 2 εχθρικά μεταγωγικά, το A και το B. Έχει στη διάθεσή του 5 τορπίλες, τις οποίες, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να εκτοξεύσει όλες, και σχεδόν ταυτόχρονα, και πριν προλάβει να διαπιστώσει αν κάποια από αυτές έχει βρει στόχο. Κάθε τορπίλη θα πετύχει και θα βυθίσει το μεταγωγικό στο οποίο θα τη στείλει ο καπετάνιος με πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$. Ο καπετάνιος ξέρει ότι το μεταγωγικό A έχει αξία, για τον εχθρό, 4 εκατομμύρια ευρώ, ενώ το μεταγωγικό B έχει αξία 8 εκατομμύρια ευρώ.

(α΄) Αν ο καπετάνιος στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A και 2 τορπίλες στο μεταγωγικό B, πόση είναι η αναμενόμενη τιμή της ζημιάς που θα επιφέρει στον εχθρό;

(β΄) Αν ο καπετάνιος θέλει να μεγιστοποιήσει τη ζημιά που θα επιφέρει στον εχθρό, πόσες τορπίλες πρέπει να στείλει στο μεταγωγικό A και πόσες στο B;

Λύση: Θα λύσουμε και τα δύο σκέλη μαζί. Έστω x, με $x = 0, 1, \ldots, 5$, το πλήθος των τορπιλών που ο καπετάνιος θα αποστείλει στο μεταγωγικό A. Το μεταγωγικό A θα βυθιστεί αν δεν αστοχήσουν όλες, επομένως να βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)$. Με παρόμοιο συλλογισμό, το μεταγωγικό B θα βυθιστεί με πιθανότητα $\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right)$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή του κόστους στον εχθρό θα είναι

$$E(C) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x\right) + 8 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\right) = \begin{cases} 6.1016, & x = 0, \\ 6.4688, & x = 1, \\ 6.3750, & x = 2, \\ 5.8125, & x = 3, \\ 4.7344, & x = 4, \\ 3.0508, & x = 5. \end{cases}$$

Επομένως, αν ο κυβερνήτης στείλει 3 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_3) = 5.8125$, ενώ αν ο κυβερνήτης στείλει 1 τορπίλες στο μεταγωγικό A, το αναμενόμενο κόστος στον εχθρό θα είναι $E(C_1) = 6.4688$, που είναι και το μεγαλύτερο δυνατό.

28. **(Ευρωεκλογές)** Στις ευρωεκλογές του 2019 δόθηκαν από την εφορευτική επιτροπή στον Σταύρο 43 ψηφοδέλτια (συμπεριλαμβανομένου του λευκού), με τυχαία σειρά. Ο Σταύρος είχε αποφασίσει να ψηφίσει οποιοδήποτε από 3 κόμματα που ήταν του γούστου του, και συγκεκριμένα το πρώτο από τα 3 που θα συναντούσε καθώς ξεφύλλιζε ένα προς ένα τα ψηφοδέλτια. Έστω X ο αύξων αριθμός του ψηφοδελτίου που τελικά ψήφισε ο Σταύρος. Επομένως, η Τ.Μ. X είναι ακέραιος και λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, \ldots, 41$.

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 1)$;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = 41)$;

(γ΄) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X.

(α΄) Υπάρχουν 43 συνολικά ψηφοδέλτια, εκ των οποίων 3 είναι αυτά που θα επιλέξει ο Σταύρος. Η πιθανότητα να είναι το πρώτο ένα εξ αυτών είναι $\frac{3}{43}$.

(β΄) Αριθμούμε τα ψηφοδέλτια με τη σειρά που θα τα επιλέξει ο Σταύρος. Υπάρχουν συνολικά $\binom{43}{3}$ συνδυασμοί ψηφοδελτίων που αντιστοιχούν στα 3 ψηφοδέλτια που αρέσουν στο Σταύρο. Υπάρχει ακριβώς ένας συνδυασμός (τα ψηφοδέλτια 41, 42,και 43) με τον οποίο θα χρειαστεί αν σηκώσει ο Σταύρος 41 ψηφοδέλτια. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X = 41) = \frac{1}{\binom{43}{3}} = \frac{3 \times 2}{43 \times 42 \times 41}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε πως $X = 41$ όταν το πρώτο ψηφοδέλτιο δεν αρέσει στο Σταύρο (κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{40}{43}$), το δεύτερο ψηφοδέλτιο δεν αρέσει στο Σταύρο (κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{39}{42}$), κοκ, και τελικά

$$P(X = 41) = \frac{40}{43} \times \frac{39}{42} \times \frac{38}{41} \times \cdots \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 3}{43 \times 42 \times 41}.$$

(γ΄) Έστω $x = 1, 2, \ldots, 41$. Το $X = x$ εφόσον ο συνδυασμός των ψηφοδελτίων που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος περιλαμβάνουν το x και άλλα δύο από τα $43 - x$ επόμενα. Επομένως

$$P(X = x) = \frac{\binom{43-x}{2}}{\binom{43}{3}}.$$

29. **(Πώληση βιβλίων)** Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει 10 βιβλία προς 20 ευρώ το ένα και τα πουλάει 30 ευρώ. Η μάζα πιθανότητας του αριθμού X των βιβλίων που πουλιούνται (σε ένα έτος) δίνεται από τον τύπο

$$p_X(x) = \frac{2x+1}{120}, \ x = 1, 2, \ldots, 10.$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του X και η μέση τιμή του καθαρού κέρδους Y του βιβλιοπωλείου σε ένα έτος υποθέτοντας διαδοχικά ότι

(α΄) Στο τέλος της χρονιάς το βιβλιοπωλείο μπορεί να επιστρέψει τα απούλητα βιβλία στον προμηθευτή λαμβάνοντας πίσω τα 20 ευρώ, και

(β΄) Στο τέλος της χρονιάς το βιβλιοπωλείο δεν μπορεί να επιστρέψει τα απούλητα βιβλία στον προμηθευτή, ενώ τα βιβλία δεν έχουν πλέον καμία αξία.

(Υπόδειξη: θα χρειαστούν οι γνωστοί τύποι $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)

Λύση: Η μέση τιμή του X προκύπτει με απλή εφαρμογή του ορισμού:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{10} x p_X(x) = \sum_{i=0}^{10} x \frac{2x+1}{120} = \frac{1}{120}\left(2\sum_{i=1}^{10} x^2 + \sum_{i=1}^{10} x\right) \\ &= \frac{1}{120}\left(2\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2}\right) = \frac{55}{8} = 6.875. \end{aligned}$$

Η τέταρτη ισότητα προκύπτει με εφαρμογή των τύπων της υπόδειξης. Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή του κέρδους του βιβλιοπωλείου στην πρώτη περίπτωση, όταν δηλαδή οι επιστροφές στον προμηθευτή είναι δεκτές, παρατηρούμε ότι $Y = (30-20)X = 10X$, και άρα:

$$E[Y] = E[10X] = 10E[X] = 68.75.$$

Στην δεύτερη περίπτωση, παρατηρούμε πως $Y = 10X + (-20)(10 - X) = 30X - 200$, επομένως

$$E[Y] = E[30X - 200] = 30E[X] - 200 = \frac{25}{4} = 6.25.$$

30. **(D&D)** Ένας πολεμιστής είναι οπλισμένος με ένα στιλέτο με το οποίο μπορεί σε κάθε χτύπημα να καταφέρει στον αντίπαλο απώλεια X μονάδων ζωής, όπου η Τ.Μ. X λαμβάνει τις τιμές $1, 2, 3, 4$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ την κάθε τιμή. (Επομένως, όλα τα χτυπήματα οδηγούν σε απώλεια μονάδων ζωής.) Ένας αντίπαλος έχει 5 μονάδες ζωής. Ο πολεμιστής χτυπά διαδοχικά τον αντίπαλο έως ότου του καταφέρει, αθροιστικά, απώλεια 5 ή περισσότερων μονάδων ζωής, οπότε ο αντίπαλος πεθαίνει. Τα χτυπήματα είναι ανεξάρτητα. Έστω Y η Τ.Μ. που περιγράφει το πλήθος των χτυπημάτων που απαιτούνται για να πεθάνει ο αντίπαλος. (Παρατηρήστε πως το Y μπορεί να λάβει τις τιμές 2 έως 5.) Να προσδιορίσετε τη μάζα $p_Y(y)$, την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, τη μέση τιμή $E(Y)$, και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(Y)$ της Y.

Λύση: Φανταστείτε ότι τα χτυπήματα αποφασίζονται ρίχνοντας ένα δίκαιο ζάρι με 4 πλευρές. Θα χρειαστούν ακριβώς 2 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 2 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (3,2),\ (3,3)\ ,(3,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (1,4).$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 10, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, επομένως $P(Y = 2) = \frac{10}{16}$.

Παρομοίως, θα χρειαστούν ακριβώς 3 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 3 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{gathered}(3,1,1),\ (3,1,2),\ (3,1,3),\ (3,1,4),\ (2,2,1),\ (2,2,2),\ (2,2,3),\ (2,2,4),\ (2,1,2),\ (2,1,3),\\ (2,1,4),\ (1,1,3),\ (1,1,4),\ (1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,3,1),\ (1,3,2),\ (1,3,3),\ (1,3,4).\end{gathered}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 20, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, επομένως $P(Y = 3) = \frac{20}{64}$.

Ακολούθως παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 4 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 4 φορές και προκύψει κάποιο από τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{gathered}(1,1,1,2),\ (1,1,1,3),\ (1,1,1,4),\ (1,1,2,1),\ (1,1,2,2),\ (1,1,2,3),\ (1,1,2,4),\ (1,2,1,1),\\ (1,2,1,2),\ (1,2,1,3),\ (1,2,1,4),\ (2,1,1,1),\ (2,1,1,2),\ (2,1,1,3),\ (2,1,1,4).\end{gathered}$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι 15, και καθένα έχει πιθανότητα να προκύψει $\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$, επομένως $P(Y=4) = \frac{15}{256}$.

Τέλος, παρατηρούμε πως θα χρειαστούν ακριβώς 5 χτυπήματα αν ρίξουμε το ζάρι 5 φορές και έρθει ένα από τα αποτελέσματα

$$(1,1,1,1,1),\ (1,1,1,1,2),\ (1,1,1,1,3),\ (1,1,1,1,4),$$

κάτι που έχει πιθανότητα $\frac{4}{4^5} = \frac{1}{256}$. Επομένως $P(Y=5) = \frac{1}{256}$.

Παρατηρήστε πως

$$P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5) = \frac{10}{16}+\frac{20}{64}+\frac{15}{256}+\frac{1}{256} = \frac{640+320+60+4}{1024} = 1,$$

όπως αναμενόταν. Παρατηρήστε επίσης ότι όλα τα άνω αποτελέσματα θα μπορούσαν να γραφούν ως φύλλα ενός τετραδικού δέντρου.

Σχετικά με την κατανομή της Y, έχουμε

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<2, \\ 10/16, & 2\le y<3, \\ 15/16, & 3\le y<4, \\ 255/256, & 4\le y<5, \\ 1, & 5\le y. \end{cases}$$

Τέλος, για τη μέση τιμή και τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2\times\frac{10}{16}+3\times\frac{20}{64}+4\times\frac{15}{256}+5\times\frac{1}{256} = \frac{625}{256} \simeq 2.4414, \\ E(Y^2) &= 2^2\times\frac{10}{16}+3^2\times\frac{20}{64}+4^2\times\frac{15}{256}+5^2\times\frac{1}{256} = \frac{1625}{256} \simeq 6.3477, \\ \mathrm{VAR}(Y) &= \frac{1625}{256}-\left(\frac{625}{256}\right)^2 = \frac{393}{1015} \simeq 0.3872. \end{aligned}$$

31. **(Διαγωνισμός)** Σε ένα διαγωνισμό συμμετέχουν 5 άντρες και 5 γυναίκες. Κατατάσσονται σύμφωνα με την επίδοσή τους, και δεν προβλέπεται δύο ή περισσότερα άτομα να καταταγούν στην ίδια θέση. Υπάρχουν 10! δυνατές κατατάξεις, και δίνεται πως είναι όλες ισοπίθανες. Έστω X η υψηλότερη σειρά που κατέλαβε γυναίκα. (Για παράδειγμα, έχουμε $X=1$ αν πρώτη αναδείχτηκε μια γυναίκα, οποιαδήποτε από τις 5, ενώ έχουμε $X=6$ αν οι 5 γυναίκες κατέλαβαν τις τελευταίες 5 θέσεις.) Να βρείτε την μάζα $p_X(x)$ του X. Επίσης, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E(X)$ και τη διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$.

Λύση: Η Τ.Μ. X μπορεί να λάβει τις τιμές $1,2,3,4,5,6$. Υπολογίζουμε την πιθανότητα να προκύψει η κάθε μια από τις άνω τιμές χωριστά. Παρατηρούμε καταρχάς ότι υπάρχουν 10! διαφορετικές διατάξεις για τα 10 άτομα.

(α΄) Λόγω συμμετρίας, $P(X=1) = \frac{1}{2}$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, πρώτος βγαίνει ένας άντρας, και ακολουθεί μια γυναίκα. Υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 8! επιλογές για την διάταξη των υπολοίπων ατόμων. Άρα,

$$P(X=2) = \frac{5\times5\times8!}{10!} = \frac{5}{18}.$$

(γ΄) Ομοίως, υπάρχουν 5 επιλογές για τον πρώτο άντρα, 4 για τον δεύτερο, 5 επιλογές για την πρώτη γυναίκα, και 7 επιλογές για τα υπόλοιπα άτομα. Άρα,

$$P(X=3) = \frac{5\times4\times5\times7!}{10!} = \frac{5}{36}.$$

(δ΄) Ομοίως,

$$P(X=4) = \frac{5\times4\times3\times5\times6!}{10!} = \frac{5}{84}.$$

(ε΄) Ομοίως,

$$P(X=5) = \frac{5\times4\times3\times2\times5\times5!}{10!} = \frac{5}{252}.$$

(ς΄) Τέλος,

$$P(X=6)=\frac{5!\times 5!}{10!}=\frac{1}{252}.$$

Παρατηρήστε πως από τις άνω τιμές προκύπτει πως

$$\sum_{i=1}^{6} P(X=i)=1,$$

όπως θα έπρεπε.

Σχετικά με τη μέση τιμή της X, έχουμε

$$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{5}{84}+5\times\frac{5}{252}+6\times\frac{1}{252}=\frac{11}{6}\simeq 1.8333,$$

ενώ για τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{5}{18}+3^2\times\frac{5}{36}+4^2\times\frac{5}{84}+5^2\times\frac{5}{252}+6^2\times\frac{1}{252}=\frac{187}{42}\simeq 4.4524, \\ \mathrm{VAR}(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{275}{252}\simeq 1.0913. \end{aligned}$$

5η Ομάδα Ασκήσεων

32. **(Μεταγραφή)** Μια ποδοσφαιρική ομάδα κάνει μεταγραφή ένα νέο επιθετικό παίκτη. Ο παίκτης αυτός ανήκει σε μια από τρεις κατηγορίες ποιότητας:

(α΄) Ο επιθετικός είναι «χέλι» με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

(β΄) Ο επιθετικός είναι «μέτριος» με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$.

(γ΄) Ο επιθετικός είναι «παλτό» με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, οπότε και σκοράρει σε κάθε παιχνίδι με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Τη στιγμή της μεταγραφής η ομάδα δεν γνωρίζει σε ποια κατηγορία ποιότητας ανήκει ο επιθετικός. Επίσης, με δεδομένη την κατηγορία στην οποία ανήκει ο επιθετικός, ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα παιχνίδια. Παρατηρήστε ότι στα άνω δεν έχει ληφθεί υπόψη πόσα γκολ βάζει ο επιθετικός σε ένα παιχνίδι, αλλά μόνο αν σκοράρει (έστω και ένα γκολ) ή όχι. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Έστω πως παίζεται το πρώτο παιχνίδι, και ο επιθετικός σκοράρει. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

(β΄) Έστω πως ο επιθετικός είναι «χέλι», και έχουν παιχτεί 10 παιχνίδια. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του πλήθους X των παιχνιδιών στα οποία ο επιθετικός σκόραρε;

(γ΄) Έστω πως έχουν παιχτεί 5 παιχνίδια, και ο επιθετικός έχει σκοράρει στα 2. Ποια είναι η νέα πιθανότητα ο επιθετικός να είναι «χέλι»;

Λύση: Έστω τα ενδεχόμενα A ο επιθετικός να είναι «χέλι», B ο επιθετικός να είναι «μέτριος», και C ο επιθετικός να είναι «παλτό». Μας έχει δοθεί ότι

$$P(A)=\frac{1}{6},\qquad P(B)=\frac{1}{3},\qquad P(C)=\frac{1}{2}.$$

Έστω, επίσης το ενδεχόμενο G ο επιθετικός να σκοράρει σε ένα παιχνίδι. Μας έχει δοθεί ότι

$$P(G|A)=\frac{2}{3},\qquad P(G|B)=\frac{1}{3},\qquad P(G|C)=\frac{1}{6}.$$

(α΄) Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|G) &= \frac{P(AG)}{P(G)}=\frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A)+P(G|B)P(B)+P(G|C)P(C)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{4+4+3}=\frac{4}{11}\simeq 0.3636. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε οτι η πιθανότητα ο επιθετικός να ήταν «χέλι» αυξήθηκε, όπως αναμενόταν.

