# Επιχειρησιακή Έρευνα
# Ενότητα 3
# Η μέθοδος Simplex

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

# Τυπική μορφή π.γ.π.

- Είναι:

$$
\begin{array}{lrcrcccrcl}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{υπό} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής,
- Όλοι οι περιορισμοί τύπου $\leq$,
- Όλες οι μεταβλητές $\geq 0$.

# Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή I

- Αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε αντί για

$$\min \zeta = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

θέτουμε

$$-\max -\zeta = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n.$$

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b$$

τότε πολλαπλασιάζουμε με $-1$, οπότε αντικαθιστούμε με

$$-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n \leq -b$$

# Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή II

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

τότε τον αντικαθιστούμε με δυο περιορισμούς

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

και

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b.$$

# Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή III

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \leq 0$$

τότε την αντικαθιστούμε με την αντίθετή της, δηλαδή θέτουμε $x_j = -x'_j$ και έχουμε

$$x'_j \geq 0.$$

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \in \mathbb{R} \text{ (χωρίς περιορισμό)}$$

τότε την αντικαθιστούμε με τη διαφορά δυο μη αρνητικών μεταβλητών, δηλαδή θέτουμε $x_j = x'_j - x''_j$ και έχουμε

$$x'_j, x''_j \geq 0.$$

# Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
 & x_1 \geq 0, & & x_2 \leq 0, & & x_3 \in \mathbb{R}. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
 & x_1 \geq 0, & & x_2 \leq 0, & & x_3 \in \mathbb{R}. & &
\end{array}
$$

$x_2 = -x_2'$, $x_2' \geq 0$

$x_3 = x_3' - x_3''$

$x_3', x_3'' \geq 0$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' \\
\text{υπό} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & 3x_2' & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' \geq 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' = 2 \\
 & x_1, & & x_2', & & x_3', & & x_3'' \geq 0
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
-\max & -x_1 & - & 2x_2' & - & 4x_3' & + & 4x_3'' \\
\text{υπό} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & 3x_2' & & & \leq & 10 \\
 & -x_1 & - & x_2' & + & 2x_3' & - & 2x_3'' \leq -3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' \leq 2 \\
 & -x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' \leq -2 \\
 & x_1, & & x_2', & & x_3', & & x_3'' \geq 0
\end{array}
$$

# Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\ & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \leq 0, & & x_3 \in \mathbb{R}. & & \end{array}$$

- Θέτουμε $x_2 = -x_2'$ και $x_3 = x_3' - x_3''$ με $x_2', x_3', x_3'' \geq 0$. Έχουμε:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\ \text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\ & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\ & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\ & x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0. & & & & & & & & \end{array}$$

# Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & \\ \text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq \quad 10 \\ & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq \quad 3 \\ & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = \quad 2 \\ & x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0. & & & & & & & \end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε την αντικειμενική και τον 2ο περιορισμό με $-1$ και αντικαθιστούμε τον 3ο περιορισμό με δυο νέους περιορισμούς:

# Παράδειγμα (συνέχεια)

- Από

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq 10 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = 2 \\
 & x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0 & & & & & & &
\end{array}$$

- γίνεται

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr}
-\max & - & x_1 & - & 2x_2' & - & 4x_3' & + & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & - & x_1 & - & x_2' & + & 2x_3' & - & 2x_3'' & \leq & -3 \\
 & & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & \leq & 2 \\
 & - & x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & \leq & -2 \\
 & x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0. & & & & & & & & &
\end{array}$$

# Από την τυπική μορφή στη μορφή Simplex

- Για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος επίλυσης Simplex τρέπουμε τους περιορισμούς σε εξισωτικούς προσθέτοντας περιθώριες μεταβλητές:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\downarrow$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + w_i = b_i$$
$$w_i \geq 0.$$

- Κατόπιν λύνουμε ως προς τις περιθώριες τους νέους περιορισμούς:

$$w_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n.$$

- Το προκύπτον σχήμα αναφέρεται ως λεξικό.

# Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. & & \end{array}$$

είναι σε κανονική μορφή

Προσθέτουμε μία μεταβλητή σε κάθε φραγμικό περιορισμό και μάνουμε όλους τους περιορισμούς ισότητες

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & + & w_1 & = & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & + & w_2 & = & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & + & w_3 & = & 9 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max \quad 5x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \\ w_1 = 6 - x_1 + x_2 \\ w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \\ w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \\ x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{array}$$

Σε μορφή λεξικού

$$\begin{array}{l} J = 5x_1 - 4x_2 \\ \hline w_1 = 6 - x_1 + x_2 \\ w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \\ w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \end{array}$$

# Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το λεξικό:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

# Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το λεξικό

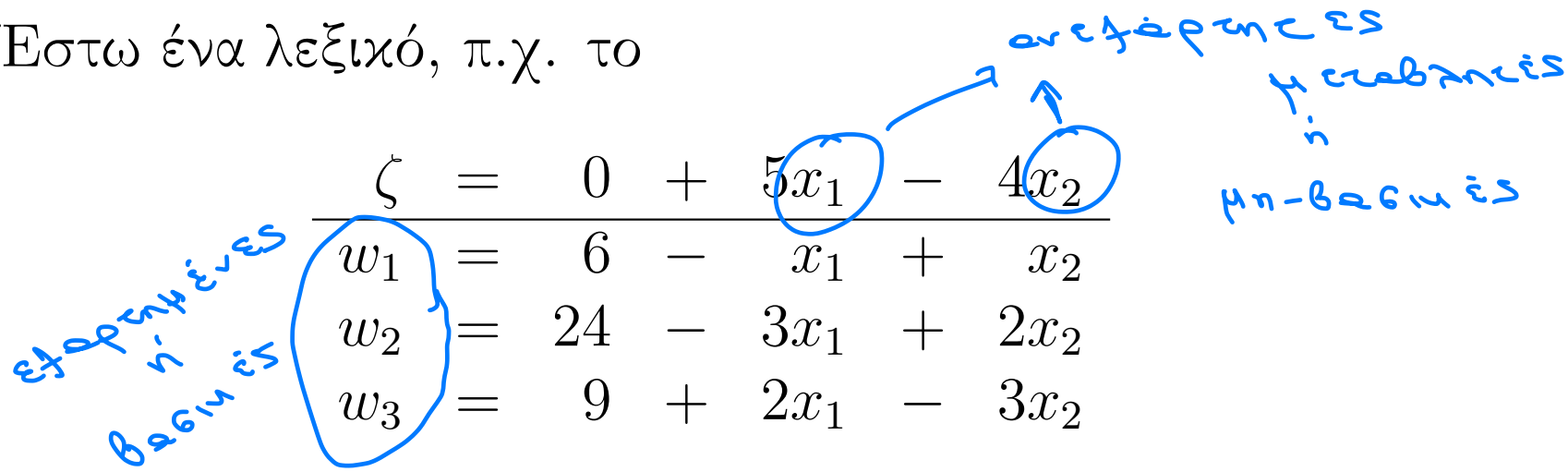
$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0. & & & & \end{array}$$

το γράφουμε συνήθως σε απλοποιημένη μορφή, παραλείποντας το max και τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας των μεταβλητών:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

# Λεξικό και ορισμοί I

- Έστω ένα λεξικό, π.χ. το




$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Η ονομασία "λεξικό" παραπέμπει στο ότι μεταφράζει τις μεταβλητές στα αριστερά μέλη με όρους των μεταβλητών στα δεξιά μέλη.
- Το γράμμα $\zeta$ χρησιμοποιείται για την αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι εξαρτημένες μεταβλητές, στα αριστερά, λέγονται βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι $w_1, w_2, w_3$ (που ταυτίζονται με τις περιθώριες).

# Λεξικό και ορισμοί II

- Έστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

Λύσεις:

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 2, 7, 25, 5)$

ή

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6, 24, 9)$

- Οι ανεξάρτητες μεταβλητές, στα δεξιά, λέγονται μη-βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι $x_1, x_2$ (που ταυτίζονται με τις αρχικές μεταβλητές).
- Θέτοντας τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0 παίρνουμε μια λύση του συστήματος των περιορισμών που λέγεται βασική λύση. Εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta = 0$.

