Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 2
Βελτιστοποίηση με ΗΥ - AMPL

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Η γλώσσα AMPL

- Η γλώσσα AMPL (A Mathematical Programming Language) έχει σχεδιαστεί ειδικά για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Επιτρέπει την εισαγωγή στον Η/Υ ενός προβλήματος βελτιστοποίησης σε μορφή πολύ κοντινή στη συνήθη μαθηματική μορφή.
- Συνεργάζεται με πολλούς αλγόριθμους επίλυσης.
- Συνεργάζεται με πολλούς τρόπους εισαγωγής των δεδομένων.
- Παρέχει πολλούς τρόπους διαχείρισης των αποτελεσμάτων.

Πηγές για την AMPL

- Ο ιστότοπος της AMPL βρίσκεται στο

  `http://www.ampl.com`
- Για να κατεβάσουμε δοκιμαστική έκδοση της AMPL επιλέγουμε
  - `start for free`
  - `academics` ή `enthousiasts`
  - Κάνουμε εγγραφή και είσοδο
  - `Download`
- Για το πλήρες εγχειρίδιο της AMPL πηγαίνουμε στο

  `resources -> optimization books -> The AMPL book`

"Μικρό" παράδειγμα προγραμματισμού παραγωγής

- Ελαιοτριβείο παράγει δυο τύπους ελαιολάδου, τον "κλασικό" (εξευγενισμένο) και τον "παρθένο".
- Το ελαιοτριβείο έχει διαθέσιμες 40 ώρες παραγωγής ανά εβδομάδα.
- 1 λίτρο κλασικού πωλείται 10 ευρώ.
  1 λίτρο παρθένου πωλείται 15 ευρώ.
- Το ελαιοτριβείο μπορεί να παράγει σε κάθε δεδομένη στιγμή μόνο έναν τύπο ελαιολάδου.
- Σε 1 ώρα μπορεί να παράγει 40 λίτρα κλασικού ή 30 λίτρα παρθένου.
- Το εμπορικό τμήμα του ελαιοτριβείου εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει το πολύ 1000 λίτρα κλασικού και 860 λίτρα παρθένου κάθε εβδομάδα.
- Να μεγιστοποιηθεί ο συνολικός τζίρος ανά εβδομάδα.

Oil_c : ποσότητα σε λίτρα κλασικού εξ. που θα παραχθεί

Oil_v : >> >> >> παρθένου εξ. >> >> >>

max $10 \cdot Oil_c + 15 \cdot Oil_v$

υπό

$\frac{1}{40} \cdot Oil_c + \frac{1}{30} Oil_v \leq 40$ (περιορισμένος χρόνος)

$0 \leq Oil_c \leq 1000$

$0 \leq Oil_v \leq 860$ (περιορισμένη ζήτηση)

```
var Oil_c;
var Oil_v;

maximize profit : 10*Oil_c + 15*Oil_v;

subject to time : (1/40)*Oil_c + (1/30)*Oil_v <= 40;
subject to classic_limit : 0 <= Oil_c <= 1000;
subject to virgin_limit : 0 <= Oil_v <= 860;
```

```
option solver cplex;      option solver minos;
model Example_01.mod;
Solve;
  .
  :
display Oil_c;
display Oil_v;
```

Μοντελοποίηση ως π.γ.π.

- Oil_c, Oil_v : Οι ποσότητες κλασικού και παρθένου ελαιολάδου που θα παραχθούν σε μια εβδομάδα.
- Έχουμε το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \max \quad & 10Oil_c + 15Oil_v \\ \text{υπό} \quad & \tfrac{1}{40}Oil_c + \tfrac{1}{30}Oil_v \leq 40 \\ & 0 \leq Oil_c \leq 1000 \\ & 0 \leq Oil_v \leq 860. \end{aligned}$$

Μοντελοποίηση στην AMPL

- Το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \max \quad & 10Oil_c + 15Oil_v \\ \text{υπό} \quad & \tfrac{1}{40}Oil_c + \tfrac{1}{30}Oil_v \leq 40 \\ & 0 \leq Oil_c \leq 1000 \\ & 0 \leq Oil_v \leq 860. \end{aligned}$$