(β΄) Αφού ο επιθετικός σκοράρει σε κάθε παιχνίδι ανεξάρτητα από τα άλλα και με την ίδια πιθανότητα $\frac{2}{3}$ σε καθένα από αυτά, το πλήθος των παιχνιδιών X στα οποία ο επιθετικός σκοράρει ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 10$ και (πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε πείραμα) $p = \frac{2}{3}$, επομένως

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k},$$

και

$$E(X) = Np = \frac{20}{3} \simeq 6.6667, \qquad \text{VAR}(X) = Np(1-p) = 10 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{9} \simeq 2.2222.$$

(γ΄) Έστω τώρα G_2 το ενδεχόμενο ο επιθετικός να σκοράρει σε ακριβώς 2 από τα 5 παιχνίδια. Όπως και στο προηγούμενο σκέλος, το πλήθος των παιχνιδιών στα οποία θα σκοράρει δίνεται από την διωνυμική κατανομή, επομένως

$$\begin{aligned} P(G_2|A) &= \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3, \\ P(G_2|B) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3, \\ P(G_2|C) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3. \end{aligned}$$

Και πάλι, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Bayes, έχουμε

$$\begin{aligned} P(A|G_2) &= \frac{P(AG_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2|A)P(A)}{P(G_2|A)P(A) + P(G_2|B)P(B) + P(G_2|C)P(C)} \\ &= \frac{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6}}{\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{4 + 16 + 3 \times 5^3/2^5} = \frac{128}{128 + 512 + 375} \simeq 0.1261. \end{aligned}$$

33. **(Σκοπευτής)** Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στόχο. Η πιθανότητα να πετύχει 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει 3. Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει το στόχο σε μία δεδομένη βολή. Έπειτα να υπολογιστούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει το στόχο

(α΄) Δύο τουλάχιστον φορές.

(β΄) Ή όλες ή καμία φορά.

(γ΄) Το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον δύο φορές.

Λύση: Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι βολές έχουν όλες την ίδια πιθανότητα επιτυχίας, έστω p, και είναι ανεξάρτητες. Άρα το πλήθος των επιτυχιών X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, και επομένως, από την υπόθεση,

$$P(X = 4) = 3P(X = 3) \Rightarrow \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 \Rightarrow \binom{10}{4} p = 3\binom{10}{3}(1-p) \Rightarrow p = \frac{12}{19}.$$

Σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4 = \frac{734}{785} = 0.9350, \\ P(X = 0) + P(X = 5) &= (1-p)^5 + p^5 = \frac{277}{2582}, \\ P(X \leq 4 | X \geq 2) &= \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}{P(X \geq 2)} \\ &= \frac{\binom{5}{2}p^2(1-p)^3 + \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p)}{1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4} = \frac{191}{214} \simeq 0.8925. \end{aligned}$$

34. **(Gormiti)** Έχουμε ένα σετ από 100 διαφορετικές κάρτες Gormiti, εκ των οποίων ένας είναι ο Magmion και ένας άλλος ο Electricon. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει ο Magmion;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από τον Magmion **και** τον Electricon;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει τον Magmion **ή** τον Electricon (και ενδεχομένως και τους δύο);

(δ΄) Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω τον Magmion ακριβώς 7 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 200 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο A που ερευνούμε αντιστοιχεί σε 99 συνδυασμούς. Πράγματι, αν η μία κάρτα είναι ο Magmion, για την άλλη κάρτα έχουμε 99 επιλογές. Άρα η πιθανότητα του A είναι

$$P(A) = \frac{99}{\binom{100}{2}} = \frac{1}{50}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι ο Magmion, που είναι $\frac{1}{100}$, συν την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι ο Magmion, που είναι επίσης $\frac{1}{100}$. (Επειδή δεν έχω επανάθεση, η πιθανότητα να είναι και οι δύο ο Magmion είναι 0.)

(β΄) Υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο B που ερευνούμε αντιστοιχεί σε ένα μόνο συνδυασμό, άρα η πιθανότητά του είναι

$$P(B) = \frac{1}{\binom{100}{2}} = \frac{2}{99 \times 100} = \frac{1}{4950}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι ένας από τους δύο Gormiti που ψάχνουμε, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{2}{100}$, επί την δεσμευμένη πιθανότητα $\frac{1}{99}$ ο δεύτερος να είναι αυτός που ψάχνουμε, με δεδομένο ότι ήδη βρήκαμε έναν.

(γ΄) Έστω C το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρώματός του, C', δηλαδή του ενδεχόμενο να μην βρούμε κανέναν από τους δύο Gormiti. Και πάλι, υπάρχουν $\binom{100}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών, και στο C' αντιστοιχούν $\binom{98}{2}$. Άρα τελικά

$$P(C') = \frac{\binom{98}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{98!98!2!}{96!2!100!} = \frac{98 \times 97}{100 \times 99} = \frac{4753}{4950} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{4753}{4950} = \frac{197}{4950}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του C' ως εξής: Δεν θα βρω κανέναν από τους δύο αν ο πρώτος που θα επιλέξω δεν είναι κάποιος από αυτούς, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{98}{100}$, και, με δεδομένο ότι ο πρώτος δεν είναι κάποιος από αυτούς, να μην είναι και ο δεύτερος. Αυτό έχει πιθανότητα $\frac{97}{99}$.

(δ΄) Εκτελώ 200 πειράματα, καθένα με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{50}$, όπως βρήκαμε στο πρώτο σκέλος, άρα η κατανομή του πλήθους M των καρτών του Magmion που βρίσκω είναι η διωνυμική, με παραμέτρους $N = 200$, $p = \frac{1}{50}$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(M = 7) = \binom{200}{7}\left(\frac{1}{50}\right)^7\left(\frac{49}{50}\right)^{193} \simeq 0.0592.$$

Η προσέγγιση Poisson δίνει πιθανότητα $\simeq 0.0595$.

35. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την αφιξή του θα θελήσει να φάει είτε πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ είτε μακαρονάδα με πιθανότητα $1 - p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να μην φάει ένας καλεσμένος το φαγητό της επιλογής του. Το A μπορεί να γραφεί ως η ένωση δύο ξένων ενδεχόμενων A_1 και A_2, όπου A_1 είναι το ενδεχόμενο να ζητήσουν πάνω από 16 άτομα πίτσα, και A_2 το ενδεχόμενο να ζητήσουν περισσότερα από 12 άτομα μακαρονάδα, ή αλλιώς λιγότερα από 8 άτομα πίτσα. Έστω X το πλήθος των ατόμων που επιλέγουν πίτσα. Παρατηρούμε πως το X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 20$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = 0.6$ (η πιθανότητα επιτυχίας). Παρατηρούμε, τέλος, πως

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \sum_{x=17}^{20} P(X=x) + \sum_{x=0}^{7} P(X=x) \\ &= \sum_{x=0,1,2,3,4,5,6,7,17,18,19,20} \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \simeq 0.037. \end{aligned}$$

36. **(Παιχνίδι με ζάρι)** Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα δίκαιο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός τότε ο A κερδίζει και παίρνει B Ευρώ από τον B, ενώ αν ο X είναι άρτιος τότε ο A χάνει και δίνει a Ευρώ στον B.

   (α΄) Ποια είναι η μάζα της τυχαίας μεταβλητής X;

   (β΄) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο A;

   (γ΄) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ a και B ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

   Λύση:

   (α΄) Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/6 + 1/6 = 1/3$. Επομένως,

   $$p_X(k) = P(X = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

   (β΄) Η πιθανότητα να κερδίσει ο A ισούται με

   $$\begin{aligned} & P(X = 2k+1, \quad k = 0, 1, \dots) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + \dots \\ & \qquad = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots = \frac{1}{3} \times \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

   Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

   $$1 + a + a^2 + \dots = \frac{1}{1-a},$$

   που με τη σειρά του μπορεί να αποδειχθεί με χρήση απλών ιδιοτήτων των ορίων και της ισότητας

   $$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^n}{1 - a},$$

   (γ΄) Το καθαρό κέρδος Z του A είναι μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή a με πιθανότητα $3/5$ και την τιμή $(-b)$ με πιθανότητα $2/5$. Η μέση τιμή της Z ισούται με

   $$E(Z) = \frac{3}{5} \times a + \frac{2}{5} \times (-b),$$

   και προκειμένου να είναι μηδέν πρέπει $a = 2b/3$.

37. **(Εκτίμηση πληθυσμού)** Σε ένα πάρκο βρίσκεται ένας μεγάλος αριθμός N από ζέβρες. Για να μελετήσουμε τον πληθυσμό τους, αιχμαλωτίζουμε m από αυτές, τους τοποθετούμε ραδιοπομπούς και εκ των υστέρων τις ελευθερώνουμε. Μετά από αρκετό διάστημα, αιχμαλωτίζουμε εκ νέου n από αυτές. Το ενδεχόμενο να πιαστεί μια ζέβρα την δεύτερη φορά είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενα να έχει πιαστεί την πρώτη φορά. Εννοείται πως ο συνολικός πληθυσμός των ζεβρών και ο πληθυσμός των ζεβρών με τους ραδιοπομπούς παραμένουν σταθεροί μεταξύ των δύο αιχμαλωσιών.

   (α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί ο αριθμός X των ζεβρών που αιχμαλωτίσαμε εκ νέου και φέρουν ραδιοπομπούς;

   (β΄) Έστω πως ο συνολικός πληθυσμός N είναι άγνωστος. Έστω επίσης πως $X = k$. Μια εκτιμήτρια για το N είναι ο αριθμός N' που μεγιστοποιεί την πιθανότητα $P_k(N)$ να έχουμε πιάσει k ζέβρες με ραδιοπομπούς αν ο πληθυσμός είναι N. (Αυτή η μέθοδος εκτίμησης καλείται μέθοδος της *μέγιστης πιθανοφάνειας*.) Ποια είναι η τιμή του N'; Για να τη βρείτε, σχηματίστε το λόγο $P_k(N)/P_k(N-1)$ και δείτε πότε γίνεται μικρότερος του 1.

Λύση:

(α΄) Έχουμε επιλογή χωρίς επανάθεση n μελών από ένα σύνολο με $N-m$ μέλη ενός τύπου (ζέβρες χωρίς πομπούς) και m μέλη ενός άλλου τύπου (ζέβρες με πομπούς). Άρα έχω την υπεργεωμετρική κατανομή:

$$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη, έχουμε:

$$\frac{P_k(N)}{P_k(N-1)} = \frac{(N-m)(N-n)}{(N-m-n+k)N},$$

και παρατηρούμε πως:

$$\frac{(N-m)(N-n)}{(N-m-n+k)N} \geq 1 \Leftrightarrow (N-m)(N-n) \geq (N-m-n+k)N \Leftrightarrow N \leq \frac{mn}{k}.$$

Άρα, πρέπει να επιλέξουμε τον μέγιστο ακέραιο N' που δεν υπερβαίνει την τιμή $\frac{mn}{k}$, δηλαδή:

$$N' = \lfloor \frac{mn}{k} \rfloor.$$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό. Για παράδειγμα, έστω πως είχαμε αιχμαλωτίσει $m=50$ ζέβρες την πρώτη φορά, ενώ τη δεύτερη φορά αιχμαλωτίσαμε $n=40$ και οι $k=4$ είχαν ραδιοπομπό. Είναι λογικό να εκτιμήσουμε ότι αρχικά είχαμε βάλει ραδιοπομπό σε ένα ποσοστό $\frac{4}{40}$ των ζεβρών, ή αλλιώς $N' = \frac{40\times 50}{4} = 500$.

38. **(Κυνήγι Χήνας)** Δύο κυνηγοί, ο A και ο B, κυνηγούν χήνες με τον ακόλουθο τρόπο: οι χήνες εμφανίζονται διαδοχικά, και όποτε εμφανίζεται μια, την πυροβολούν και οι δύο ταυτόχρονα. Ο A πετυχαίνει την χήνα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ενώ ο B την πετυχαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Τα αποτελέσματα των πυροβολισμών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η χήνα σκοτώνεται αν την πετύχει έστω ένας, και επιζεί αν αστοχήσουν και οι δύο. Επειδή οι πυροβολισμοί είναι ταυτόχρονοι, αν η χήνα σκοτωθεί κανείς από τους A και B δεν είναι σίγουρος ότι όντως την πέτυχε.

(α΄) Από τις χήνες που εμφανίζονται, τι ποσοστό γλιτώνει, και τι ποσοστό χτυπιέται και από τους δύο;

(β΄) Με δεδομένο ότι μια χήνα έχει χτυπηθεί, ποια είναι η πιθανότητα ότι την πέτυχε ο A μόνο;

(γ΄) Αν εμφανιστούν συνολικά 100 χήνες, ποια είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν ακριβώς 10;

(δ΄) Αν έχουν εμφανιστεί 5 χήνες και έχουν όλες επιβιώσει, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη που θα σκοτωθεί να είναι η 8η;

Λύση:

(α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να πετύχει ο κυνηγός A την χήνα και B το ενδεχόμενο να την πετύχει ο κυνηγός B.
Η χήνα γλιτώνει με πιθανότητα

$$P(A'\cap B') = P(A')P(B') = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε λόγω της ανεξαρτησίας των A, B, άρα και των A', B' (γνωστή ιδιότητα της ανεξαρτησίας). Άρα το ποσοστό που γλιτώνει είναι το $\frac{3}{8}\times 100\%$.
Η χήνα χτυπιέται και από τους δύο με πιθανότητα

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των A, B, στην πρώτη ισότητα. Άρα, το ποσοστό που χτυπιέται και από τους δύο είναι το $\frac{1}{8}\times 100\%$.

(β΄) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(A\cap B'|A\cup B) = \frac{P(«A\cap B')\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B')}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)P(B')}{1-P(A'\cap B')} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{3}{5}.$$

(γ΄) Κάθε μια από τις 100 χήνες γλιτώνει ανεξάρτητα από τις άλλες, και όλες έχουν την ίδια πιθανότητα επιβίωσης, $P(A' \cap B') = \frac{3}{8}$. Επομένως, το πλήθος των χηνών που θα επιβιώσουν περιγράφεται από την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 100$ και $p = \frac{3}{8}$. Κατά τα γνωστά από την διωνυμική κατανομή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$\binom{100}{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\left(1-\frac{3}{8}\right)^{100-10} = \binom{100}{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\left(\frac{5}{8}\right)^{90}.$$

(δ΄) Παρατηρήστε πως ο αριθμός των προσπαθειών μέχρι την πρώτη κατάρριψη περιγράφεται από την γεωμετρική κατανομή, με πιθανότητα επιτυχίας $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = \frac{5}{8}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, προκύπτει πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη χήνα που θα σκοτωθεί να είναι η 3η, δηλαδή $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{5}{8} = \frac{45}{512}$.

6η Ομάδα Ασκήσεων

39. **(Σιοκολατάκια)** Μια φοντανιέρα περιέχει 5 σοκολατάκια με γέμιση λικέρ (και 80 θερμίδες έκαστο), 10 σοκολατάκια με γέμιση πραλίνα (και 100 θερμίδες έκαστο) και 15 σοκολατάκια με γέμιση γουασάμπι (και 120 θερμίδες έκαστο). Τα σοκολατάκια είναι πανομοιότυπα εξωτερικά. Ο Σταύρος επιλέγει να φάει 3 από τα 30 σοκολατάκια, χωρίς προτίμηση στον συνδυασμό από σοκολατάκια που θα επιλέξει. Έστω X το πλήθος από σοκολατάκια λικέρ και Y το πλήθος από σοκολατάκια πραλίνας που θα φάει ο Σταύρος.

(α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y.

