$$\max \quad 5x_1 - 3x_2$$

υπό

$$x_1 - 2x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Είναι σε τυπική μορφή.

Το αρχικό λεξικό είναι

r_1 $\quad z = 0 + 5x_1 - 3x_2$

r_2 $\quad w_1 = 4 - x_1 + 2x_2$ → μικρότερο για $x_1 = \frac{4}{1}$

r_3 $\quad w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2$ → μικρότερο για $x_1 = \frac{6}{2}$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο.

Η x_1 θα μπει στη βάση (5 > 0).

Η w_2 θα βγει από τη βάση $\left(\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{6}{2}\right)$

r_3: $w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \Rightarrow 2x_1 = 6 - 1w_2 - 3x_2 \Rightarrow$

$$x_1 = 3 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_2$$

r_1: $z = 0 + 5\left(3 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_2\right) - 3x_2 \Rightarrow z = 15 - \frac{5}{2}w_2 - \frac{21}{2}x_2$

r_2: $w_1 = 4 - \left(3 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_2\right) + 2x_2 \Rightarrow w_1 = 1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{7}{2}x_2$

Το νέο λεξικό είναι:

$$z = 15 - \frac{5}{2}w_2 - \frac{21}{2}x_2$$
$$w_1 = 1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{7}{2}x_2$$
$$x_1 = 3 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_2$$

Είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη λύση είναι

$(x_1, x_2, w_1, w_2) =$

$(3, 0, 1, 0)$

με $z = 15$

Ιδιαιτερες περιπτωσεις:

I) Το αρχικό λεξικό δεν είναι Β.Ε.Λ

$$z = 0 + 3x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = -2 - x_1 + 7x_2$$
$$w_2 = 3 + 5x_1 - 2x_2$$

Η αρχική βασική λύση είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, -2, 3)$
Δεν είναι εφικτή.

II) Πολλές υποψήφιες για εισερχόμενες μεταβλητές

$$z = 5 + 3x_1 + 6x_2$$
$$w_1 = 7 - 3x_1 - 2x_2$$
$$w_2 = 4 - 7x_1 + 8x_2$$

III) Αρνητικά υποψήφιες για εξερχόμενη μεταβλητή

$$z = 10 + 4x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = 7 + 2x_1 + 6x_2 \uparrow$$
$$w_2 = 6 + 5x_1 - 3x_2 \uparrow$$

Ο π.χ. είναι μη φραγμένο

IV) Επιλογή πολλών μεταβλητών για να βγουν από τη βάση

$$z = 30 + 3x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = 6 - 2x_1 + 7x_2 \quad \text{μπ για } x_1 = \frac{6}{2} = 3$$
$$w_2 = 9 - 3x_1 - 5x_2 \quad \text{μπ για } x_1 = \frac{9}{3} = 3$$
$$w_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \uparrow$$

v) Αν η επιλογή της μ.ε. δεν αντιστοιχεί σε κάποια
γραμμή

$$z = 30 + 2x_1 - 5x_2$$

$w_1 = 5 - 2x_1 + 7x_2$ → μας δίνει $x_1 = \frac{5}{2}$

$w_2 = 0 - 3x_1 + 4x_2$ → μας δίνει $x_1 = \frac{0}{3} = 0$

Η x_1 μπαίνει σε βάση

Η w_2 βγαίνει $\min\left\{\frac{5}{2}, \frac{0}{3}\right\} = 0$

Πιθανά προβλήματα

- Απουσία αρχικής β.ε.λ.
- Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.
- Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα Ι: Απουσία αρχικής β.ε.λ.

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Τι κάνουμε αν δεν έχουμε τέτοιο αρχικό λεξικό;
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δυϊκή μέθοδο Simplex. (Αυτή τη μέθοδο θα τη διδαχθείτε στην επόμενη ενότητα.)
- Η δυϊκή μέθοδος Simplex μας δίνει μία β.ε.λ. και μετά συνεχίζουμε με Simplex ή συμπεραίνει ότι το πρόβλημα είναι μη-εφικτό.