γράφεται σε έναν text editor ως

```
## Example 01
var Oil_c; # amount of classic
var Oil_v; # amount of virgin
maximize profit: 10*Oil_c + 15*Oil_v;
subject to time: (1/40)*Oil_c + (1/30)*Oil_v <= 40;
subject to classic_limit: 0 <= Oil_c <= 1000;
subject to virgin_limit: 0 <= Oil_v <= 860;
```

Βασική σύνταξη στην AMPL

```
## Example 01
var Oil_c; # amount of classic
var Oil_v; # amount of virgin
maximize profit: 10*Oil_c + 15*Oil_v;
subject to time: (1/40)*Oil_c + (1/30)*Oil_v <= 40;
subject to classic_limit: 0 <= Oil_c <= 1000;
subject to virgin_limit: 0 <= Oil_v <= 860;
```

- `#` → Αρχή σχολίου.
- `var` → Δήλωση μεταβλητής.
- `;` → Τέλος γραμμής εντολής.
- `maximize` ή `minimize` + όνομα + `:` → Αντικ. συναρτ.
- `subject to` + όνομα + `:` → Περιορισμός.
- Case sensitive ονόματα. Τα ονόματα είναι μοναδικά.

Εκτέλεση, διαχείριση αρχείων στην AMPL

- Ένα αρχείο που περιέχει ένα πρόβλημα-μοντέλο πρέπει να σώζεται με την επέκταση `.mod`.
  Π.χ. το προηγούμενο θα μπορούσε να σωθεί σε κάποια θέση ως `Example01.mod`.
- Για να εκτελεστεί ένα αρχείο πρέπει να τρέξουμε την εφαρμογή AMPL και να εμφανιστεί η αναμονή `ampl:`.
- Επιλέγουμε αλγόριθμο επίλυσης (solver).
  Π.χ. `option solver cplex;`.
- Φορτώνουμε το πρόβλημα-μοντέλο.
  Π.χ. `model Example01.mod;`.
- Επιλύουμε με την εντολή `solve;`.

Διορθώσεις και εμφάνιση λύσης

- Αν υπάρξει λάθος στο μοντέλο κατά το τρέξιμο του αλγορίθμου επίλυσης τότε
  - Διορθώνουμε το `.mod` αρχείο στον text editor.
  - Δίνουμε την εντολή `reset;` στο AMPL.
  - Ξαναφορτώνουμε το μοντέλο.
- Η εντολή `solve;` θα μας δώσει κάποιες πληροφορίες και τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής. Π.χ.

```
CPLEX 6.5.3: optimal solution; objective 17433.33333
2 simplex iterations (0 in phase I)
```

- Οι τιμές των μεταβλητών στη βέλτιστη λύση εμφανίζονται με την εντολή `display` + όνομα + `;`.
  Π.χ. `display Oil_c;`
  και `display Oil_v;`.

Αποθήκευση εξόδου σε αρχείο

- Για να αποθηκεύσουμε την έξοδο σε ένα αρχείο έχουμε δυο δυνατότητες, να δημιουργήσουμε-αντικαταστήσουμε (over-write) ένα αρχείο ή να προσθέσουμε περιεχόμενο σε ένα ήδη υπάρχον αρχείο.
- Π.χ. με την εντολή

  ```
  display Oil_c > Example01.out;
  ```

  θα δημιουργηθεί αρχείο με το όνομα `Example01.out` . Αν υπάρχει αρχείο με τέτοιο όνομα θα αντικατασταθεί.
- Με την εντολή

  ```
  display Oil_c >> Example01.out;
  ```

  θα προστεθεί στο αρχείο με το όνομα `Example01.out` η μεταβλητή Oil_c με την τιμή της.

Γενίκευση παραδ. προγραμματισμού παραγωγής

- Ελαιοτριβείο παράγει n τύπους ελαιολάδου.
- Το ελαιοτριβείο έχει διαθέσιμες t ώρες παραγωγής ανά εβδομάδα.
- 1 λίτρο τύπου i πωλείται p_i ευρώ.
- Το ελαιοτριβείο μπορεί να παράγει σε κάθε δεδομένη στιγμή μόνο έναν τύπο ελαιολάδου.
- Σε 1 ώρα μπορεί να παράγει r_i λίτρα τύπου i.
- Το εμπορικό τμήμα του ελαιοτριβείου εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει το πολύ m_i λίτρα τύπου i κάθε εβδομάδα.
- Να μεγιστοποιηθεί ο συνολικός τζίρος ανά εβδομάδα.