(β΄) Ποια είναι η μέση τιμή των θερμίδων που θα καταναλώσει ο Σταύρος τρώγοντας τα 3 σοκολατάκια;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο Σταύρος να μην φάει κανένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι;

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν συνολικά $5+10+15 = 30$ σοκολατάκια και επομένως $\binom{30}{3}$ συνδυασμοί από τριάδες με σοκολατάκια που μπορεί να επιλέξει ο Σταύρος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ ο Σταύρος να επιλέξει x σοκολατάκια λικέρ και y σοκολατάκια πραλίνα, όπου $0 \leq x, y \leq 3$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως αν $x + y > 3$ τότε η πιθανότητα είναι μηδέν, αφού ο Σταύρος θα φάει μόνο 3 σοκολατάκια. Στην περίπτωση που $x+y \leq 3$, παρατηρούμε πως έχουμε $\binom{5}{x}$ τρόπους να επιλέξουμε x σοκολατάκια λικέρ, ακολούθως $\binom{10}{y}$ τρόπους να επιλέξουμε y σοκολατάκια πραλίνας και, τέλος, $\binom{15}{4-x-y}$ τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $3 - x - y$ σοκολατάκια γουασάμπι. Επομένως:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{y}\binom{15}{3-x-y}}{\binom{30}{3}}.$$

Σε μορφή πίνακα:

x \ y	0	1	2	3
0	13/116	15/58	135/812	6/203
1	15/116	75/406	45/812	0
2	15/406	5/203	0	0
3	1/406	0	0	0

(β΄) Υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη μέση τιμή. Ο τρόπος με τις λιγότερες πράξεις είναι ο εξής: έστω C_i, όπου $i = 1, 2, 3$ οι θερμίδες που θα έχει το κάθε σοκολατάκι από τα 3 που θα φάει ο Σταύρος. Παρατηρούμε πως

$$E(C_i) = \frac{5}{30} \times 80 + \frac{10}{30} \times 100 + \frac{15}{30} \times 120 = \frac{320}{3} \simeq 106.67,$$

Η μέση τιμή από θερμίδες που θα καταναλώσει ο Σταύρος θα είναι

$$E\left(\sum_{i=1}^{3} C_i\right) = 3E(C_i) = 320.$$

Παρατηρήστε ότι τα C_i, $i = 1, 2, 3$, δεν είναι ανεξάρτητα, παρόλα αυτά οι άνω υπολογισμοί είναι σωστοί. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σκέλος:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{58} + \frac{135}{812} + \frac{6}{203}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{116} + \frac{75}{406} + \frac{45}{812}\right) + 2 \cdot \left(\frac{15}{406} + \frac{5}{203}\right) + 3 \cdot \frac{1}{406} \\
&= \frac{1}{2}, \\
E(Y) &= 0 \cdot \left(\frac{13}{116} + \frac{15}{116} + \frac{15}{406} + \frac{1}{406}\right) + 1 \cdot \left(\frac{15}{58} + \frac{75}{406} + \frac{5}{203}\right) + 2 \cdot \left(\frac{135}{812} + \frac{45}{812}\right) + 3 \cdot \frac{6}{203} \\
&= 1, \\
E(C) &= E(80X + 100Y) = 80E(X) + 100E(Y) = 140.
\end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι οι μέσες τιμές $E(X)$ και $E(Y)$ θα μπορούσαν να υπολογιστούν με λιγότερες πράξεις παρατηρώντας, εναλλακτικά, πως $X = X_1 + X_2 + X_3$ και $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ όπου οι X_i και Y_i, $i = 1, 2, 3$, κατάλληλα ορισμένες Τ.Μ. Bernoulli.

(γ΄) Έστω D το ενδεχόμενο ο Σταύρος να μην φάει ούτε ένα σοκολατάκι με γέμιση γουασάμπι. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λυθεί η άσκηση. Ο πρώτος είναι να κάνουμε χρήση του πρώτου σκέλους:

$$P(D) = P(X+Y=3) = \frac{1}{406} + \frac{5}{203} + \frac{45}{812} + \frac{6}{203} = \frac{13}{116}.$$

Εναλλακτικά, έστω $A_i, i = 1, 3$ το ενδεχόμενο το σοκολατάκι i να μην είναι με γέμιση γουασάμπι. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) = \frac{15}{30} \times \frac{14}{29} \times \frac{13}{28} = \frac{13}{116}.$$

Τέλος, μια τρίτη λύση είναι να παρατηρήσουμε πως υπάρχουν $\binom{15}{3}$ συνδυασμοί από σοκολατάκια χωρίς γουασάμπι, επομένως

$$P(D) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{15 \times 14 \times 13}{30 \times 29 \times 28} = \frac{13}{116}.$$

40. **(Σάντουιτς και ψάρια)** Ένας διαγωνιζόμενος σε ένα παιχνίδι επιβίωσης προσφέρει στην ομάδα του κάθε μέρα ένα τυχαίο πλήθος X από σάντουιτς και ένα τυχαίο πλήθος Y από ψάρια, για τα οποία οι πιθανότητες $P(X=x, Y=y)$ δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα.

x / y	0	1	2	3
0	1/8	1/8	1/8	1/16
1	1/8	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά των X και Y;

(β΄) Είναι τα X, Y ανεξάρτητα;

(γ΄) Με δεδομένο ότι κάθε σάντουιτς έχει 1024 θερμίδες και κάθε ψάρι έχει 512 θερμίδες, με ποιο τρόπο συνεισφέρει κατά μέσο όρο περισσότερες θερμίδες ο παίκτης, με τα σάντουιτς ή με τα ψάρια;

(δ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να συνεισφέρει συνολικά στην ομάδα, σε μια μέρα, περισσότερες από 3000 θερμίδες;

Λύση:

(α΄) Η μάζα της X είναι η

$$p_X(0) = \frac{5}{16},\ p_X(1) = \frac{1}{4},\ p_X(2) = \frac{1}{4},\ p_X(3) = \frac{3}{16},$$

και η μάζα της Y είναι η

$$p_Y(0) = \frac{7}{16},\ p_Y(1) = \frac{5}{16},\ p_Y(2) = \frac{1}{4},$$

επομένως

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times \frac{5}{16} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{16} = \frac{21}{16},\\
E(Y) &= 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{16},\\
E(X^2) &= 0^2 \times \frac{5}{16} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{3}{16} = \frac{47}{16},\\
E(Y^2) &= 0^2 \times \frac{7}{16} + 1^2 \times \frac{5}{16} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{21}{16},\\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{311}{256},\\
\mathrm{VAR}(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{167}{256}.
\end{aligned}$$

(β΄) Τα X, Y δεν είναι ανεξάρτητα, διότι, για παράδειγμα, $P(X=1,\ Y=1) = \frac{1}{16}$, ενώ $P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{64} \neq \frac{1}{16}$.

(γ΄) Οι θερμίδες που προσφέρει ο παίκτης από τα σάντουιτς είναι, κατά μέσο όρο, $E(1024X) = 1344$, ενώ οι θερμίδες που προσφέρει ο παίκτης από τα ψάρια είναι, κατά μέσο όρο, $E(512Y) = 416$, οπότε ο παίκτης προσφέρει περισσότερες θερμίδες από τα σάντουιτς.

(δ΄) Ο παίκτης θα συνεισφέρει πάνω από 3000 θερμίδες αν φέρει 3 σάντουιτς και οποιονδήποτε αριθμό ψαριών, ή 2 σάντουιτς και 2 ψάρια. Αυτό γίνεται με πιθανότητα

$$P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)+P(X=2,Y=2)=\frac{1}{4}.$$

41. **(Ποδόσφαιρο)** Στο ετήσιο αρκαδικό clasico μεταξύ των ποδοσφαιρικών ομάδων του Ζυγοβιστίου και της Τριπόλεως, βάσει ιστορικών δεδομένων έχει υπολογιστεί ότι οι ασυγκράτητοι λεβέντες του Ζυγοβιστίου σκοράρουν X γκολ, ενώ τα κουρασμένα παλικάρια της Τρίπολης μόλις Y γκολ, σύμφωνα με τις ακόλουθες περιθώριες μάζες πιθανότητας:

$$p_X(x)=\frac{1}{5}, \quad x=0,1,2,3,4,$$

$$p_Y(0)=\frac{1}{2},\ p_Y(1)=\frac{1}{4},\ p_Y(2)=\frac{1}{4}.$$

(α΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητάς τους, $p_{XY}(x,y)$;

(β΄) Αν δίνεται ότι οι Τ.Μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(γ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

(δ΄) Αν οι Τ.Μ. X και Y ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες, αλλά πρέπει να έχουν τις άνω περιθώριες μάζες, ποια είναι η ΕΛΑΧΙΣΤΗ δυνατή πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη;

Λύση:

(α΄) Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y), \quad \forall x\in\{0,1,2,3,4\},\ y\in\{0,1,2\},$$

και τελικά προκύπτει ο παρακάτω πίνακας που δίνει την $p_{XY}(x,y)$:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
1	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
2	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20

(β΄) Για να κερδίσει η Τρίπολη, πρέπει να έρθει το σκορ $1-0$, $2-1$, ή $2-0$ υπέρ της. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2)=\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}.$$

(γ΄) Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, πρέπει να επιλέξουμε τιμές για τους διάφορους συνδυασμούς των (x,y) που εμφανίζονται ως ορίσματα της από κοινού μάζας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	0	0	1/6	1/6	1/6
1	1/5	0	1/60	1/60	1/60
2	0	1/5	1/60	1/60	1/60

Επομένως, η μέγιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+0=\frac{2}{5}.$$

(δ΄) Παρόμοια, τώρα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2),$$

φροντίζοντας οι περιθώριες μάζες να είναι οι δοσμένες. Μια επιλογή είναι η ακόλουθη:

x / y	0	1	2	3	4
0	1/5	1/5	1/10	0	0
1	0	0	1/20	1/10	1/10
2	0	0	1/20	1/10	1/10

Επομένως, η ελάχιστη πιθανότητα να κερδίσει η Τρίπολη είναι

$$P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)+P(X=0,\ Y=2)=0.$$

42. **(Πεπόνια)** Σε ένα καλάθι υπάρχουν 5 πεπόνια, εκ των οποίων τα 2 είναι καλά, και τα άλλα τρία χαλασμένα. Αρχίζουμε και κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα δύο καλά, και μετά σταματάμε. (Επομένως, ενδεχομένως υπάρχουν κάποια χαλασμένα πεπόνια που δεν θα κόψουμε.) Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό, και έστω Y το πλήθος των ΕΠΙΠΛΕΟΝ πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε και το δεύτερο καλό. Επομένως, οι Τ.Μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η από κοινού μάζα πιθανότητας των Τ.Μ. X, Y; Υπολογίστε τις $E(X), E(Y), \mathrm{COV}(X, Y)$.

Λύση: Αφού οι X, Y λαμβάνουν τις τιμές $1, 2, 3, 4$, συνολικά πρέπει να εξετάσουμε $4 \times 4 = 16$ περιπτώσεις, για να προσδιορίσουμε την από κοινού μάζα πιθανότητας. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(X=1,Y=1) &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=2) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=3) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=1,Y=4) &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=2) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=2,Y=3) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=3,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},\\
P(X=3,Y=2) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10},\\
P(X=4,Y=1) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Όλα τα άλλα ζεύγη έχουν μηδενική πιθανότητα να συμβούν. Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ζεύγη με θετική πιθανότητα έχουν την ίδια πιθανότητα. Πράγματι, έχουμε να τοποθετήσουμε τα δύο καλά πεπόνια σε δύο από 5 διαθέσιμες θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{2}=10$ τρόπους, όλους με την ίδια πιθανότητα (λόγω συμμετρίας), άρα αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$. Προκύπτει επομένως η ακόλουθη από κοινού μάζα:

x / y	1	2	3	4	$p_Y(y)$
1	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$4/10$
2	$1/10$	$1/10$	$1/10$	0	$3/10$
3	$1/10$	$1/10$	0	0	$2/10$
4	$1/10$	0	0	0	$1/10$
$p_X(x)$	$4/10$	$3/10$	$2/10$	$1/10$	

Ακολούθως, εύκολα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\
E(Y) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = 2, \\
E(XY) &= \frac{1}{10} \times (1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1) \\
&= \frac{35}{10}, \\
\mathrm{COV}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{35}{10} - 2 \times 2 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ήταν αναμενόμενο ότι η συνδιακύμανση είναι αρνητική. Πράγματι, αν αργήσουμε να βρούμε το πρώτο καλό πεπόνι, σημαίνει ότι έχουνε ανοίξει πολλά χαλασμένα, επομένως θα είναι πλέον πιο εύκολο να βρούμε το δεύτερο καλό πεπόνι.

43. **(Λαχειοφόρος αγορά)** Σε μια λαχειοφόρο αγορά υπάρχουν 8 λαχνοί, εκ των οποίων κερδίζουν οι δύο, από ένα δώρο ο καθένας (τα δύο δώρα είναι πανομοιότυπα). Δύο άτομα αγοράζουν από δύο λαχνούς ο καθένας. Έστω $X, Y \in \{0, 1, 2\}$ το πλήθος των δώρων που κερδίζει ο καθένας.

(α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y)$, για κάθε $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$. Αποτυπώστε τη σε ένα πίνακα 3×3.

(β΄) Βάσει του προηγούμενου σκέλους, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A να πάρουν και τα δύο δώρα οι δύο διαγωνιζόμενοι; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας (οποιοσδήποτε) από τους δύο να πάρει και τα δύο δώρα; Επίσης, υπολογίστε τις μάζες $p_X(x)$, $p_Y(y)$, τις μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, και την συνδιακύμανση $\mathrm{COV}(X, Y)$.

Δώστε όλα τα αποτελέσματα σε μορφή απλών κλασμάτων.

Λύση:

(α΄) Αφού $X, Y \in \{0, 1, 2\}$, πρέπει να υπολογίσουμε 9 τιμές συνολικά. Παρατηρήστε όμως ότι

$$p_{XY}(2,2) = p_{XY}(2,1) = p_{XY}(1,2) = 0,$$

αφού έχουμε μόνο 2 δώρα. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας, $p_{XY}(0,1) = p_{XY}(1,0)$ και $p_{XY}(0,2) = p_{XY}(2,0)$. Άρα, τελικά μας μένει να υπολογίσουμε 4 τιμές της από κοινού μάζας, τις $p_{XY}(0,0)$, $p_{XY}(1,1)$, $p_{XY}(1,0)$, $p_{XY}(2,0)$.

Η $p_{XY}(0,0)$ ισούται με την πιθανότητα να πάρουμε 4 λαχνούς από 8, εκ των οποίων δύο κερδίζουν, και να μην επιλέξουμε κανέναν από τους δύο. Άρα,

$$p_{XY}(0,0) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{14}.$$

Η $p_{XY}(2,0)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 8, και να πετύχει και τους δύο λαχνούς που κερδίζουν. Άρα,

$$p_{XY}(2,0) = \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}.$$

Η $p_{XY}(1,0)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 8, και να πετύχει ένα λαχνό που κερδίζει, ενώ ο δεύτερος να επιλέξει 2 λαχνούς ανάμεσα σε 6 λαχνούς που περιέχουν ένα που κερδίζει και να μην τον βρει. Άρα,

$$p_{XY}(1,0) = \frac{2 \times 6 \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{2}{7}.$$

Η $p_{XY}(1,1)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 8, και να πετύχει ένα λαχνό που κερδίζει, ενώ ο δεύτερος να επιλέξει ανάμεσα σε 6 λαχνούς που περιέχουν ένα που κερδίζει και να τον βρει. Άρα,

$$p_{XY}(1,1) = \frac{2 \times 6 \times 1 \times 5}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{1}{7}.$$

Συγκεντρωτικά, έχουμε τον πίνακα

x / y	0	1	2
0	6/28	8/28	1/28
1	8/28	4/28	0
2	1/28	0	0

(β´) Με χρήση του πίνακα, βρίσκουμε πως

$$\begin{aligned} P(A) &= p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,0) + p_{XY}(0,2) = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{3}{14}, \\ P(B) &= p_{XY}(2,0) + p_{XY}(0,2) = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Έχοντας την από κοινού μάζα, εύκολα βρίσκουμε πως

$$\begin{aligned} p_X(0) &= p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) = \frac{15}{28}, \\ p_X(1) &= p_{XY}(1,0) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) = \frac{3}{7}, \\ p_X(2) &= p_{XY}(2,0) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) = \frac{1}{28}, \end{aligned}$$

ενώ λόγω συμμετρίας

$$p_Y(0) = \frac{15}{28}, \quad p_Y(1) = \frac{3}{7}, \quad p_Y(2) = \frac{1}{28}.$$

Άρα,

$$E(X) = E(Y) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2},$$

και

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{28}.$$

44. **(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε από τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι από κάθε είδος;

Λύση: Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από την στιγμή που έχουμε δει $i-1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι την στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό από τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i = (n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i = n/(n-i+1)$. Επειδή $X = X_1 + \cdots + X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \simeq n \log n.$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει για μεγάλα n, λόγω της διπλής ανισότητας

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Και τα δύο σκέλη μπορούν να αποδειχτούν αν συγκρίνετε την $f(x) = 1/x$ με κατάλληλα ορισμένη κλιμακωτή συνάρτηση και πάρετε το ολοκλήρωμα από 1 έως n. Το άθροισμα είναι γνωστό ως αρμονική σειρά.