Πρόβλημα ΙΙ: Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Αν υπάρχουν πολλές, ποια να διαλέξουμε;
- Υπάρχουν διάφοροι κανόνες επιλογής εισερχόμενης στη βάση μεταβλητής.

Πρόβλημα ΙΙ - Κανόνες επιλογής για την εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Ο κανόνας του μέγιστου συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του τυχαίου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε στην τύχη μια μη-βασική μεταβλητή από αυτές που έχουν θετικό συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του πρώτου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στον πρώτο θετικό συντελεστή που συναντάται στη ζ.
- Ο κανόνας του μικρότερου δείκτη (Bland).
  Επίλεξε τη μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη.
- Ο κανόνας της μέγιστης άμεσης αύξησης.
  Επίλεξε τη μεταβλητή που αυξάνει περισσότερο την ζ.

$z = 7 + 4x_1 + 5x_2$

$w_1 = 4 - 2x_1 - 1x_2$

$w_2 = 9 - 1x_1 - 3x_2$

Δεν είναι βέλτιστο.

1η επανάληψη

2η επανάληψη

Η x_1 μπαίνει στη βάση

$z = 7 + \boxed{4x_1} + 5x_2$

$\boxed{w_1} = 4 - 2x_1 - 1x_2$ → μπορώ για $x_1 = 2$

$w_2 = 9 - 1x_1 - 3x_2$ → μπορώ για $x_1 = 9$

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η α.σ. θα αυξηθεί κατά $4 \cdot 2 = 8$.

Η x_2 μπαίνει στη βάση

$z = 7 + 4x_1 + \boxed{5x_2}$

$w_1 = 4 - 2x_1 - 1x_2$ → μπορώ για $x_2 = 4$

$\boxed{w_2} = 9 - 1x_1 - 3x_2$ → μπορώ για $x_2 = 3$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Η α.σ. θα αυξηθεί κατά $5 \cdot 3 = 15$.

- Κανόνας με μέγιστη συνεισφορά:
  Η x_2 μπαίνει στη βάση ...
- Κανόνας τυχαίου θετικού συντελεστή.
  Επιλέγω είτε x_1 (με π.θ. $\frac{1}{2}$) ή την x_2 (με π.θ. $\frac{1}{2}$).
- Κανόνας πρώτου θετικού συντελεστή:
  Επιλέγω την x_1.
- Κανόνας Bland
  Επιλέγω την x_1.
- Κανόνας μέγιστης βελτίωσης αντικειμενικής.
  Επιλέγω την x_2

Πρόβλημα ΙΙΙ: Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια μεταβλητή, δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές αυξάνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Η ζ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα ΙΙΙ - Παράδειγμα

- Έστω ότι εμφανίζεται το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 4 & + & 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
w_2 & = & 10 & + & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 \\
w_3 & = & 7 & & & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_4 & = & 6 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 \\
w_5 & = & 6 & + & 3x_1 & & & + & 3x_3
\end{array}
$$

- Οι x_1 και x_3 μπορούν να γίνουν βασικές.
- Ας διαλέξουμε την x_1.
- Όσο αυξάνει η x_1 καμιά βασική μεταβλητή δεν μειώνεται και η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνει.
- Το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.

Πρόβλημα IV: Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν υπάρχουν δυο μεταβλητές που μηδενίζονται ταυτόχρονα, ποια να διαλέξουμε;
- Στο επόμενο λεξικό θα εμφανιστεί κάποια βασική μεταβλητή με τιμή 0.
- Μια β.ε.λ. στην οποία κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 λέγεται εκφυλισμένη.