# Λεξικό και ορισμοί III - Λύσεις I

- Έστω πάλι το λεξικό

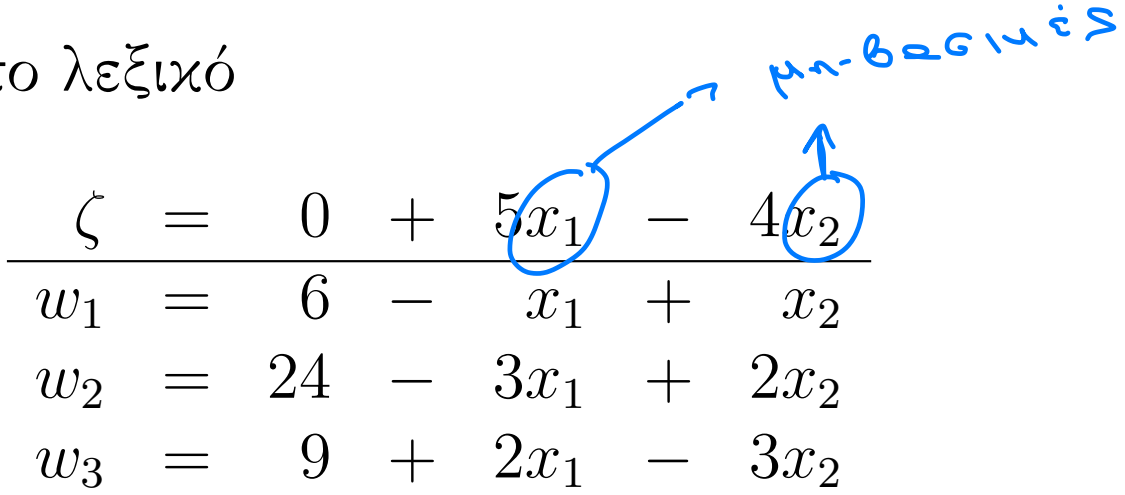
$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$
$(7, 0, -1, 3, 23)$

- Λύση = Διάνυσμα που ικανοποιεί τους περιορισμούς που εμφανίζονται στο λεξικό.
  Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ με $\zeta = 1$.
- Εφικτή λύση = Λύση που ικανοποιεί και τους "κρυφούς" περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών.
  Π.χ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ εφικτή λύση.
  Όμως $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, 0, 7, 27, 7)$ λύση, όχι εφικτή.

# Λεξικό και ορισμοί IV - Λύσεις II

- Έστω πάλι το λεξικό




$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Βασική λύση = Λύση που οι μη-βασ. μεταβλητές είναι 0. Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με $\zeta = 0$. Μπορεί μια λύση να είναι βασική αλλά όχι εφικτή.
- Βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) = Βασική λύση που είναι και εφικτή.
- Βέλτιστη λύση = Εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

# Η ιδέα της μεθόδου Simplex

- Αρχίζουμε από κάποιο λεξικό που μας δίνει β.ε.λ.
- Εξετάζουμε αν η νέα β.ε.λ. είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι σταματάμε, αλλιώς ...
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό αλλάζοντας τις βασικές μεταβλητές ώστε να πάρουμε νέα β.ε.λ. που βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση.

# Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0. & & & &
\end{array}
$$

Είναι σε κανονική μορφή.
Το αρχικό λεξικό είναι,

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 - 4x_2 \\
w_1 &= 6 - x_1 + x_2 \\
w_2 &= 24 - 3x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 9 + 2x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

Η β.ε. θα αντιστοιχεί σε αυτό το λεξικό είναι:
$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$
με τιμή $\zeta = 0$

- Κατά την αναπαράσταση, βάλαμε ότι το $x_1$ έχει θετικό συντελεστή. Αρα, αν δώσουμε θετική τιμή, θα αυξηθεί η τιμή της α.σ.
- Πόσο μπορώ να αυξήσω την τιμή της $x_1$;
  Παρατηρώ ότι όσο αυξάνω την τιμή της $x_1$, μειώνουν οι τιμές των $w_1, w_2, w_3$.
  Μπορώ να την αυξήσω μέχρι κάποια η πρώτη 0.

$z = 0 + 5x_1 - 4x_2$

$w_1 = 6 - 1x_1 + x_2$ ↘ μηδενίζεται για $x_1 = 6$

$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$ ↘ >> για $x_1 = 8$

$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$ ↗

Άρα η αύξηση του $x_1$ μέχρι να πέφτει κάτι από 0.

Τότε (με $x_1 = 6$) θα έχουμε λύση $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$

με $z = 5 \cdot 6 = 30$

Θέλω να μετασχηματίσω το σύστημα έτσι ώστε η $x_1$ να γίνει βασική και η $w_1$ να γίνει μη-βασική

↑ αυτή που είχε θετικό συντελεστή στην α.σ.