45. **(Η μέθοδος της γάτας)** Ένας διδάσκων διορθώνει 200 γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο της γάτας. Συγκεκριμένα, απλώνει τα 200 γραπτά στο πάτωμα ενός δωματίου, και βάζει μια γάτα να κάνει 1000 πατημασιές πάνω σε αυτά. Κάθε πατημασιά είναι εξίσου πιθανό να καταλήξει σε οποιοδήποτε από τα 200 γραπτά, ανεξάρτητα από τις άλλες πατημασιές. Ο βαθμός κάθε φοιτητή είναι ίσος με το πλήθος των πατημασιών στο γραπτό του, εκτός αν το πλήθος αυτό ξεπερνά το 10, οπότε ο βαθμός είναι 10. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α´) Έστω ένας συγκεκριμένος φοιτητής A. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βαθμό 3 ο A;

(β΄) Κατά μέσο όρο πόσες πατημασιές έχει το γραπτό του A;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να περάσει ο φοιτητής A το μάθημα;

(δ΄) Ποια είναι η μέση τιμή του πλήθους των φοιτητών που θα περάσουν;

Λύση:

(α΄) Έστω Y το πλήθος των πατημασιών στο συγκεκριμένο γραπτό. Ο φοιτητής θα πάρει βαθμό 3 αν $Y = 3$. Παρατηρούμε ότι κάθε μια από τις 1000 πατημασιές θα είναι στο συγκεκριμένο γραπτό με πιθανότητα $\frac{1}{200}$ ανεξάρτητα από τις άλλες, επομένως το πλήθος των πατημασιών θα είναι κατανεμημένο διωνυμικά, με παραμέτρους $N = 1000$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = \frac{1}{200}$ (η πιθανότητα επιτυχίας του κάθε πειράματος). Επομένως, κατά τα γνωστά από την διωνυμική κατανομή, η πιθανότητα να πάρει 3 ο φοιτητής είναι

$$P(Y = 3) = \binom{1000}{3} \left(\frac{1}{200}\right)^3 \left(\frac{199}{200}\right)^{997} = 0.1403.$$

Επειδή το N είναι πολύ μεγάλο και το p πολύ μικρό, με το γινόμενό τους κοντά στο ένα, προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = \frac{1000}{200} = 5$, βάσει της οποίας η άνω ποσότητα είναι περίπου

$$P(Y = 3) \simeq e^{-5} \frac{5^3}{3!} = 0.1404.$$

(β΄) Κατά τα γνωστά από την διωνυμική κατανομή, έχουμε $E(Y) = Np = \frac{1000}{200} = 5$.
Εναλλακτικά, σκεφτόμαστε ως εξής: έστω ένα συγκεκριμένο γραπτό, και έστω I_i, με $i = 1, \ldots, 1000$, Τ.Μ. Bernoulli ίσες με 1 αν η αντίστοιχη πατημασιά ήταν στο συγκεκριμένο γραπτό (με πιθανότητα $\frac{1}{200}$), και 0 αλλιώς. Το πλήθος των πατημασιών στο συγκεκριμένο γραπτό είναι $Y = \sum_{i=1}^{1000} I_i$, και επομένως

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{1000} I_i\right) = 1000E(I_i) = 1000 \times \left[1 \times \frac{1}{200} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{200}\right)\right] = 5.$$

(γ΄) Ένας φοιτητής δεν θα περάσει το μάθημα αν η γάτα πατήσει το γραπτό του 0 έως και 4 φορές. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(Y < 5) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \\ &= \sum_{i=0}^{4} \binom{1000}{i} \left(\frac{1}{200}\right)^i \left(\frac{199}{200}\right)^{1000-i} = 0.4401, \end{aligned}$$

επομένως η πιθανότητα να περάσει ο φοιτητής είναι $1 - 0.4401 = 0.5599$.
Εναλλακτικά, και με λιγότερες πράξεις, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Poisson, έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y < 5) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \\ &\simeq \sum_{i=0}^{4} e^{-5} \frac{5^i}{i!} = 0.4405, \end{aligned}$$

επομένως η πιθανότητα να περάσει ο φοιτητής είναι $1 - 0.4401 = 0.5595$.

(δ΄) Παρατηρήστε ότι οι φοιτητές δεν περνάνε ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Αν περάσει κάποιος, αυτό αυξάνει κάπως την εκτίμησή μας για το πόσες φορές πάτησε το γραπτό του η γάτα, και επομένως μειώνεται κάπως η εκτίμησή μας για το πόσες φορές πάτησε η γάτα το γραπτό κάποιου άλλου. Επειδή τα πλήθη των πατημασιών και των γραπτών είναι μεγάλα, αναμένουμε ότι η αρνητική αυτή συσχέτιση μεταξύ των ενδεχόμενων επιτυχίας των φοιτητών θα είναι μικρή. Ανεξάρτητα πάντως από αυτή τη συσχέτιση, μπορούμε να λύσουμε αυτό το σκέλος ως ακολούθως: Έστω P_i, $i = 1, \ldots, 200$ Τ.Μ. Bernoulli που ισούνται με 1 αν ο φοιτητής i περάσει το μάθημα και 0 αν δεν το περάσει. Το πλήθος των φοιτητών που θα περάσουν το μάθημα είναι $\sum_{i=1}^{200} P_i$, επομένως

$$E\left(\sum_{i=1}^{200} P_i\right) = \sum_{i=1}^{200} E(P_i) = 200 \times [1 \times 0.5599 + 0 \times (1 - 0.5599)] = 111.98,$$

δηλαδή θα περάσουν το μάθημα κατά μέσο όρο περίπου 112 φοιτητές.

7η Ομάδα Ασκήσεων

46. **(Συνδυασμός πυκνοτήτων)** Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο πυκνότητες πιθανότητας, των Τ.Μ. X και Y αντίστοιχα. Έστω η συνάρτηση $h(x) = af(x) + (1-a)g(x)$, όπου $a \in (0,1)$.

   (α΄) Να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι επίσης πυκνότητα πιθανότητας, έστω μιας Τ.Μ. Z.

   (β΄) Πόση είναι η $E(Z)$;

   (γ΄) Πόση είναι η $E\left(Z^2\right)$;

   (δ΄) Πόση είναι η $\mathrm{VAR}(Z)$;

   Οι απαντήσεις σας στα σκέλη (β’), (γ’), (δ’) να δοθούν συναρτήσει των $E(X)$, $E(Y)$, $E\left(X^2\right)$, $E\left(Y^2\right)$ και a.

   Λύση:

   (α΄) Η $h(x)$ είναι παντού μη αρνητική, αφού $a > 0, 1-a > 0$, $f(x) \geq 0$, και $g(x) \geq 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει ολοκλήρωμα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ ίσο με τη μονάδα. Πράγματι,

   $$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + (1-a)g(x))\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = a + (1-a) = 1.$$

   Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πυκνότητες, επομένως το ολοκλήρωμά τους είναι μονάδα.

   (β΄) Θα έχουμε:

   $$\begin{aligned} E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(af(x) + (1-a)g(x)\right)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx = aE(X) + (1-a)E(Y). \end{aligned}$$

   (γ΄) Με ανάλογες πράξεις, έχουμε

   $$\begin{aligned} E\left(Z^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(af(x) + (1-a)g(x)\right)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\,dx = aE\left(X^2\right) + (1-a)E\left(Y^2\right). \end{aligned}$$

   (δ΄) Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα σκέλη, έχουμε τελικά

   $$\mathrm{VAR}(Z) = E\left(Z^2\right) - (E(Z))^2 = aE\left(X^2\right) + (1-a)E\left(Y^2\right) - (aE(X) + (1-a)E(Y))^2.$$

47. **(Εμβόλια)** Δύο φαρμακευτικές εταιρίες ετοιμάζουν εμβόλια για τον κορονοϊό. Το πρώτο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από ένα τυχαίο χρόνο X, μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα

   $$f(x) = \begin{cases} k_1 e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

   Το δεύτερο εξ αυτών θα είναι έτοιμο μετά από τυχαίο χρόνο Y, επίσης μετρούμενο σε έτη, που ακολουθεί την πυκνότητα πιθανότητας

   $$g(y) = \begin{cases} k_2 y(1-y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

   Οι X, Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

   (α΄) Προσδιορίστε την τιμή της k_1.

   (β΄) Προσδιορίστε την τιμή της k_2.

   (γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε μισό τουλάχιστον χρόνο για να γίνει διαθέσιμο κάποιο εμβόλιο, είτε το ένα είτε το άλλο;

   Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow k_1 \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow k_1 \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

(β΄) Ομοίως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = 1 \Leftrightarrow k_2 \int_0^1 y(1-y)\,dy = 1 \Leftrightarrow k_2 []_0^1 = 1 \Leftrightarrow k_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 1 \Leftrightarrow k_2 = 6.$$

(γ΄) Θα περιμένουμε μισό τουλάχιστον χρόνο, αν και τα δύο εμβόλιο χρειαστούν πάνω από μισό χρόνο. Λόγω ανεξαρτησίας, αυτό θα γίνει με πιθανότητα $P\left(X > \frac{1}{2}\right) P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$. Όμως

$$P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = k_1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}\,dx = k_1 \left[-e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-1}},$$

και

$$P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) = k_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 y(1-y)\,dy = k_2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 6\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{2}.$$

Άρα τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{2(1-e^{-1})}.$$

48. **(Ακέραιο μέρος)** Έστω η συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c + \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c;

(β΄) Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;

(γ΄) Ορίζουμε την Τ.Μ. $Y = \lfloor X \rfloor$, δηλαδή το ακέραιο μέρος του X. (Επομένως, το Y είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον X.) Ποια είναι η μάζα του Y;

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(c + \frac{x}{4}\right)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(cx + \frac{x^2}{8}\right)'\,dx = 1 \Leftrightarrow 2c + \frac{4}{8} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 2 και βάσεων με μήκη c και $c + \frac{1}{2}$.

(β΄) Έχουμε:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 x\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{4}\right)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x+x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)'\,dx = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

(γ΄) Η Τ.Μ. Y μπορεί να λάβεις τις τιμές 0 και 1, και η μάζα της υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(0 \leq X < 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(x+1)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right)'\,dx = \frac{3}{8}, \\ P(Y=1) &= 1 - P(Y=0) = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Οι άνω πιθανότητες θα μπορούσαν να υπολογιστούν παρατηρώντας ότι η πρώτη ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 1 και πλευρών $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$, και η δεύτερη ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου ύψους 1 και πλευρών $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$.

49. **(Πατάτες)** Πρόσφατες έρευνες γεωπόνων έδειξαν ότι το βάρος μιας πατάτας από την περίφημη ποικιλία Ζυγοβιστίου είναι Τ.Μ. X με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δίνεται επίσης ότι $E(X) = 1$.

(α΄) Προσδιορίστε τις τιμές των παραμέτρων a, B.

(β΄) Να υπολογίσετε τα $P(X < 1)$ και $\mathrm{VAR}(X)$. (Αν δεν έχετε υπολογίσει τις τιμές των a, B, δώστε τη λύση σας συναρτήσει αυτών.)

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το ολοκλήρωμα της πυκνότητας πρέπει να είναι μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 (ax + bx^2)\,dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^2 x\,dx + b\int_0^2 x^2\,dx = 1$$
$$\Leftrightarrow a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow 2a + \frac{8}{3}b = 1.$$

Επιπλέον, δίνεται ότι $E(X) = 1$, επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(ax^2 + bx^3\right)\,dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^2 x^2\,dx + b\int_0^2 x^3\,dx = 1$$
$$\Leftrightarrow a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + b\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 4b = 1.$$

Από το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει, μπορούμε να βρούμε ότι $a = \frac{3}{2}$ και $b = -\frac{3}{4}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(X < 1) &= \int_0^1 (ax + bx^2)\,dx = a\int_0^1 x\,dx + b\int_0^1 x^2\,dx \\
&= a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1}{2}, \\
E(X^2) &= \int_0^2 x^2(ax + bx^2)\,dx = a\int_0^2 x^3\,dx + b\int_0^2 x^4\,dx = \left[a\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + b\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 \\
&= 4a + \frac{32b}{5} = \frac{6}{5}, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

50. **(Κατανομή πιθανότητας)** Μια συνεχής Τ.Μ. X έχει κατανομή

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}, \\ A(1 + \sin(Bx)), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \le x. \end{cases}$$

(α΄) Βρείτε τα A, B.

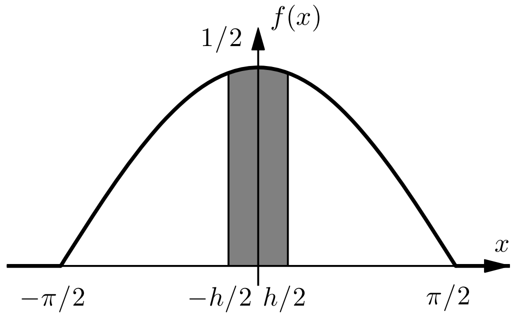
(β΄) Σχεδιάστε την $F(x)$.

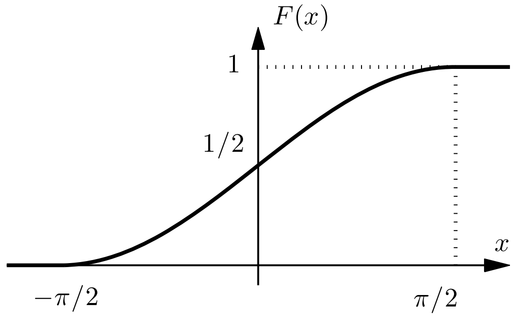
(γ΄) Βρείτε τη πυκνότητα $f(x)$ της X και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

(δ΄) Ποιο διάστημα του συνόλου τιμών X, μήκους h, είναι το πιο πιθανόν; (Υποθέτουμε πως $0 < h < \pi$.)

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η κατανομή της Τ.Μ. X πρέπει να είναι μη αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι $A \ge 0$, ενώ και η περίπτωση $A = 0$ αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε μια ασυνέχεια (στο $x = \frac{\pi}{2}$) που επίσης





Σχήμα 3: Άσκηση 50.

αποκλείεται από τη θεωρία. Άρα καταρχάς $A > 0$. Επιπλέον, η κατανομή πρέπει να μην φθίνει πουθενά, και συνεπώς $B \in [0, 1]$. Επίσης, για να μην έχει η $F(x)$ ασυνέχεια στο σημείο $x = -\frac{\pi}{2}$ θα πρέπει

$$A\left[1 + \sin\left(-\frac{B\pi}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \sin\left(-\frac{B\pi}{2}\right) = -1,$$

και η μόνη τιμή του B εντός του $[0, 1]$ που εξασφαλίζει το άνω είναι η $B = 1$.
Τέλος, για να μην έχει η $F(x)$ ασυνέχεια στο $x = \frac{\pi}{2}$, θα πρέπει

$$A\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow A(1 + 1) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Άρα τελικά

$$B = 1, \qquad A = \frac{1}{2},$$

και η κατανομή της X είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x. \end{cases}$$

(β΄) Η κατανομή $F(x)$ της X έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.

(γ΄) Η πυκνότητα $f(x)$ της X προκύπτει με απλή παραγώγιση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Η $f(x)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3.

(δ΄) Το πιο πιθανό διάστημα μήκους h του συνόλου τιμών της X είναι αυτό στο οποίο το ολοκλήρωμα της πυκνότητας μεγιστοποιείται. Καθώς η πυκνότητα είναι άρτια συνάρτηση, γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, προκύπτει πως το ζητούμενο διάστημα είναι το $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, και η αντίστοιχη πιθανότητα η

$$P(-\frac{h}{2} \leq X \leq \frac{h}{2}) = F(\frac{h}{2}) - F(-\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(-\frac{h}{2}\right)\right) = \sin\frac{h}{2}.$$

51. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v}e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως ένας φοιτητής θα περάσει αν και μόνο αν $Y \geq 5$, επομένως απαιτούμε

$$\int_5^\infty \frac{1}{v}e^{-x/v}\,dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \int_5^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\,dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0 + e^{-5/v} = \frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{5}{v} = -\log 10 \Leftrightarrow v = \frac{5}{\log 10} \simeq 2.1715.$$

(β΄) Ειδικά για την περίπτωση $k = 10$, έχουμε

$$P(Y = 10) = \int_{10}^\infty \frac{1}{v}e^{-x/v}\,dx = \int_{10}^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\,dx = e^{-10/v}.$$

Στις περιπτώσεις $k = 0, 1, \ldots, 9$, έχουμε

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{v}e^{-x/v}\,dx = \int_k^{k+1} \left(-e^{-x/v}\right)'\,dx = e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}.$$

Σχετικά με τη μέση τιμή της άνω Τ.Μ. Y, κατά τα γνωστά από τον ορισμό της μέσης τιμής διακριτών Τ.Μ., έχουμε

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{10} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{9} k\left[e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}\right] + 10\left[e^{-10/v}\right].$$

52. **(Χημείο)** Στην αρχή μιας δίωρης εξέτασης, στο Χημείο βρίσκονται 60 φοιτητές. Κάθε ένας από αυτούς θα αποχωρήσει από την εξέταση μετά από ένα τυχαίο χρόνο X ο οποίος μετράται σε ώρες και έχει την ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Οι χρόνοι αποχώρησης διαφορετικών φοιτητών είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου X;

(β΄) Έστω Y το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν στην αίθουσα ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης. Ποια είναι η μάζα, η μέση τιμή, και η διασπορά του Y;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(1+x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)' dx \\
&= \frac{1}{4}\left(2+\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{14}{3} = \frac{7}{6} \simeq 1.1667, \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^2(1+x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)' dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+4\right) = \frac{1}{4}\times\frac{20}{3} = \frac{5}{3} \simeq 1.6667, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} \simeq 0.3056.
\end{aligned}$$

(β΄) Ακριβώς μια ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης, κάθε φοιτητής θα έχει αποχωρήσει με πιθανότητα

$$P(X \le 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(1+x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x+\frac{x^2}{2}\right)' dx = \frac{1}{4}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{8} \simeq 0.3750.$$

Υπάρχουν 60 φοιτητές, καθένας εκ των οποίων θα έχει φύγει στο τέλος της μιας ώρας ανεξάρτητα από του υπόλοιπους με πιθανότητα $\frac{3}{8}$. Επομένως, το πλήθος των φοιτητών που παραμένουν ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους (πλήθος πειραμάτων) $N = 60$ και (πιθανότητα επιτυχίας) $p = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Επομένως, κατά τα γνωστά για τη διωνυμική κατανομή,

$$\begin{aligned}
P(Y=y) &= \binom{60}{y}\left(\frac{5}{8}\right)^y\left(\frac{3}{8}\right)^{60-y}, \qquad y = 1,\ldots,60, \\
E(Y) &= Np = 60\times\frac{5}{8} = \frac{75}{2} \simeq 37.5, \\
\mathrm{VAR}(Y) &= Np(1-p) = 60\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{225}{16} \simeq 14.0625.
\end{aligned}$$

8η Ομάδα Ασκήσεων

53. **(Κώστας και Δώρα)** Όταν ο Κώστας και η Δώρα κάνουν check-in για να παραδώσουν τις αποσκευές τους πριν από την πτήση, και έχουν την επιλογή να περιμένουν σε μια από δύο ουρές, αντί να περιμένουν μαζί σε μια ουρά κάθονται σε μια ουρά ο καθένας, και όποιος φτάσει πρώτος να εξυπηρετηθεί, φωνάζει τον άλλο στην ουρά του, και αρχίζει η εξυπηρέτηση και των δύο ταυτόχρονα.

