# Επιχειρησιακή Έρευνα
# Ενότητα 4
# Δυϊκή Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

# Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- $n$ τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- $m$ τύποι πρώτων υλών.
- $a_{ij}$: ποσότητα από την πρώτη ύλη $i$ που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου $j$.
- $b_i$: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης $i$.
- $c_j$: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου $j$.
- Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Μεταβλητές απόφασης:

$x_j$ : ποσότητα προϊόντος τύπου $j$ που θα παραχθεί, $j = 1, \dots, n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

υπό

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

# Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- $x_j$: ποσότητα προϊόντος $j$ που θα παραχθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

# Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- $n$ τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- $m$ τύποι πρώτων υλών.
- $a_{ij}$: ποσότητα από την πρώτη ύλη $i$ που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου $j$.
- $b_i$: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης $i$.
- $c_j$: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου $j$.
- Στόχος είναι ο καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παραγάγει προϊόντα.

$y_i$ : τιμή ανά μονάδα που θα πληρωθεί για κάθε πρώτη ύλη $i$, $i = 1, 2, \dots, m$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

υπό

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i}_{\text{τιμή που θα εισπράξει αν πωλήσει τις πρώτες ύλες με τις οποίες θα έφτιαχνε ένα προϊόν τύπου } j} \geq \underbrace{c_j}_{\text{τιμή ανά μονάδα πωλήσεως για ένα προϊόν τύπου } j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\min \; b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

υπό

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$
$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$
$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

# Το πρόβλημα της αποτίμησης - Μοντελοποίηση

- $y_i$: τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης $i$ που θα πωληθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

## Πρόβλημα παραγωγής

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

υπό

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \quad \text{η πρώτ. απορ.}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \quad \text{η δεύτερη πρώτη}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

## Πρόβλημα αποτίμησης

$$\min \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

υπό

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \quad \text{η μετ. απόφασης}$$
$$\vdots \quad \text{η παραγωγής}$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \ge 0$$

Το πρόβλημα αποτίμησης είναι το γραμμικό προβλήματος παραγωγής

συναρτήσεις στόχου, max, $\le$ → στόχου, συναρτήσεις min, $\ge$

Οι μεταβλητές της 1ης φάσης της γραμμικής προγραμματισμού είναι ο αντίστοιχος του πίνακα της συναρτήσεως του 2ου προβλήματος.

η μετ. απόφασης $x_j$ ⟷ $j$-οστός περιορισμός της δεύτερης φάσης

η μετ. απόφασης $y_i$ ⟷ $i$-οστός περιορισμός της πρώτης φάσης

# Δυϊκότητα

- Για κάθε π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

ορίζεται το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Δίνεται το π.χ.π.

$$\max \quad 3x_1 + 5x_2$$

υπό

$$7x_1 + 3x_2 \le 5$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 1$$
$$-2x_1 - 7x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2 μετ. απρ.
3 αρ. ή ίσο.

Να γραφτεί το δυϊκό του.

$$\min \quad 5y_1 + 1y_2 + 4y_3$$

υπό

$$7y_1 + 4y_2 - 2y_3 \ge 3$$
$$3y_1 + 6y_2 - 7y_3 \ge 5$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

3 μετ. απρ.
$y_1, y_2, y_3$
2 αρ. ή ίσο.