Πρόβλημα V: Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό

- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.
- Αν κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 και επιλεγεί να βγει από τη βάση τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι ίση με την προηγούμενη β.ε.λ.
- Υπάρχει έτσι η περίπτωση η Simplex να κολλήσει και να κάνει κύκλους ανάμεσα σε ορισμένες β.ε.λ. χωρίς να βελτιώνεται η ζ.
- Υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε τους κύκλους.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

με αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Είναι σε κανονική μορφή.

Το αρχικό λεξικό είναι:

$J = 0 + 2x_1 + 3x_2$

$w_1 = 2 - 1x_1 - 2x_2$ } ως προς x_2 για $x_2 = \frac{2}{2}$

$w_2 = 1 - 1x_1 + 1x_2$ ↑

$w_3 = 1 + 1x_1 - 1x_2$ } ως προς x_2 για $x_2 = \frac{1}{1}$

Η x_2 θα μπει στη βάση.

Η w_3 θα βγει από τη βάση.

Το επόμενο λεξικό είναι:

$J = 3 + 5x_1 - 3w_3$

$w_1 = 0 - 3x_1 + 2w_3$ } ως προς x_1 για $x_1 = 0$

$w_2 = 2 - 1w_3$ —

$x_2 = 1 + x_1 - 1w_3$ ↑

Συνεπάγεται ότι θα εμφανιστεί 0 γιατί πήραμε υπολογισμό για εξερχόμενη μεταβλητή από τη βάση.

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο.

Η β.ε.λ. που αντιστοιχεί σε αυτό το λεξικό είναι η

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$

$(0, 1, 0, 2, 0)$

Η x_1 θα μπει στη βάση.

Η w_1 θα βγει από τη βάση.

Κάναμε 0 σε βαθμιαία μεταβλητή.

Έχουμε εκφυλισμένη β.ε.λ.

Το λεξικό είναι εκφυλισμένο.

Το επόμενο λεξικό είναι:

$J = 3 - \frac{5}{3} w_1 + \frac{1}{3} w_3$

$x_1 = 0 - \frac{1}{3} w_1 + \frac{2}{3} w_3$ ↑

$w_2 = 2 - 1 w_3$ } ως προς w_3 για $w_3 = 2$

$x_2 = 1 - \frac{1}{3} w_1 - \frac{1}{3} w_3$ } ως προς w_3 για $w_3 = 3$

Δεν αυξήθηκε η τιμή της α.σ. Το περιμέναμε, γιατί επιλέξαμε τη w_1 να βγει από τη βάση η οποία είχε τιμή 0

Η β.ε.λ. είναι

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$

$(0, 1, 0, 2, 0)$

Είναι εκφυλισμένη.

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο.

Η w_3 μπαίνει στη βάση.

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Επόμενο λεξικό

$$z = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2$$

$$x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

$$w_3 = 2 - w_2$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

Είναι βέλτιστο.
Η βέλτιστη λύση είναι

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$

$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 2\right)$

με $z = \frac{11}{3}$

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & + & 5x_1 & - & 3w_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \end{array}$$

- Στο 1ο λεξικό, καθώς αυξάνουμε την x_2, οι w_1, w_3 γίνονται ταυτόχρονα 0.
- Υπάρχει επιλογή για την εξερχόμενη μεταβλητή.
- Στο επόμενο λεξικό υπάρχει βασική με τιμή 0. Έχουμε εκφυλισμένη β.ε.λ.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 2ο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & + & 5x_1 & - & 3w_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & 1/3w_3 \\ \hline x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3 \end{array}$$

- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν άλλαξε.
- Η β.ε.λ. δεν άλλαξε.
- Άλλαξε η βάση (ποιές μεταβλητές είναι βασικές).

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 3ο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & 1/3w_3 \\ \hline x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 11/3 & - & 5/3w_1 & - & 1/3w_2 \\ \hline x_1 & = & 4/3 & - & 1/3w_1 & - & 2/3w_2 \\ w_3 & = & 2 & & & - & w_2 \\ x_2 & = & 1/3 & - & 1/3w_1 & + & 1/3w_2 \end{array}$$

- Το τελευταίο λεξικό δίνει άριστη λύση.