Υποθέτουμε ότι ο Κώστας θα χρειαστεί χρόνο μέχρι να αδειάσει η δικιά του ουρά και να αρχίσει να εξυπηρετείται ίσο με X, και η Δώρα αντίστοιχα χρόνο ίσο με Y, όπου η X και η Y είναι εκθετικές Τ.Μ. με μέση τιμή 1, ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου Z ο οποίος χρειάζεται για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση του πρώτου (και επομένως και του δεύτερου, βάσει του κανόνα που ακολουθούν);

(β΄) Ποια είναι η κατανομή και η μέση τιμή του χρόνου W που γλιτώνει από την αναμονή του ο ένας από τους δύο; (Παρατήρηση: προφανώς ο άλλος δεν θα γλιτώσει καθόλου χρόνο, γιατί είχε επιλέξει την γρήγορη ουρά).

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως ο χρόνος που θα ξεκινήσει η εξυπηρέτηση και των δύο είναι $Z = \min\{X, Y\}$. Το ελάχιστο δύο εκθετικών Τ.Μ. είναι επίσης εκθετική Τ.Μ., σύμφωνα με τη θεωρία. Ειδικά στην περίπτωσή μας, έχουμε

$$\begin{aligned}
&P(\min\{X,Y\} \le x) = 1 - P(\min(X,Y) \ge x) = 1 - P(X \ge x, Y \ge x) \\
&\qquad\qquad 1 - P(X \ge x)P(Y \ge x) = 1 - e^{-x}e^{-x} = 1 - e^{-2x},
\end{aligned}$$

επομένως πράγματι το ελάχιστο $\min\{X,Y\}$ είναι εκθετική Τ.Μ. με μέση τιμή $\frac{1}{2}$. Επομένως, η εξυπηρέτηση θα αρχίσει κατά μέσο όρο μετά από χρόνο $E(\min\{X,Y\}) = \frac{1}{2}$.

(β΄) Σχετικά με το χρόνο που θα γλιτώσει ο ένας εκ των δύο, παρατηρούμε πως από τη στιγμή που αδειάζει η μία ουρά, η άλλη ουρά θα αδειάσει πάλι μετά από εκθετικό χρόνο με μέση τιμή 1, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης.

54. **(Αριθμητικοί υπολογισμοί με την κανονική κατανομή)** Έστω X μια Τ.Μ. με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

(α΄) Αν $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθούν οι $P(X < 1.22)$ και $P(X > -1.22)$.

(β΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα $P(X > 2.7)$ και η πιθανότητα $P(X < -4.7$ ή $X > 2.7)$.

(γ΄) Αν $\mu = 1$ και $\sigma^2 = 1$, να βρεθεί η $P(X > 2.1$ ή $-1 < X < 1)$.

(δ΄) Αν $\mu = -1$ και $\sigma^2 = 4$, να βρεθούν οι $P(X > 3)$ και $P(X > 3|X > 2)$.

(ε΄) Αν $\mu = -2$ και $\sigma^2 = 3.5$, να βρεθεί η μέση τιμή των $Y = 1 - X^2$ και $Y = (X + 2)^{15}$.

(ς΄) Αν $\mu = 2$, να βρεθεί η τιμή της διασποράς για την οποία $P(X < 0) = 1/3$.

Λύση: Έχουμε, κατά περίπτωση:

(α΄) Αντικαθιστώντας τις σχετικές τιμές της $\Phi(z)$ από τον πίνακα τιμών της Φ, έχουμε

$$\begin{aligned} P(X < 1.22) &= \Phi(1.22) \simeq 0.8888, \\ P(X > -1.22) &= 1 - P(X \leq -1.22) = 1 - \Phi(-1.22) = \Phi(1.22) \simeq 0.8888. \end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε

$$P(X > 2.7) = 1 - P(X \leq 2.7) = 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) = 1 - \Phi(1.7) \simeq 1 - 0.9554 = 0.0446,$$

και

$$\begin{aligned} P(X < -4.7 \text{ ή } X > 2.7) &= P(X < -4.7) + P(X > 2.7) = \Phi\left(\frac{-4.7 - 1}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{2.7 - 1}{1}\right) \\ &= \Phi(-5.7) + 1 - \Phi(1.7) \simeq 0 + 1 - 0.9554 = 0.0446. \end{aligned}$$

(γ΄) Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα,

$$\begin{aligned} P(X > 2.1 \text{ ή } -1 < X < 1) &= P(X > 2.1) + P(-1 < X < 1) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2.1 - 1}{1}\right) + \Phi\left(\frac{1 - 1}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1 - 1}{1}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.1) + \Phi(0) - \Phi(-2) \simeq 1 - 0.8643 + 0.5 - 0.0228 = 0.6129. \end{aligned}$$

(δ΄) Εδώ έχουμε

$$P(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(2) \simeq 0.0228,$$

και

$$P(X > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2 + 1}{2}\right) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 0.0668,$$

οπότε

$$P(X > 3|X > 2) = \frac{P(X > 3, X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 2)} = \frac{1 - \Phi(3)}{1 - \Phi(2)} \simeq 0.0593.$$

(ε΄) Για $Y = 1 - X^2$ έχουμε:

$$E(Y) = E\left((1 - X^2\right) = 1 - E\left(X^2\right) = 1 - (\sigma^2 + \mu^2) = 1 - 3.5 - 4 = -6.5.$$

Για $Y = (X + 2)^{15}$ έχουμε:

$$E(Y) = E\left((X + 2)^{15}\right) = E\left(W^{15}\right),$$

όπου $W = X + 2$ είναι μια Τ.Μ. με κατανομή $N(0, 3.5)$, δηλαδή με μέση τιμή μηδέν. Έστω $f(x)$ η πυκνότητα της W. Παρατηρήστε πως

$$E(Y) = E\left(W^{15}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} f(w)\, dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{15} e^{-w^2/(2\sigma^2)}\, dw.$$

Παρατηρήστε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw &= \int_{-\infty}^{0} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw + \int_{0}^{\infty} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw \\ &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw.\end{aligned}$$

Καθένα από τα άνω όρια είναι πεπερασμένο, γιατί η συνάρτηση $e^{-w^2/(2\sigma^2)}$ μειώνεται πολύ πιο γρήγορα από την w^{15}.

(Αν θέλουμε να κάνουμε μια αυστηρή απόδειξη, μπορούμε να ξεκινήσουμε παρατηρώντας πως με μερικές εφαρμογές του κανόνα L'Hôpital προκύπτει ότι

$$\lim_{w\to\infty}\frac{w^{15}}{e^{w^2/(4\sigma^2)}} = 0,$$

άρα υπάρχει κάποιο W έτσι ώστε για $w > W$ να έχουμε

$$w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)} < e^{w^2/(4\sigma^2)} \times e^{-w^2/(2\sigma^2)} = e^{-w^2/4\sigma^2},$$

του οποίου το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[W,\infty]$ είναι πεπερασμένο. Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στην άνω απόδειξη;)

Επιπλέον, τα δύο όρια είναι αντίθετα, γιατί

$$\int_{-\infty}^{0} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw = -\int_{0}^{\infty} w^{15}e^{-w^2/(2\sigma^2)}\,dw.$$

Αυτό προκύπτει αν κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής $w\to -w$ σε ένα από τα δύο.

Άρα τελικά το άθροισμα των δύο καταχρηστικών ολοκληρωμάτων είναι 0, και τελικά $E[Y] = 0$.

(ς΄) Έχουμε:

$$\begin{aligned}P(X<0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(X-2<0-2) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\frac{X-2}{\sigma} < \frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma = -\frac{2}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}.\end{aligned}$$

Από τον πίνακα τιμών της Φ, βλέπουμε πως για την αντίστροφη της Φ έχουμε $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0.43$, άρα τελικά

$$\sigma \simeq -\frac{2}{-0.43} = 4.65 \Leftrightarrow \sigma^2 \simeq 21.63.$$

55. **(Λεωφορείο)** Βρίσκεστε σε μία στάση λεωφορείων και περιμένετε το επόμενο δρομολόγιο. Από την εμπειρία σας ξέρετε ότι πρόκειται να έρθει οποιαδήποτε χρονική στιγμή στα επόμενα 10 λεπτά, χωρίς κάποιο υποδιάστημα να είναι αναλογικά πιθανότερο από κάποιο άλλο.

    (α΄) Εάν X είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του λεωφορείου, ποια η κατανομή του; Ποιος ο μέσος χρόνος αναμονής;

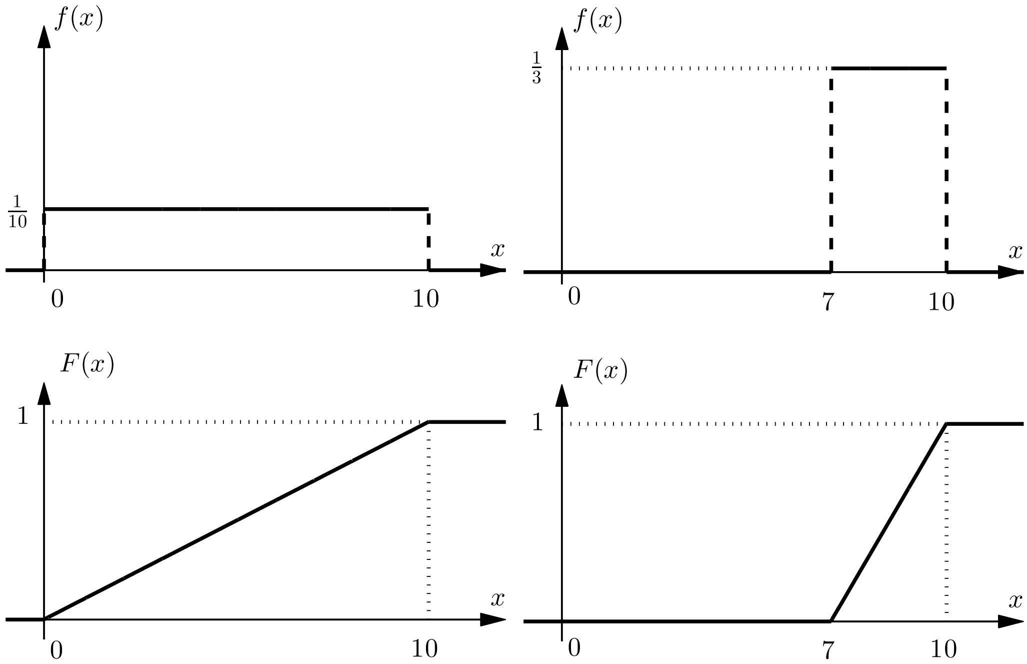
    (β΄) Εάν έχουν περάσει ήδη 7 λεπτά χωρίς να έχει έρθει το λεωφορείο, ποια η πιθανότητα ότι θα περιμένετε για ακόμη ένα λεπτό τουλάχιστον, δηλαδή ποια η τιμή της $P(X > 7+1|X > 7)$;

    (γ΄) Έστω η συνάρτηση $\hat{F}(x) = P(X \le 7+x|X > 7)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και θεωρήστε την παράγωγο $\hat{f}(x) = \hat{F}'(x)$. Σχεδιάστε τη γραφική παράστασή της $\hat{f}(x)$ και συγκρίνετέ τη με την πυκνότητα $f(x)$ της X.

    (δ΄) Τι συμπεραίνετε για το χρόνο άφιξης του λεωφορείου εάν ήδη έχουν περάσει 7 λεπτά χωρίς να έχει έρθει; Είναι λογικό;

    Λύση:

    (α΄) Από την εκφώνηση προκύπτει πως η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 10]$ με μέση τιμή $E(X) = \frac{0+10}{2} = 5$ λεπτά.



Σχήμα 4: Οι πυκνότητες και οι κατανομές της Άσκησης 55.

(β΄) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, άμεσα προκύπτει ότι

$$P(X > 7 + 1|X > 7) = \frac{P(X > 8, X > 7)}{P(X > 7)} = \frac{P(X > 8)}{P(X > 7)} = \frac{1 - 8/10}{1 - 7/10} = \frac{2}{3}.$$

(γ΄) Ομοίως με το προηγούμενο σκέλος,

$$\hat{F}(x) = P(X \leq 7 + x|X > 7) = \frac{P(7 < X \leq 7 + x)}{P(X > 7)} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/3, & 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Άρα

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/3, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3, \end{cases}$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής $U[0, 3]$. Παρατηρήστε ότι είναι διαφορετική κατανομή από την κατανομή $U[0, 10]$ που αντιστοιχεί στην πυκνότητα $f(x)$. Οι δύο πυκνότητες, με τις αντίστοιχες κατανομές τους, έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.

(δ΄) Η $\hat{F}(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του χρόνου που θα περιμένετε το λεωφορείο πέρα των 7 λεπτών εάν ήδη ξέρετε ότι έχει αργήσει 7 λεπτά. Η κατανομή αυτή είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 3]$. Αυτό είναι αναμενόμενο, μιας και ξέρουμε ότι το λεωφορείο δεν πρόκειται να καθυστερήσει πάνω από 3 λεπτά πέρα των 7 λεπτών που ήδη έχει καθυστερήσει. Επίσης, εφόσον η χρονική στιγμή άφιξης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 10]$, τότε εάν αργήσει το λεωφορείο κατά 7 λεπτά, η στιγμή άφιξης θα είναι πάλι ομοιόμορφα κατανεμημένη στα 3 λεπτά που απομένουν. Για αυτό τον λόγο η $\hat{F}(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $U[0, 3]$.

56. **(Κέρμα)** Έστω Τ.Μ. X ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$. Έστω Y Τ.Μ. εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\theta = 1$. Έστω Τ.Μ. Z που ορίζεται ως εξής: ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα και αν έρθει γράμματα, τότε $Z = X$. Αν έρθει κορώνα, τότε $Z = Y$.

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα $P\left(Z < \frac{1}{2}\right)$;

(β΄) Υπολογίστε την κατανομή και την πυκνότητα του Z.

Λύση: Έστω T το ενδεχόμενο το κέρμα να είναι γράμματα.

(α΄) Από τον κανόνα της ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$P\left(Z<\frac{1}{2}\right)=P\left(Z<\frac{1}{2}\Big|T\right)P(T)+P\left(Z<\frac{1}{2}\Big|T'\right)P(T')=P\left(X<\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+P\left(Y<\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

(β΄) Και πάλι με εφαρμογή του κανόνα της ολικής πιθανότητας, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή του Z ως εξής:

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(Z\leq z|T)P(T)+P(Z\leq z|T')P(T')=\frac{1}{2}P(X\leq z)+\frac{1}{2}P(Y\leq z).$$

Κατόπιν, παίρνουμε περιπτώσεις.

i. Καταρχάς, αν $z<0$ τότε

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(X\leq z)+\frac{1}{2}P(Y\leq z)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 0=0.$$

ii. Αν $0\leq z\leq 1$, τότε

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(X\leq z)+\frac{1}{2}P(Y\leq z)=\frac{1}{2}\left(z+1-e^{-z}\right).$$

iii. Τέλος, αν $z>1$ έχουμε

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P(X\leq z)+\frac{1}{2}P(Y\leq z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right)=\frac{1}{2}\left(2-e^{-z}\right).$$

Συνοψίζοντας,

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}\left(z+1-e^{-z}\right), & 0\leq z\leq 1,\\ 1-e^{-z}/2, & z>1,\end{cases}$$

και με παραγώγιση άμεσα προκύπτει

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}\left(1+e^{-z}\right), & 0\leq z\leq 1,\\ e^{-z}/2, & z>1.\end{cases}$$

Η πυκνότητα και η κατανομή έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 5.

57. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο A και πίτσα από το εστιατόριο B. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο A και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο B. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

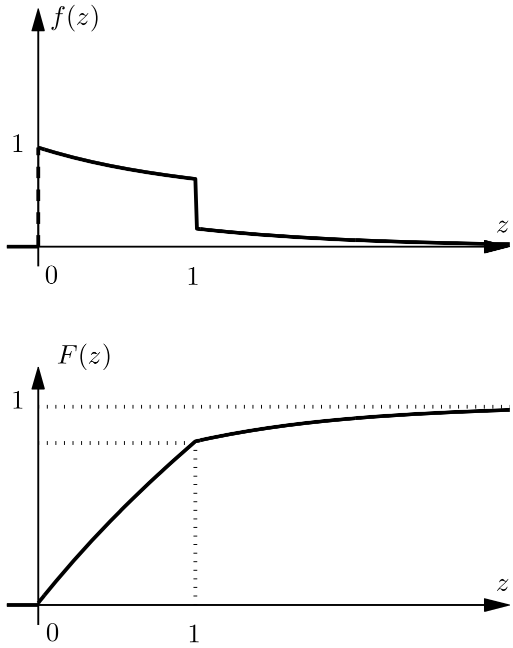
(α΄) Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. *(Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια A και B αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της* $\max(X_A, X_B)$*, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)*

(β΄) Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

Λύση:

(α΄) Εάν $F(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου χρόνου $X=\max(X_A,X_B)$ τότε

$$F(x)=P(\max(X_A,X_B)\leq x)=P(X_A\leq x, X_B\leq x)=P(X_A\leq x)P(X_B\leq x)$$
$$=(1-e^{-x/30})(1-e^{-x/20})=1-e^{-x/30}-e^{-x/20}+e^{-x/12},$$



Σχήμα 5: Η πυκνότητα και η κατανομή της Άσκησης 56.

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των X_A, X_B. Άρα η πυκνότητα $f(x)$ της X είναι

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{30}e^{-x/30} + \frac{1}{20}e^{-x/20} - \frac{1}{12}e^{-x/12}.$$

Συνεπώς η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{30}e^{-x/30}dx + \int_0^\infty \frac{x}{20}e^{-x/20}dx - \int_0^\infty \frac{x}{12}e^{-x/12}dx \\ &= 30 + 20 - 12 = 38. \end{aligned}$$

Το ολοκληρώματα προκύπτουν παρατηρώντας πως ισούνται με τις μέσες τιμές εκθετικών Τ.Μ. με παραμέτρους 30, 20, και 12 αντιστοίχως.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή του πιο σύντομου χρόνου $\min(X_A, X_B)$. Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής:

$$\begin{aligned} P(\min(X_A, X_B) \le x) &= 1 - P(\min(X_A, X_B) > x) = 1 - P(X_A > x, X_B > x) \\ &= 1 - P(X_A > x)P(X_B > x) = 1 - e^{-x/30}e^{-x/20} = 1 - e^{x/12}. \end{aligned}$$

Άρα ο πιο σύντομος χρόνος έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο 12, και επομένως η μέση τιμή του είναι 12.

58. **(Κατανομή Βήτα) (Γιάννης)** Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.

(β΄) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{4})$.

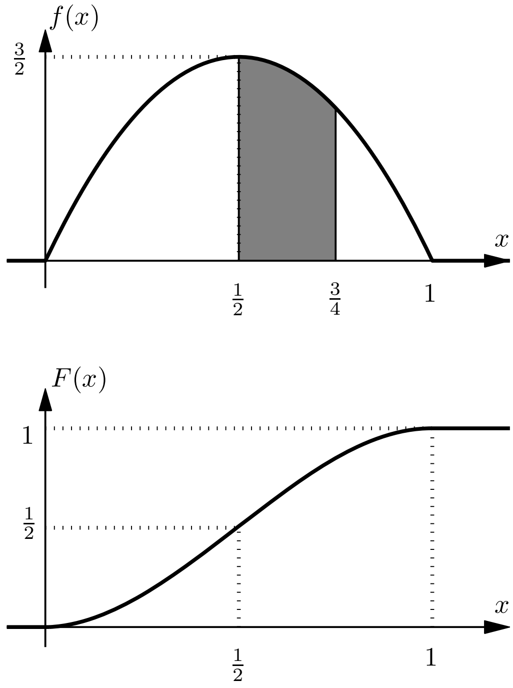
(γ΄) Βρείτε την συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Λύση:

(α΄) Η σταθερά c πρέπει να έχει τέτοια τιμή ώστε το ολοκλήρωμα της πυκνότητας να ισούται με τη μονάδα. Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx = c\int_0^1 x - x^2\,dx = c\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = c\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big] = \frac{c}{6},$$

Συνεπώς $c = 6$. Η πυκνότητα έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Η πυκνότητα και η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X στην Άσκηση 58.

(β΄) Παρομοίως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι,

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\Big) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx = 6\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(1-x)\,dx = 6\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\ &= 6\Big[\frac{9}{32} - \frac{1}{8} - \frac{9}{64} + \frac{1}{24}\Big] = \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο εμβαδόν εμφανίζεται σκιασμένο στο Σχήμα 6.

(γ΄) Προφανώς για $x < 0$ έχουμε $F(x) = 0$, και για $x > 1$ έχουμε $F(x) = 1$. Για την περίπτωση $0 \leq x \leq 1$, έχουμε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3.$$

Συμπερασματικά:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 6.

59. **(Συνάρτηση μιας εκθετικής Τ.Μ.) (Γιάννης)** Το κόστος συντήρησης ενός δικτύου κινητής τηλεφωνίας με συνολική έκταση X km^2 είναι $Y = X^3 + 5$ χιλιάδες Ευρώ. Αν η Τ.Μ. X έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο 20, να βρεθεί η πυκνότητα του Y.

Λύση: Έστω $F(x)$ και $f(x)$ η συνάρτηση κατανομής και η πυκνότητα του X, αντίστοιχα, και $G(y)$, $g(y)$ είναι η συνάρτηση κατανομής και η πυκνότητα του Y, αντίστοιχα.

Για $y < 5$ έχουμε $G(y) = 0$, ενώ για $y \geq 5$,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 + 5 \leq y) = P(X^3 \leq y - 5) = P(X \leq (y-5)^{1/3}),$$

οπότε,

$$\begin{aligned} G(y) &= \begin{cases} F((y-5)^{1/3}), & y \geq 5, \\ 0, & y < 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{(y-5)^{\frac{1}{3}}}{20}\right], & y \geq 5, \\ 0, & y < 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η πυκνότητα της Y θα είναι

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \begin{cases} F'((y-5)^{1/3})((y-5)^{1/3})', & y \geq 5, \\ 0 & y < 5, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f((y-5)^{1/3})\frac{1}{3}(y-5)^{-2/3} & y \geq 5, \\ 0 & y < 5, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{60}(y-5)^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{(y-5)^{1/3}}{20}}, & y \geq 5, \\ 0 & y < 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η πυκνότητα απειρίζεται στο όριο $y \to 5^+$.

9η Ομάδα Ασκήσεων

60. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Δύο από κοινού συνεχείς Τ.Μ., X και Y, περιγράφονται από την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2(2-y), & x, y \in [0,1], \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

(β΄) Να προσδιορίσετε την περιθώρια πυκνότητα $f_X(x)$.

(γ΄) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X < 2Y)$.

Λύση:

(α΄) Θα πρέπει το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στο επίπεδο, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, να είναι μονάδα. Όμως, έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,dA = \iint_{[0,1]\times[0,1]} cx^2(2-y)\,dA &= \int_0^1 \left(\int_0^1 cx^2(2-y)\,dy\right)\,dx \\ &= c\int_0^1 \left(x^2\int_0^1 (2-y)\,dy\right)\,dx = c\left(\int_0^1 (2-y)\,dy\right)\left(\int_0^1 x^2\,dx\right). \end{aligned}$$

Το πρώτο από τα άνω ολοκληρώματα ισούται με το εμβαδόν τραπεζίου με ύψος 1 και μήκη βάσεων 2 και 1, επομένως ισούται με $\frac{3}{2}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα εύκολα προκύπτει οτι είναι $\frac{1}{3}$. Άρα τελικά προκύπτει πως $c = 2$.

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Παίρνουμε περιπτώσεις. Αν $x \notin [0,1]$, τότε η άνω ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού μηδενική, επομένως και $f_X(x) = 0$. Αν όμως $x \in [0,1]$, τότε

$$f_X(x) = \int_0^1 2x^2(2-y)\,dy = 2x^2\int_0^1 (2-y)\,dy = 3x^2.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε πως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε πως το ολοκλήρωμα της $f_X(x)$ πράγματι ισούται με 1.

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$P(X < 2Y) = P((X,Y) \in R) = \iint_R f(x,y)\,dA,$$

όπου $R = \{(x,y) : x < 2y\}$. Το χωρίο αυτό μπορεί να σπάσει σε δύο υποχωρία, το χωρίο $R_1 = R \cap ([0,1] \times [0,1])$ και το χωρίο $R_2 = R - R_1$. Στο δεύτερο χωρίο, το άνω ολοκλήρωμα είναι 0, διότι σε αυτό είναι μηδενική η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X < 2Y) &= \iint_{R_1} f(x,y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_{x/2}^1 2x^2(2-y)dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 2x^2 \left(\int_{x/2}^1 \left[-\frac{(2-y)^2}{2} \right]' dy \right) dx = \int_0^1 2x^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left[-1 + 4 + \frac{x^2}{4} - 2x \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 3x^2 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + x^3 \right]' dx = \frac{1}{20} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{20}. \end{aligned}$$

61. **(Γεωμετρικό ξυπνητήρι)** Ένα «γεωμετρικό ξυπνητήρι» χτυπάει X λεπτά μετά τη ρύθμισή του, όπου η Τ.Μ. X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0,1)$.

Έχετε στη διάθεσή σας δύο γεωμετρικά ξυπνητήρια Α και Β. Το Α χτυπάει κατά μέσο όρο 10 λεπτά μετά τη ρύθμισή του ενώ το ίδιο ισχύει και για το Β. Θεωρήστε ότι οι χρόνοι που χτυπούν τα ξυπνητήρια είναι ανεξάρτητοι.

(α΄) Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν μέχρι να χτυπήσει το πρώτο από τα ξυπνητήρια.

(β΄) Αφότου χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι πόσος επιπλέον χρόνος περνάει μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο;

(γ΄) Υπολογίστε πόσα κατά μέσο όρο λεπτά περνούν, από την αρχή του χρόνου, μέχρι να χτυπήσει το δεύτερο ξυπνητήρι.

Λύση: Έστω X_1 και X_2 οι χρόνοι όταν θα χτυπήσουν τα δύο ξυπνητήρια. Έστω επίσης $Y = \min\{X_1, X_2\}$ ο χρόνος που θα χτυπήσει το πρώτο από αυτά.

(α΄) Παρατηρούμε πως όταν $y \ge 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > y) = 1 - P(X_1 > y,\ X_2 > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = 1 - \exp(-y/10)\exp(-y/10) = 1 - \exp(-y/5). \end{aligned}$$

Αν $y < 0$, τότε παρομοίως

$$F_Y(y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = 1 - 1 \times 1 = 0.$$

Επομένως,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-y/5), & y \ge 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

και τελικά η Y είναι εκθετική Τ.Μ. με παράμετρο 5 και μέση τιμή $E(Y) = 5$.

(β΄) Όταν χτυπήσει το πρώτο ξυπνητήρι, το δεύτερο δεν έχει χτυπήσει ακόμα και, από την ιδιότητα της απώλειας μνήμης, ο επιπλέον χρόνος, έστω Z, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 10.

(γ΄) Απλώς έχουμε $E(Y+Z) = E(Y) + E(Z) = 5 + 10 = 15$.

62. **(Από κοινού συνεχείς Τ.Μ.)** Οι από κοινού συνεχείς Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}\,(x+2y)\,, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή $E[XY]$;

(β΄) Ποιες είναι οι περιθώριες $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy f_{XY}(x,y)\,dA = \frac{1}{5}\iint_{[0,1]\times[0,2]} xy(x+2y)\,dA = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^2y + 2xy^2\right)\,dy\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{2}{3}xy^3\right)'\,dy\right)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{16}{3}x\right)\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{5}\times\frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

(β΄) Επίσης κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx.$$

Υπολογίζουμε καταρχάς την $f_X(x)$. Όταν $x \in [0,1]$, έχουμε

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{5}(x+2y)\,dy = \frac{1}{5}\int_0^2 \left(xy + y^2\right)'\,dy = \frac{1}{5}(2x+4),$$

ενώ όταν $x \notin [0,1]$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+4), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο, όταν $y \in [0,2]$, έχουμε

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{5}(x+2y)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)'\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + 2y\right),$$

ενώ όταν $y \notin [0,2]$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$$

Συγκεντρωτικά,

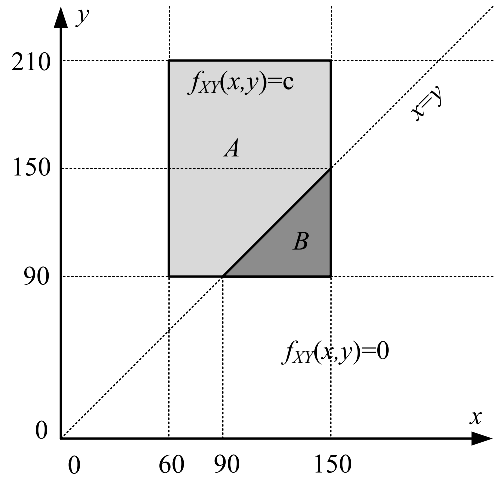
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{1}{2} + 2y), & y \in [0,2], \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

63. **(Πελταστές)** Πρόσφατες αρχαιολογικές ανασκαφές επιβεβαίωσαν την αναφορά του Ηροδότου ότι ένας Σπαρτιάτης πελταστής της κλασσικής εποχής μπορούσε να ρίξει το δόρυ σε μια απόσταση X ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των 60 και 150 μέτρων, μπορούσε να εκτοξεύσει ένα λίθο με χρήση σφεντόνας σε μια απόσταση Y επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των 90 και 210 μέτρων, και, επιπλέον, τα X, Y ήταν ανεξάρτητα. Βάσει των άνω:

(α΄) Γράψτε εκφράσεις για τις πυκνότητες $f_X(x), f_Y(y), f_{XY}(x,y)$. Επίσης, δώστε μια έκφραση για την πιθανότητα $P(X > Y)$ σε μορφή διπλού ολοκληρώματος.

(β΄) Υπολογίστε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος του προηγούμενου σκέλους.

Λύση:



Σχήμα 7: Άσκηση 63.

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & 60 \leq x \leq 150, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{120}, & 90 \leq y \leq 210, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{10800}, & 60 \leq x \leq 150, \ 90 \leq y \leq 210, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases} \qquad P(X > Y) = \iint_{\{(x,y):x>y\}} f_{XY}(x,y)\, dA.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η από κοινού πυκνότητα είναι θετική (και ίση με $c = \frac{1}{10800}$) μόνο εντός του ορθογωνίου $C = \{(x,y) : x \in [60,150], \ y \in [90,210]\}$. Άρα,

$$P(X > Y) = \iint_{\{(x,y):x>y\}} f_{XY}(x,y)\, dA = \iint_{C \cap \{(x,y):x>y\}} \frac{1}{10800}\, dA = \iint_B \frac{1}{10800}\, dA,$$

όπου $B = C \cap \{(x,y) : x > y\}$ είναι το υποσύνολο του C όπου επιπλέον $x > y$. Και τα δύο, καθώς και το υποσύνολο A του C όπου $y > x$, έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 7. Παρατηρήστε ότι καλούμαστε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα μιας σταθερής συνάρτησης επί ενός τριγωνικού χωρίου εμβαδού $\frac{1}{2} \times 60 \times 60 = 1800$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X > Y) = 1800 \times \frac{1}{10800} = \frac{1}{6}.$$

64. **(Υπολογισμός συντελεστή συσχέτισης)** Ο συντελεστής συσχέτισης ενός ζεύγους Τ.Μ. ορίζεται ως

$$\rho_{Y,Z} \triangleq \frac{\mathrm{COV}(Y,Z)}{\sqrt{\mathrm{VAR}(Y)\mathrm{VAR}(Z)}}.$$

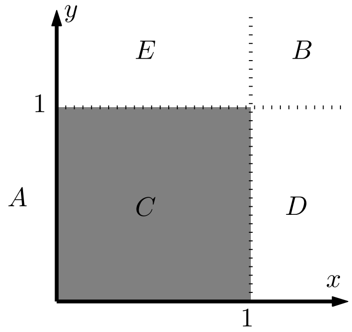
Έστω $Z \sim N(0,1)$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι ροπές της είναι

$$E(Z) = 0, \quad E(Z^2) = 1, \quad E(Z^3) = 0, \quad E(Z^4) = 3.$$

Έστω η Τ.Μ. $Y = a + bZ + cZ^2$. Να δειχθεί ότι ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{Y,Z} = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}$.

Λύση: Προφανώς, $\mathrm{VAR}(Z) = 1$. Υπολογίζουμε τη διασπορά του Y:

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}(Y) &= \mathrm{VAR}(a + bZ + cZ^2) = \mathrm{VAR}(bZ + cZ^2) \\ &= E((bZ + cZ^2)^2) - (E(bZ + cZ^2))^2 \\ &= E(b^2Z^2) + E(c^2Z^4) + E(2bcZ^3) - (E(bZ))^2 - (E(cZ^2))^2 - 2E(bZ)E(cZ^2) \\ &= b^2E(Z^2) + c^2E(Z^4) + 2bcE(Z^3) - b^2(E(Z))^2 - c^2(E(Z^2))^2 - 2bcE(Z)E(Z^2) \\ &= b^2 + 3c^2 + 0 - 0 - c^2 - 0 = b^2 + 2c^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 8: Άσκηση 65.