↑ η πρώτη που μηδενίστηκε

Πώς γίνεται ο μετασχηματισμός;

Με αντικατάσταση από τη γραμμογραφής.

Με αντικατάσταση

$$\begin{aligned} z &= 0 + 5x_1 - 4x_2 && \Gamma_1 \\ w_1 &= 6 - 1x_1 + x_2 && \Gamma_2 \\ w_2 &= 24 - 3x_1 + 2x_2 && \Gamma_3 \\ w_3 &= 9 + 2x_1 - 3x_2 && \Gamma_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 30 - 5w_1 + 1x_2 && \Gamma_2' \\ x_1 &= 6 - 1w_1 + 1x_2 && \Gamma_2' \\ w_2 &= 6 + 3w_1 - 1x_2 && \Gamma_3' \\ w_3 &= 21 - 2w_1 - 1x_2 && \Gamma_4' \end{aligned}$$

Λύνω τη γραμμή του στόχου ως προς $x_1$

$\Gamma_2$: $x_1 = 6 - 1w_1 + x_2$

Στις υπόλοιπες γραμμές, κάνω αντικατάσταση το $x_1$

$\Gamma_1$: $z = 0 + 5x_1 - 4x_2 \Rightarrow$

$z = 0 + 5(6 - 1w_1 + x_2) - 4x_2 = 30 - 5w_1 + 1x_2 : \Gamma_2'$

$\Gamma_3$: $w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow$

$w_2 = 24 - 3(6 - 1w_1 + x_2) + 2x_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2 : \Gamma_3'$

$\Gamma_4$: $w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \Rightarrow$

$w_3 = 9 + 2(6 - 1w_1 + x_2) - 3x_2 = 21 - 2w_1 - 1x_2 : \Gamma_4'$

Το νέο πρόβλημα είναι:

$r_0$: $z = 30 - 5w_1 + 1x_2$

$r_1$: $x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2$ ↑

$r_3$: $w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2$ ↓ περ. για $x_2 = 6$

$r_4$: $w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2$ ↓ περ. για $x_2 = 21$

Η β.ε.λ. που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$ με $z = 30$

Το πρόβλημα δεν είναι βέλτιστο, γιατί υπάρχει θετικός συντελεστής στην σ.ε.

Η $x_2$ θα μπει στη βάση.

Η $w_2$ θα βγει από τη βάση ($\min\{6, 21\} = 6$).

Θα βρούμε το επόμενο πρόβλημα.

Θα εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις.

$r_0'' = r_0' + r_3' \cdot 1 = 36 - 2w_1 - 1w_2$

$r_2'' = r_2' + r_3' \cdot 1 = 12 + 2w_1 - 1w_2$

$r_3'' = r_3' \cdot 1 \quad x_2 = 6 + 3w_1 - 1w_2$

$r_4'' = r_4' - r_3' \quad w_3 = 15 - 5w_1 + 1w_2$

Το νέο λεξικό είναι:

$$J = 36 - 2w_1 - 1w_2$$

$$x_1 = 12 + 2w_1 - 1w_2$$

$$x_2 = 6 + 3w_1 - 1w_2$$

$$w_3 = 15 - 5w_1 + 1w_2$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$

και η βέλτιστη τιμή της α.σ. είναι $J = 36$

# Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το αρχικό λεξικό:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

με βασική λύση $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$.
Είναι και εφικτή (β.ε.λ.).

# Παράδειγμα Simplex- 1η επανάληψη

- Παρατηρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

  (αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$).
- Αν η $x_1$ αυξηθεί η $\zeta$ αυξάνει.
- Καθώς η $x_1$ αυξάνεται οι $w_1$, $w_2$ μειώνονται.
- Καθώς η $x_1$ αυξάνεται η $w_3$ αυξάνεται.
- Πόσο μπορεί να αυξηθεί η $x_1$;
  Μέχρι κάποια από τις $w_1$, $w_2$ να γίνει 0.
  Η $w_1$ γίνεται 0 για $x_1 = 6/1$.
  Η $w_2$ γίνεται 0 για $x_1 = 24/3 = 8$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η $w_1$.

# Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- η $x_1$ γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_1 = 6$),
- η $w_1$ γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_1 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό "περνώντας" την $x_1$ στο αριστερό μέλος, στη θέση της $w_1$ και εκφράζοντας τις $w_2$, $w_3$ συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών $w_1$, $x_2$ (διαδικασία οδήγησης).
- Ο συντελεστής στην τομή της εισερχόμενης και της εξερχόμενης μεταβλητής (εδώ το $-1$) λέγεται οδηγός.

# Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Θεωρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή $x_1$ που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή $w_1$ που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Για την αντικειμενική συνάρτηση $\zeta$ έχουμε

$$\zeta + 5 \times w_1 = 0 + 5 \times 6 + (-4 + 5 \times 1)x_2.$$

- Ομοίως για τις $w_2$, $w_3$.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή $w_1$ που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

# Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$).

# Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

  (αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$) είναι βέλτιστο;
- Όχι, γιατί υπάρχει θετικός συντελεστής μη-βασικής μεταβλητής στην $\zeta$, ο συντελεστής της $x_2$.
- Καθώς η $x_2$ αυξάνεται οι $w_2$, $w_3$ μειώνονται.
- Η $x_2$ μπορεί να αυξηθεί μέχρι $w_2 = 0$ ή $w_3 = 0$.
  Η $w_2$ γίνεται 0 για $x_2 = 6/1$.
  Η $w_3$ γίνεται 0 για $x_2 = 21/1 = 21$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η $w_2$.

# Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

- η $x_2$ γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_2 = 6$),
- η $w_2$ γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_2 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό "περνώντας" την $x_2$ στο αριστερό μέλος, στη θέση της $w_2$ και εκφράζοντας τις $x_1$, $w_3$ συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών $w_1$, $w_2$ (διαδικασία οδήγησης).
- Ο οδηγός στην τομή της στήλης της $x_2$ και της γραμμής της $w_2$ είναι $-1$.

# Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Για το δεύτερο λεξικό έχουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή $x_2$ που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή $w_2$ που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή $w_2$ που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

# Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\ \hline x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\ x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\ w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2 \end{array}$$

(αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$).

# Παράδειγμα Simplex - 3η επαλάληψη

- Το τρίτο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\ \hline x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\ x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\ w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2 \end{array}$$

  (αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$) είναι βέλτιστο;
- Ναι, γιατί όλοι οι συντελεστές μη-βασικών μεταβλητών στην $\zeta$ είναι μη-θετικοί.
- Επομένως το 36 είναι ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αλλά το 36 "πιάνεται" για την $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$, που αποτελεί επομένως βέλτιστη λύση.

# Σύνοψη της βασικής Simplex

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Αν όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση.
- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.

## Ιδιαιτερες περιπτωσεις:

I) Το αρχικο λεξικο δεν ειναι Β.Ε.Λ

$$z = 0 + 3x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = -2 - x_1 + 7x_2$$
$$w_2 = 3 + 5x_1 - 2x_2$$

Η αρχικη βασικη λυση ειναι $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, -2, 3)$
Δεν ειναι εφικτη.

II) Πολλες υποψηφιες για εισερχομενες μεταβλητες

$$z = 5 + 3x_1 + 6x_2$$
$$w_1 = 7 - 3x_1 - 2x_2$$
$$w_2 = 4 - 7x_1 + 8x_2$$

III) Αμοιβαια υποψηφιες για εισερχομενη μεταβλητη

$$z = 10 + 4x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = 7 + 2x_1 + 6x_2 \uparrow$$
$$w_2 = 6 + 5x_1 - 3x_2 \uparrow$$

Ο π.χ. ειναι μη φραγμενο

IV) Εκφυλισμος πολλων μεταβλητων για να βγουν απο τη βαση

$$z = 30 + 3x_1 - 5x_2$$
$$w_1 = 6 - 2x_1 + 7x_2 \quad \text{μης για } x_1 = \frac{6}{2} = 3$$
$$w_2 = 9 - 3x_1 - 5x_2 \quad \text{μης για } x_1 = \frac{9}{3} = 3$$
$$w_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \uparrow$$

v) Αν η επιλογή της μ.ε. δεν αντιστοιχεί σε κάποια
γραμμή

$$z = 30 + 2x_1 - 5x_2$$

$w_1 = 5 - 2x_1 + 7x_2$ → μας δίνει $x_1 = \frac{5}{2}$

$w_2 = 0 - 3x_1 + 4x_2$ → μας δίνει $x_1 = \frac{0}{3} = 0$

Η $x_1$ μπαίνει σε βάση

Η $w_2$ βγαίνει $\min\left\{\frac{5}{2}, \frac{0}{3}\right\} = 0$