Εκφυλισμένα λεξικά - Εκφυλισμένες β.ε.λ.

- Ένα λεξικό λέγεται εκφυλισμένο αν μια βασική μεταβλητή του έχει την τιμή 0. Π.χ.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 6 & + & w_3 & + & 5x_2 & + & 4w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1 & - & 2w_3 & - & 2x_2 & + & 3w_1 \\
w_2 & = & 4 & + & w_3 & + & x_2 & - & 3w_1 \\
x_1 & = & 3 & - & 2w_3 & & & & \\
w_4 & = & 2 & + & w_3 & & & - & w_1 \\
w_5 & = & 0 & & & - & x_2 & + & w_1
\end{array}
$$

- Ένα βήμα της Simplex (οδήγηση) λέγεται εκφυλισμένο αν δεν αλλάζει την αντικειμενική συνάρτηση. Π.χ.
  - x_2 μπαίνει, w_5 βγαίνει $\rightarrow$ εκφυλισμένο βήμα.
  - w_1 μπαίνει, w_2 βγαίνει $\rightarrow$ μη-εκφυλισμένο βήμα.

Κυκλικότητα

- Ένας κύκλος είναι μια ακολουθία λεξικών Simplex που καταλήγουν στο ίδιο λεξικό από το οποίο ξεκίνησαν.
- Κάθε λεξικό σε έναν κύκλο είναι εκφυλισμένο.
- Όλα τα ενδιάμεσα λεξικά δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση την ίδια τιμή.

Κυκλικότητα

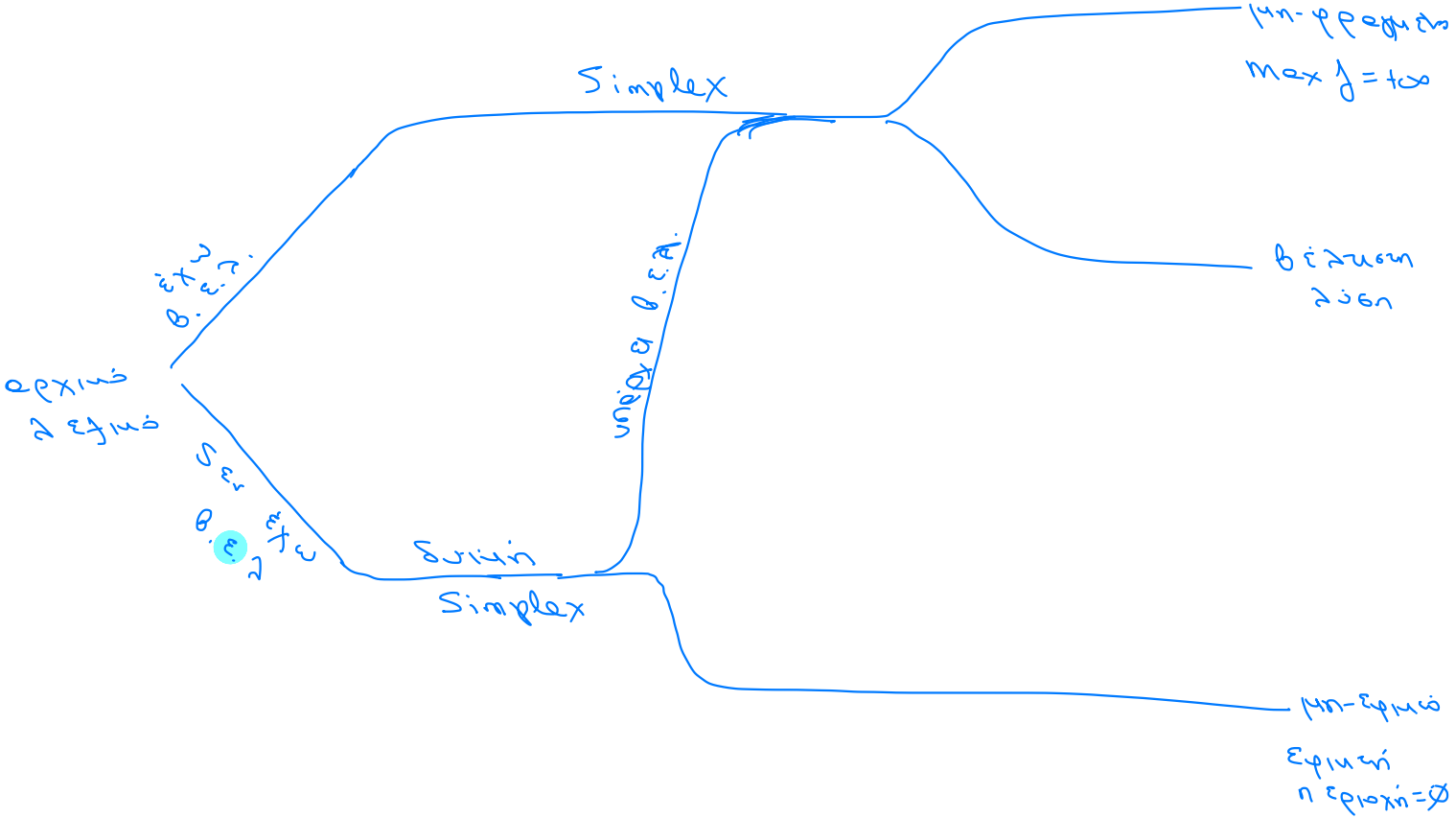
- Όταν η Simplex πέσει σε εκφυλισμένο λεξικό υπάρχει η περίπτωση να "παγιδευθεί" σε κύκλο και να μη φθάσει σε βέλτιστη λύση.
- Ερώτημα: Υπάρχει τρόπος να αποφευχθεί αυτό;
- Ερώτημα: Υπάρχει κάποιος κανόνας οδήγησης (επιλογή εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής) ώστε να αποφευχθεί η κυκλικότητα;