Επίσης,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{COV}(Y,Z) &= \mathrm{COV}(a+bZ+cZ^2,Z) = E((a+bZ+cZ^2)Z) - E(a+bZ+cZ^2)E(Z) \\
&= E(aZ)+E(bZ^2)+E(cZ^3)-aE(Z)-b(E(Z))^2-cE(Z^2)E(Z) \\
&= 0+b+0-0-0-0 = b.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
\rho_{Y,Z} = \frac{\mathrm{COV}(Y,Z)}{\sqrt{\mathrm{VAR}(Y)\mathrm{VAR}(Z)}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}.
$$

65. **(Γραμμική πυκνότητα πιθανότητας)** Το ζεύγος Τ.Μ. X, Y έχουν την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$
f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}
$$

(α΄) Υπολογίστε τη σταθερά k.

(β΄) Βρείτε την από κοινού κατανομή πιθανότητας των X, Y, που ορίζεται ως

$$
F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x',y')\,dy'dx'. \tag{3}
$$

(Θα πρέπει να διαχωρίσετε περιπτώσεις για τα ζεύγη τιμών (x,y).

(γ΄) Βρείτε τις περιθώριες πυκνότητες πιθανότητας των X και Y.

Υπόδειξη: Για να μην υπάρχουν ασάφειες σχετικά με την αντιστοίχιση ορίων ολοκλήρωσης με μεταβλητές ολοκλήρωσης, υπενθυμίζουμε την σύμβαση

$$
\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx
$$

Λύση: Το σύνολο όπου η πυκνότητα πιθανότητας είναι μη μηδενική εμφανίζεται σκιασμένο στο Σχήμα 8.

(α΄) Η k θα υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ότι το ολοκλήρωμα της $f_{XY}(x,y)$ ισούται με τη μονάδα:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dydx &= \int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dydx \\
&= \int_0^1\int_0^1 kx\,dydx + \int_0^1\int_0^1 ky\,dydx \\
&= k\int_0^1 x\,dx + k\int_0^1 y\,dy = \frac{k}{2}+\frac{k}{2} = 1,
\end{aligned}
$$

από όπου προκύπτει πως $k=1$.

(β΄) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις ανάλογα με το που βρίσκεται το ζεύγος (x,y), όπως φαίνεται στο Σχήμα 8:

i. Αν $x \leq 0$ ή $y \leq 0$, δηλαδή το (x,y) βρίσκεται στην περιοχή A, που αποτελείται από όλα τα τεταρτημόρια πλην του πρώτου, τότε προφανώς $F_{XY}(x,y) = 0$, γιατί το ολοκλήρωμα (3) είναι πάνω σε ένα χωρίο όπου η ολοκληρωταία συνάρτηση είναι παντού μηδενική.

ii. Αν $x \geq 1$ και $y \geq 1$, δηλαδή το (x,y) βρίσκεται στην περιοχή B, τότε προφανώς $F_{XY}(x,y) = 1$, γιατί το χωρίο όπου γίνεται η ολοκλήρωση περιλαμβάνει όλο το σύνολο όπου η πυκνότητα είναι μη μηδενική, άρα η ολοκλήρωση δίνει μονάδα.

iii. Αν $0 < x, y < 1$, δηλαδή το (x,y) βρίσκεται εντός της σκιασμένης περιοχής C, τότε:

$$F_{XY}(x,y) = \int_0^x \int_0^y (x'+y')\,dy'dx' = \int_0^x \int_0^y x'\,dy'dx' + \int_0^x \int_0^y y'\,dy'dx' = y\frac{x^2}{2} + x\frac{y^2}{2} = \frac{xy}{2}(x+y).$$

iv. Αν $x \geq 1, 0 < y < 1$, δηλαδή το (x,y) βρίσκεται στην περιοχή D, τότε

$$F_{XY}(x,y) = \int_0^1 \int_0^y (x'+y')\,dy'dx' = \int_0^1 \int_0^y x'\,dy'dx' + \int_0^1 \int_0^y y'\,dy'dx' = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

v. Αν $0 < x < 1, y \geq 1$, δηλαδή το (x,y) βρίσκεται στην περιοχή E, τότε λόγω συμμετρίας με την προηγούμενη περίπτωση,

$$F_{XY}(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Συγκεντρωτικά:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ή } y \leq 0, \\ 1, & x \geq 1,\ y \geq 1, \\ \frac{xy}{2}(x+y), & 0 < x, y < 1, \\ \frac{y(y+1)}{2} & x \geq 1,\ 0 < y < 1, \\ \frac{x(x+1)}{2}, & 0 < x < 1,\ y \geq 1. \end{cases}$$

(γ΄) Για να υπολογίσουμε την $f_X(x)$, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$. Προφανώς, αν $x \leq 0$ ή $x \geq 1$, τότε προκύπτει ότι $f_X(x) = 0$. Αν $0 < x < 1$, τότε $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}$. Συγκεντρωτικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

και λόγω συμμετρίας,

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

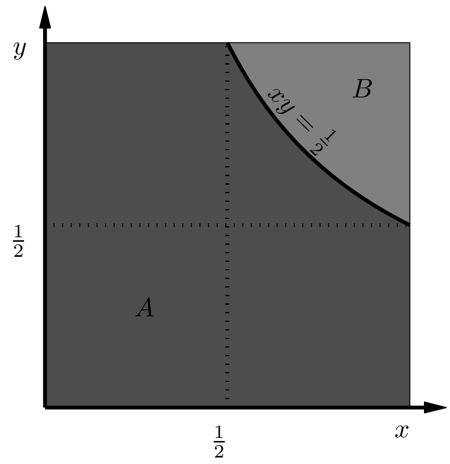
66. **(Ανεξάρτητες ομοιόμορφες Τ.Μ.)** Έστω X, Y, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1]$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχόμενων: $\{X^2 < \frac{1}{2},\ |Y-1| < \frac{1}{2}\}$, $\{\frac{X}{2} < 1,\ Y > 0\}$, $\{\min(X,Y) > \frac{1}{3}\}$, $\{XY < \frac{1}{2}\}$.

Λύση: Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων των πρώτων τριών ενδεχόμενων είναι απλός λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y:

$$\begin{aligned} P(X^2 < \frac{1}{2},\ |Y-1| < \frac{1}{2}) &= P(X^2 < \frac{1}{2})P(|Y-1| < \frac{1}{2}) = P(X < \frac{\sqrt{2}}{2})P(Y \geq \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \\ P(\frac{X}{2} < 1, Y > 0) &= P(\frac{X}{2} < 1)P(Y > 0) = P(X < 2)P(Y > 0) = 1 \times 1 = 1 \\ P(\min(X,Y) > \frac{1}{3}) &= P(X > \frac{1}{3}, Y > \frac{1}{3}) = P(X > \frac{1}{3})P(Y > \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία περίπτωση, επειδή το ζητούμενο ενδεχόμενο δεν είναι καρτεσιανής μορφής, θα χρειαστούμε την από κοινού πυκνότητα, που ισούται με

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$



Σχήμα 9: Άσκηση 66.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η από κοινού πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα εντός του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$ και μηδενική εκτός, έχουμε ότι η πιθανότητα του τελευταίου ενδεχόμενου ισούται με

$$P(XY < \frac{1}{2}) = \int_A 1\, dxdy = 1 - \int_B 1\, dxdy.$$

όπου τα σύνολα A, B εμφανίζονται στο Σχήμα 9. Από τα δύο διπλά ολοκληρώματα, απλούστερο στον υπολογισμό είναι αυτό πάνω στο B:

$$\int_B 1\, dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{2x}}^{1} dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - \frac{1}{2x})\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2,$$

από όπου προκύπτει ότι $P(XY < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2$.

10η Ομάδα Ασκήσεων

67. **(Πυκνότητα πιθανότητας) (Γιάννης)** Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = ce^{-4|x|}, \qquad -\infty \leq x \leq \infty,$$

όπου c άγνωστη θετική παράμετρος. Απαντήστε στα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η τιμή της παραμέτρου c ;

(β΄) Πόση είναι η μέση τιμή $E(X)$;

(γ΄) Πόση είναι η διασπορά $\mathrm{VAR}(X)$;

(δ΄) Υπολογίστε, χωρίς να κάνετε κάποια προσέγγιση, την πιθανότητα $P(|X| > \frac{1}{2})$.

(ε΄) Υπολογίστε το φράγμα Chebyshev για την πιθανότητα $P(|X| > \frac{1}{2})$.

Λύση:

(α΄) Η τιμή της c θα προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας την απαίτηση το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στο $\mathbb{R}$ να ισούται με τη μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} ce^{4x}\, dx + \int_{0}^{\infty} ce^{-4x}\, dx = 2c \int_{0}^{\infty} e^{-4x}\, dx = 2c \left[-\frac{e^{-4x}}{4} \right]_0^{\infty} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, ή πιο απλά παρατηρώντας ότι η $f(x)$ είναι άρτια.

(β΄) Εφαρμόζοντας τον ορισμό της $E(X)$, προκύπτει ότι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2xe^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2xe^{-4x}\,dx = 0.$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, ή πιο απλά παρατηρώντας ότι η $xf(x)$ είναι περιττή.

(γ΄)

$$\begin{aligned}
\text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2x^2e^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2x^2e^{-4x}\,dx = 4\int_{0}^{\infty} x^2e^{-4x}\,dx \\
&= -\int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-4x}\right)'\,dx = -\left[x^2e^{-4x}\right]_0^{\infty} + 2\int_{0}^{\infty} xe^{-4x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x(e^{-4x})'\,dx = -\frac{1}{2}\left[xe^{-4x}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{8}\int_{0}^{\infty}(e^{-4x})'\,dx = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Η πέμπτη ισότητα προκύπτει είτε με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$, είτε παρατηρώντας ότι η $x^2 f(x)$ είναι άρτια. Το όρια που εμφανίζονται είναι όλα 0, όπως προκύπτει με απλή εφαρμογή του κανόνα του L'Hôpital.

(δ΄) Από τον ορισμό της πυκνότητας, προκύπτει πως

$$\begin{aligned}
P(|X| \geq \frac{1}{2}) &= P(X \geq \frac{1}{2}) + P(X \leq -\frac{1}{2}) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 2e^{-4x}\,dx + \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 2e^{4x}\,dx = 4\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-4x}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left(-e^{-4x}\right)'\,dx = e^{-2}.
\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα και πάλι προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής $x \to -x$, ή παρατηρώντας ότι η $f(x)$ είναι άρτια.

(ε΄) Εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebyshev, προκύπτει πως

$$P(|X| \geq \frac{1}{2}) = P(|X - 0| \geq \frac{1}{2}) \leq \text{VAR}(X)/\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}/\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Όπως αναμένεται, το φράγμα Chebyshev είναι μεγαλύτερο από την πραγματική τιμή της πιθανότητας, που υπολογίσαμε στο προηγούμενο σκέλος.

68. **(Άνω φράγμα για την κατανομή Poisson)** Έστω πως το πλήθος X των μηνυμάτων που λαμβάνει καθημερινά ένας χρήστης μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου ακολουθεί την κατανομή Poisson, με μέση τιμή 10.

(α΄) Ποια η πιθανότητα σε μια μέρα ο χρήστης να λάβει 8 μηνύματα;

(β΄) Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα να λάβει ο χρήστης σε μια μέρα τουλάχιστον 25 μηνύματα.

(α΄) Κατά τα γνωστά για την κατανομή Poisson,

$$P(X = 8) = e^{-10}\frac{10^8}{8!} \simeq 0.11.$$

(β΄) Η τυχαία μεταβλητή X είναι μη αρνητική. Συνεπώς, εφαρμόζουμε την ανισότητα Markov:

$$P(X \geq 25) \leq \frac{E(X)}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

69. **(Ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών)** Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε n ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli, όπου η πιθανότητα επιτυχίας είναι p. Έστω $Y = \frac{X}{n}$ ο μέσος όρος των επιτυχιών ανά πείραμα. Εφαρμόστε την ανισότητα Chebyshev στο ενδεχόμενο $\{|Y - p| > a\}$. Τι συμβαίνει καθώς $n \to \infty$;

Λύση: Ο αριθμός των επιτυχιών X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με μέση τιμή $E(X) = np$ και διασπορά $\text{VAR}(X) = np(1-p)$. Σχετικά με τη μέση τιμή και διασπορά της Y, έχουμε:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = p, \\
\text{VAR}(Y) &= \text{VAR}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{VAR}(X) = \frac{p(1-p)}{n}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η διασπορά τείνει στο μηδέν καθώς ο αριθμός των πειραμάτων n τείνει στο άπειρο. Με απλή εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev, έχουμε ότι

$$P(|Y - p| > a) \leq \frac{p(1-p)}{na^2}.$$

Το άνω όριο, συνεπώς και η ίδια η πιθανότητα, συγκλίνουν στο 0 καθώς αυξάνεται το n, και μάλιστα για οσοδήποτε μικρή τιμή του a.

70. **(Πασχαλινά αυγά)** Τα εκατοντάδες κόκκινα αυγά που περίσσεψαν στο σπίτι του Σταύρου μετά το Πάσχα είναι τριών ειδών: μικρά, με βάρος 70 γραμμάρια, μεσαία, με βάρος 80 γραμμάρια, και μεγάλα, με βάρος 90 γραμμάρια. Όποτε ο Σταύρος επιλέγει από το ψυγείο ένα αυγό για να φάει, επιλέγει ένα μικρό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ένα μεσαίο με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και ένα μεγάλο με πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω X το βάρος ενός αυγού που επιλέγει ο Σταύρος. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας, την μέση τιμή, και τη διασπορά της Τ.Μ. X.

(β΄) *(1 μονάδα)* Αν ο Σταύρος φάει σε μια μέρα 100 αυγά, ποια είναι, προσεγγιστικά, η πιθανότητας το βάρος τους να υπερβαίνει τα 7800 γραμμάρια;

(γ΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος από αυγά που μπορεί να φάει ο Σταύρος ώστε η πιθανότητα να φάει πάνω από 10000 γραμμάρια να μην υπερβαίνει το 0.01;

Λύση:

(α΄) Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι η

$$p_X(70) = \frac{1}{2}, \quad p_X(80) = \frac{1}{3}, \quad p_X(90) = \frac{1}{6},$$

επομένως η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \frac{1}{2} \times 70 + \frac{1}{3} \times 80 + \frac{1}{6} \times 90 = \frac{230}{3} \simeq 76.66, \\
E(X^2) &= \frac{1}{2} \times 70^2 + \frac{1}{3} \times 80^2 + \frac{1}{6} \times 90^2 = \frac{17800}{3} \simeq 5933.33, \\
\text{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{500}{9} \simeq 55.55, \\
\sigma_X &= \sqrt{\text{VAR}(X)} \simeq 7.45.
\end{aligned}$$

(β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$ τα βάρη των 100 αυγών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπου οι μ_X, σ_X δίνονται στο πρώτο σκέλος και $N = 100$:

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq 7800\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \leq \frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{7800 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \simeq \Phi(1.7889) \simeq 0.9632.
\end{aligned}$$

(γ΄) Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε το Κ.Ο.Θ. Εδώ όμως, το πλήθος N των Τ.Μ. που θα προστεθούν είναι το ζητούμενο. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq 10^4\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01 \\
&\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{10^4 - N\mu_X}{\sqrt{N}\sigma_X} \geq \Phi^{-1}(0.99) \\
&\Leftrightarrow 10^4 - N\mu_X - \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X \geq 0 \Leftrightarrow \mu_X N + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{N}\sigma_X - 10^4 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{N_1} \leq \sqrt{N} \leq \sqrt{N_2},
\end{aligned}$$

όπου

$$\sqrt{N_{1,2}} = \frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X \pm \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X}.$$

Παρατηρήστε πως η μία από τις δύο ρίζες είναι αρνητική, ενώ η άλλη θετική. Προκύπτει, τελικά, πως θα πρέπει

$$N \leq \left(\frac{-\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X + \sqrt{(\Phi^{-1}(0.99)\sigma_X)^2 + 4 \times 10^4 \mu_X}}{2\mu_X} \right)^2 \simeq 127.8772.$$

Επομένως, ο Σταύρος μπορεί να φάει άφοβα μέχρι 127 αυγά.

71. **(Συγγραφέας)** Ένας συγγραφέας βιβλίων φαντασίας γράφει καθημερινά ένα πλήθος από σελίδες X όπου το X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με μάζα

$$p_X(k) = \frac{1}{10}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

(α΄) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της X;

(β΄) Αν ο συγγραφέας έχει υποσχεθεί να γράψει 400 σελίδες μέσα σε 64 μέρες, ποια είναι η πιθανότητα να καταφέρει να πραγματοποιήσει την υπόσχεσή του;

(γ΄) Αν ο συγγραφέας έχει συμφωνήσει να αμειφθεί ένα ποσό A για κάθε σελίδα που θα γράψει, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της αμοιβής του Y; Ποια κατανομή ακολουθεί αυτή, προσεγγιστικά;

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από την θεωρία,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + \ldots 10 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}(1 + 2 + \cdots + 10) = \frac{10 \times 11}{2 \times 10} = \frac{11}{2}, \\
E(X^2) &= 1^2 \frac{1}{10} + 2^2 \frac{1}{10} + \ldots 10^2 \frac{1}{10} \\
&= \frac{1}{10}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2\right) = \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = \frac{77}{2}, \\
\mathrm{VAR}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{77}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{154}{4} - \frac{121}{4} = \frac{33}{4}.
\end{aligned}$$

(β΄) Το πλήθος των σελίδων που θα γράψει ο συγγραφέας είναι το άθροισμα ανεξάρτητων Τ.Μ. X_i, $i = 1, \ldots,$ όλων με την ίδια κατανομή, μέση τιμή $\mu = \frac{11}{2}$ και διασπορά $\sigma^2 = \frac{33}{4}$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Κ.Ο.Θ., θα έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{64} X_i > 400\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{64} X_i - 64\mu}{\sqrt{64\sigma^2}} > \frac{400 - 64\mu}{\sqrt{64\sigma^2}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{400 - 64\mu}{8\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{33}}\right).
\end{aligned}$$

(γ΄) Έστω $Z = \sum_{i=1}^{64} X_i$ το πλήθος των σελίδων που έγραψε ο συγγραφέας. Σύμφωνα με το ΚΟΘ, το Z είναι κατά προσέγγιση κανονικά κατανεμημένο με μέση τιμή $E(Z) = N\mu$ και διασπορά $N\sigma^2$. Η αμοιβή που θα λάβει ο συγγραφέας είναι $Y = AZ$, και κατά τα γνωστά από τη θεωρία η Y είναι, προσεγγιστικά, επίσης κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμη $E(Y) = AE(Z) = N\mu A = 352A$ και διασπορά $\mathrm{VAR}(Y) = A^2\mathrm{VAR}(Z) = A^2 N\sigma^2 = 528A^2$.

72. **(Ανθοδέσμες)** Κάθε μέρα ο Ρωμαίος αγοράζει μια ανθοδέσμη για την Ιουλιέτα. Υπάρχουν 5 είδη από ανθοδέσμες, με αντίστοιχες τιμές 1, 2, 4, 7 και 16 φιορίνια. Ο Ρωμαίος αγοράζει ανθοδέσμη ενός είδους στην τύχη, χωρίς ιδιαίτερη προτίμηση στο είδος, ανεξάρτητα από μέρα σε μέρα, για 6 μήνες (180 ημέρες).

(α΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει ξοδέψει συνολικά περισσότερες από χίλια φιορίνια για ανθοδέσμες σ' αυτούς τους 6 μήνες.

(β΄) Βρείτε μια προσέγγιση για την πιθανότητα ο Ρωμαίος να έχει αγοράσει την ακριβή ανθοδέσμη που κάνει 16 φιορίνια συνολικά λιγότερες από 30 φορές σ' αυτούς τους 6 μήνες.

Λύση:

(α΄) Το φιορίνια που δίνει ο Ρωμαίος την ημέρα i για αγορά ανθοδέσμης είναι μια τυχαία μεταβλητή X_i με μέση τιμή

$$E(X_i) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 16 \times \frac{1}{5} = 6.$$

Επίσης,

$$E(X_i^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 7^2 \times \frac{1}{5} + 16^2 \times \frac{1}{5} = \frac{326}{5},$$

άρα

$$\text{VAR}(X_i) = \frac{326}{5} - 6^2 = 29.2.$$

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα, παρατηρούμε πως

$$P\left(\sum_{i=1}^{180} X_i > 1000\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{180} X_i - 180 \times 6}{\sqrt{180 \times 29.2}} > \frac{1000 - 180 \times 6}{\sqrt{180 \times 29.2}}\right)$$
$$\simeq P\left(Z > -1.1035\right) = 1 - \Phi\left(-1.1035\right) = 0.8651.$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

(β΄) Έστω η Τ.Μ. Bernoulli Y_i που είναι 1 αν ο Ρωμαίος αγόρασε την ακριβή ανθοδέσμη την ημέρα i και 0 αλλιώς. Έχουμε, κατά τα γνωστά από τις Τ.Μ. Bernoulli,

$$E(Y_i) = \frac{1}{5}, \quad \text{VAR}(Y_i) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογισθεί ως

$$P\left(\sum_{i=1}^{180} Y_i < 30\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{30} Y_i - 180 \times \frac{1}{5}}{\sqrt{180 \times \frac{4}{5}}} < \frac{30 - 180 \times \frac{1}{5}}{\sqrt{180 \times \frac{4}{25}}}\right)$$
$$\simeq P\left(Z < \frac{30 - 180 \times \frac{1}{5}}{\sqrt{180 \times \frac{4}{25}}}\right) = P(Z < -1.1180) = \Phi(-1.1180) = 0.1318.$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

73. **(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής)** Σε ένα διαγώνισμα υπάρχουν 110 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Υποθέτουμε ότι κάποιος φοιτητής απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, ανεξάρτητα τη μια απ' την άλλη.

(α΄) Αν η κάθε ερώτηση έχει 65 δυνατές απαντήσεις, βρείτε μια καλή προσέγγιση για την πιθανότητα στο τέλος ο φοιτητής να έχει απαντήσει σωστά ακριβώς 2 ερωτήσεις.

(β΄) Έστω τώρα πως η κάθε ερώτηση έχει μόνο 4 δυνατές απαντήσεις, και πως για κάθε σωστή απάντηση ο εξεταζόμενος παίρνει 10 βαθμούς και για κάθε λάθος χάνει 3 βαθμούς. Βρείτε μια ακριβή προσέγγιση για την πιθανότητα να πάρει τελικά θετικό βαθμό.

Λύση:

(α΄) Έχουμε 110 πειράματα, όλα με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{65}$, καθένα εκ των οποίων είναι επιτυχία ανεξάρτητα από τα άλλα, επομένως η πιθανότητα ο φοιτητής να έχει ακριβώς 2 απαντήσεις σωστές είναι, σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή,

$$\binom{110}{2} p^2 (1-p)^{108} \simeq 0.2659.$$

Επειδή, πάντως, το πλήθος των πειραμάτων είναι μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας σε καθένα από αυτά είναι μικρή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με την κατανομή Poisson με $\lambda = 110 \times \frac{1}{65}$, επομένως προσεγγιστικά η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \simeq 0.2636.$$

Πράγματι, παρατηρήστε ότι αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά καλή.

(β΄) Οι βαθμοί που παίρνει ο φοιτητής στην ερώτηση i είναι μια τυχαία μεταβλητή X_i που λαμβάνει την τιμή 10 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$ και την τιμή -3 με πιθανότητα $\frac{3}{4}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 10 \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \\ E(X_i^2) &= 10^2 \times \frac{1}{4} + (-3)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{127}{4}, \\ \mathrm{VAR}(X_i) &= \frac{127}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{507}{16} \simeq 31.6875. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ισούται με

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{i=1}^{110} X_i > 0\right] &= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{110} X_i - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}} > \frac{0 - 110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right] \\ &\simeq P\left[Z > -\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right] = 1 - \Phi\left(-\frac{110 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{110\times 507}{16}}}\right) = 1 - \Phi(0.4658) \simeq 0.6793. \end{aligned}$$

Η προσεγγιστική ισότητα προέκυψε με χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

74. **(Διόρθωση γραπτών)** Σε μια εξέταση πιθανοτήτων, τα γραπτά των φοιτητών ανήκουν σε τρεις κατηγορίες, ως εξής:

(α΄) Ένα γραπτό είναι λευκή κόλλα με πιθανότητα $\frac{1}{6}$, οπότε και ο διδάσκοντας βάζει βαθμό 0, και χρειάζεται 12 δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τη διόρθωση.

(β΄) Ένα γραπτό δεν είναι λευκή κόλλα αλλά έχει έκταση λιγότερη από 2 σελίδες, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα τετράπλευρο ζάρι και βάζει ως βαθμό το αποτέλεσμα X της ζαριάς, με το X να λαμβάνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, 4$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 20 δευτερόλεπτα.

(γ΄) Για τα υπόλοιπα γραπτά, ο διδάσκοντας ρίχνει ένα εξάπλευρο ζάρι και βάζει βαθμό $4+Y$, όπου Y είναι το αποτέλεσμα της ζαριάς και λαμβάνει τιμές $Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, κάθε μια με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο διδάσκοντας ολοκληρώνει τη διόρθωση σε 30 δευτερόλεπτα.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας και η μέση τιμή του βαθμού Z ενός φοιτητή;

(β΄) Ποια είναι η μάζα πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου W για να διορθωθεί ένα γραπτό;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο διδάσκοντας να διορθώσει μέσα σε 2 ώρες τουλάχιστον 320 γραπτά; (Αγνοούμε τους χρόνους μετάβασης από γραπτό σε γραπτό και άλλους χρόνους πέραν αυτών της διόρθωσης, και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι διόρθωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.)

Λύση:

(α΄) Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό 0 αν παραδώσει λευκή κόλλα, δηλαδή με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 1, 2, 3, 4$ αν παραδώσει γραπτό που δεν είναι λευκό αλλά με λιγότερες από 2 σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, και επιπλέον το ζάρι φέρει z, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Επομένως, η πιθανότητα $P(Z = z)$ είναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Τέλος, ο φοιτητής θα λάβει βαθμό $z = 5, 6, 7, 8, 9, 10$, αν το γραπτό του είναι 2 ή περισσότερες σελίδες, κάτι που γίνεται με πιθανότητα $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, και επιπλέον το ζάρι έρθει $z - 4$, κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Άρα, ο βαθμός θα είναι z με πιθανότητα $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$. Συγκεντρωτικά,

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & z = 0, \\ \frac{1}{8}, & z = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{18}, & z = 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

Επομένως, η μέση τιμή $E(Z)$ της βαθμολογίας Z είναι

$$E(Z) = \sum_{z=0}^{10} z p_Z(z) = 0 \times \frac{1}{6} + (1 + 2 + 3 + 4) \times \frac{1}{8} + (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \times \frac{1}{18} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

(β΄) Με πιθανότητα $\frac{1}{6}$ ο διδάσκοντας θα χρειαστεί 12 δευτερόλεπτα για να διορθώσει το γραπτό, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ θα χρειαστεί 20 δευτερόλεπτα, και με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ θα χρειαστεί 30 δευτερόλεπτα. Επομένως,

$$p_W(12) = \frac{1}{6}, \qquad p_W(20) = \frac{1}{2}, \qquad p_W(30) = \frac{1}{3},$$

και

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{6} \times 12 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{3} \times 30 = 22, \\ E(W^2) &= \frac{1}{6} \times 144 + \frac{1}{2} \times 400 + \frac{1}{3} \times 900 = 524. \\ \mathrm{VAR}(W) &= E(W^2) - (E(W))^2 = 524 - 484 = 40. \end{aligned}$$

(γ΄) Έστω W_i, $i = 1, 2, \ldots$ οι χρόνοι διόρθωσης των διαδοχικών γραπτών. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{320} W_i \le 7200\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{320} W_i - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}} \le \frac{7200 - 320 \times 22}{\sqrt{320} \times \sqrt{40}}\right) \\ &\simeq P\left(Z \le \frac{160}{10\sqrt{128}}\right) = P\left(Z \le \sqrt{2}\right) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) \simeq 0.9214. \end{aligned}$$

75. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

Λύση: Έστω οι 1000 Τ.Μ. Bernoulli X_i, $i = 1, \ldots, 1000$, τέτοιες ώστε $X_i = 1$ αν έρθει ο i-οστός Ζυγοβιστινός, και $X_i = 0$ αν δεν έρθει. Έχουμε $E(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ και $\mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ επομένως η τυπική απόκλιση των X_i ισούται με $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}(X_i)} = \frac{1}{2}$.

Έστω πως ο έφορος της εκκλησίας προμηθεύεται K καρέκλες. Τότε, η πιθανότητα να μην επαρκούν οι καρέκλες ισούται με

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma} > \frac{K - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}} > \frac{K - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο αριθμός K πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) < 0.01 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0.99) < \frac{K - 500}{5\sqrt{10}} \Leftrightarrow K > 500 + 5\sqrt{10}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 536.78,$$

και επειδή το K πρέπει να είναι ακέραιο, προκύπτει ότι ο έφορος πρέπει να αγοράσει 537 καρέκλες. Στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση Φ, άρα και η αντίστροφή της Φ^{-1}, είναι γνησίως αύξουσες.

Μία ελαφρώς καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει αν αρχικά προσεγγίζαμε την $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K + \frac{1}{2}\right)$. (Μπορείτε να καταλάβετε γιατί;) Θα προέκυπτε τότε ότι $K + \frac{1}{2} > 536.78 \Leftrightarrow K > 536.28$, επομένως και πάλι $K = 537$.

Χωρίς την προσέγγιση, αλλά με χρήση υπολογιστή, προκύπτει πως πράγματι ο $K = 537$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διωνυμικής με παραμέτρους N και p υπερβαίνει το 0.99. Επομένως, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν εισήγαγε κάποιο σφάλμα.

76. **(Μπιφτέκια)** Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια. Ετοιμάζει το μείγμα, και αρχίζει να πλάθει τα μπιφτέκια, σκοπεύοντας το καθένα να έχει βάρος 200 γραμμάρια. Επειδή δεν μπορεί να υπολογίσει το βάρος του κάθε μπιφτεκιού επακριβώς, τα μπιφτέκια έχουν βάρη, σε γραμμάρια, που μοντελοποιούνται ως συνεχείς Τ.Μ. ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[180, 220]$.

(α΄) Αν το μείγμα που έχει στη διάθεσή του ο μάγειρας έχει βάρος 20200 γραμμάρια, ποια είναι η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια;

(β΄) Πόσο μείγμα πρέπει να έχει στη διάθεσή του ώστε η πιθανότητα να μπορέσει να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον 99%;

Υποθέστε ότι *και* το τελευταίο μπιφτέκι που θα φτιάξει ο μάγειρας *πρέπει* να έχει την άνω κατανομή. Δηλαδή, ο μάγειρας δεν προχωρά στην κατασκευή ενός μπιφτεκιού που, κατά την εκτίμησή του, είναι μικρότερο του κανονικού.

Λύση: Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 100$ τα βάρη, σε γραμμάρια, των διαδοχικών μπιφτεκιών που φτιάχνει ο μάγειρας. Επειδή τα X_i είναι ομοιόμορφες Τ.Μ., κατά τα γνωστά από τη θεωρία έχουμε

$$\mu = E(X_i) = \frac{180 + 220}{2} = 200, \quad \sigma^2 = \frac{(220 - 180)^2}{12} = \frac{400}{3}.$$

(α΄) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το άθροισμα των X_i να μην υπερβαίνει τα 20200 γραμμάρια, για την οποία έχουμε

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right)$$
$$\simeq P\left(\leq \frac{20200 - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) = \Phi\left(\sqrt{3}\right) \simeq 0.9584.$$

Στην πρώτη προσεγγιστική ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Κ.Ο.Θ.

(β΄) Έστω πως ο μάγειρας έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους K. Έχουμε, ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq K\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \leq \frac{K - 100 \times 200}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right)$$
$$\simeq P\left(\leq \frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{K - 20000}{\sqrt{100 \times \frac{400}{3}}} \geq \Phi^{-1}(0.99)$$
$$\Leftrightarrow K \geq 20000 + \frac{200}{\sqrt{3}}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K \gtrapprox 20269.$$

77. **(Καρπούζια)** Ένα ανοιχτό φορτηγάκι μπορεί να αντέξει συνολικά 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια είναι Τ.Μ. με μέση τιμή 15 κιλά και τυπική απόκλιση 1 κιλό. Έστω N_0 το μέγιστο πλήθος των καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι ώστε η πιθανότητα να υπερβεί το βάρος τους τα 3000 κιλά να είναι μικρότερη από 10^{-4}. Βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0. Η συνθήκη μπορεί να εμφανίζει τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

Λύση: Το N_0 είναι ο μέγιστος ακέραιος N για τον οποίο ισχύει το ακόλουθο:

$$P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n > 3000\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \leq 3000\right) > 1 - 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - 15N}{\sqrt{N}} \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}),$$

όπου η Τ.Μ. Z είναι, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, τυπική κανονική Τ.Μ. Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το ότι η $\Phi(\cdot)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι το αριστερό σκέλος της τελευταίας ανισότητας, όταν $N \in \mathbb{R}$ και $N > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του N, έχει όριο το ∞ για $N \to 0^+$ και όριο το $-\infty$ για $N \to \infty$. Επομένως, πράγματι, όπως αναμενόταν από τη διαίσθησή μας, η συνθήκη ικανοποιείται για όλα τα θετικά ακέραια N μέχρι κάποιο μέγιστο ακέραιο N_0.

Ακολούθως, θα βρούμε το N_0. Θέτουμε $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4})$, $X = \sqrt{N}$ και λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\frac{3000 - 15X^2}{X} = a \Leftrightarrow 3000 - 15X^2 = aX \Leftrightarrow 15X^2 + aX - 3000 = 0 \\ \Leftrightarrow X = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 \times 15 \times 3000}}{30} \Leftrightarrow X = 14.0187 \Leftrightarrow N = 196.52.\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι το $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}) \simeq 3.7190$ (όπως προκύπτει με χρήση πινάκων ή Η/Υ) και το ότι το $X > 0$.

Επειδή το N είναι ακέραιο, προκύπτει το πασίγνωστο εμπειρικό αποτέλεσμα ότι μπορούμε να φορτώσουμε μέχρι 196 καρπούζια ένα φορτηγάκι χωρίς η πιθανότητα βλάβης να υπερβεί το 10^{-4}.