Κανόνες οδήγησης και κυκλικότητα

- Ο συνήθης κανόνας οδήγησης του μέγιστου συντελεστή (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ) μπορεί να οδηγήσει σε κυκλικότητα.
- Έχει κατασκευαστεί τέτοιο παράδειγμα.
- Ο απλός κανόνας οδήγησης του Bland (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη να μπει και τη βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη για να βγει) δεν οδηγεί ποτέ σε κυκλικότητα.
  Για την εφαρμογή του κανόνα αυτού ονομάζουμε τις περιθώριες μεταβλητές με το ίδιο γράμμα με τις αρχικές και αριθμούμε τους δείκτες τους μετά τους δείκτες των αρχικών μεταβλητών.

Συχνότητα της κυκλικότητας

- Ακόμα και με το συνήθη κανόνα οδήγησης του μέγιστου συντελεστή η κυκλικότητα είναι σπάνια για μικρά προβλήματα.
- Ένα πρόγραμμα που παράγει τυχαία 2×4 εκφυλισμένα λεξικά δεν κατέληξε σε κυκλικότητα σε 1 δισεκατομύριο παραδείγματα.
- Για μεγάλα προβλήματα με πολλά 0, η κυκλικότητα μπορεί να προκύψει κατά φυσικό τρόπο.


Αρχικό πρόβλημα
Μεθ. Β.Σ.Α.
Simplex
Μη-φραγμένη
max f = +∞
Βέλτιστη λύση
Δεν Μεθ. Β.Σ.Α.
Δυική Simplex
Μη-εφικτό
Εφικτή περιοχή = ∅

Τερματισμός της Simplex

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό λεξικών καταλήγοντας

- *σε διαπίστωση κενής εφικτής περιοχής ή*
- *σε βέλτιστη β.ε.λ. ή*
- *σε διαπίστωση μη-φραγμένης αντικειμενικής συνάρτησης*