μεταβλητές απόφασης:

x_i : ποσότητα που θα παραίγω από το εδαφίδιο τύπου i, $i=1,2,\dots,n$

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1/r_i\right) x_i \le t$$

$$0 \le x_i \le m_i \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

$n = 2$

$p_1 = 10$, $p_2 = 15$

$r_1 = 40$, $r_2 = 30$

$t = 40$

$m_1 = 1000$, $m_2 = 860$

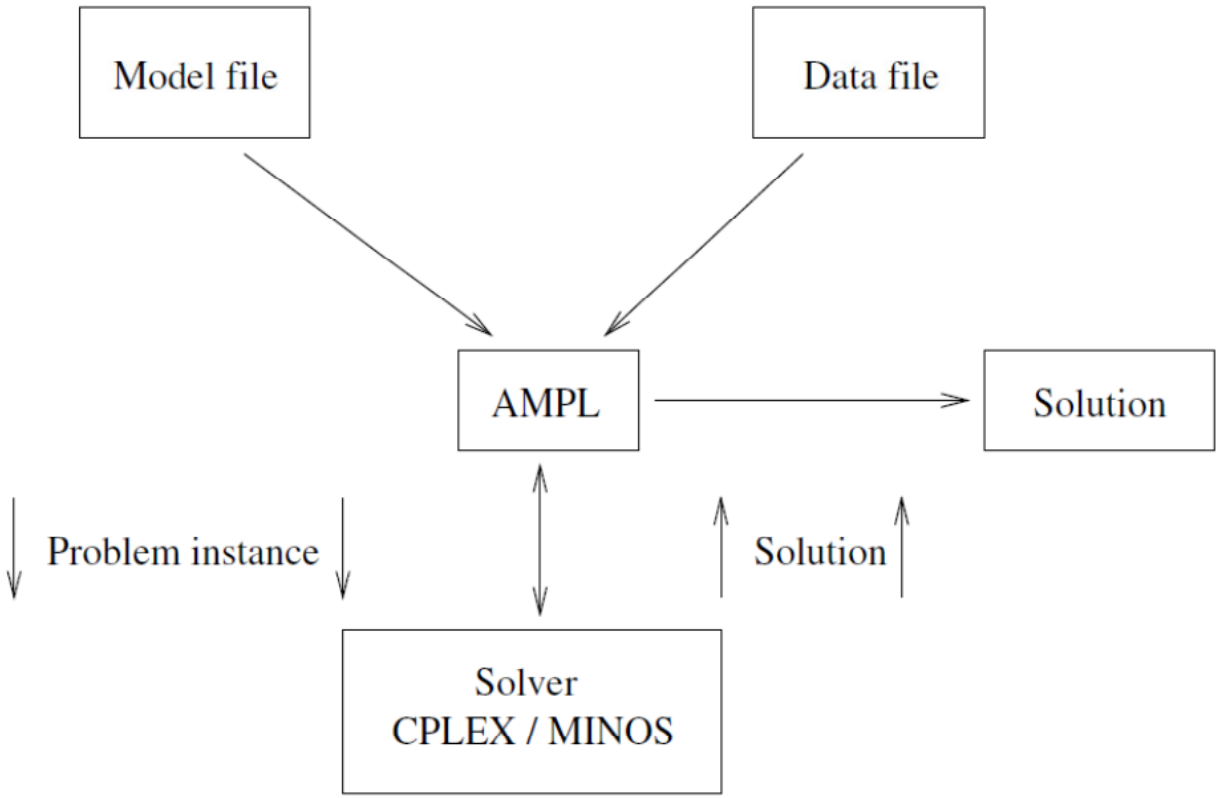
Μοντελοποίηση ως π.γ.π.

- x_i: Η ποσότητα ελαιολάδου τύπου i που θα παράγεται σε μια εβδομάδα.
- Έχουμε το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{n} (1/r_i) x_i \leq t \\ & 0 \leq x_i \leq m_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

- Για $n = 2$, $t = 40$, $p_1 = 10$, $p_2 = 15$, $m_1 = 1000$ και $m_2 = 860$ παίρνουμε το μικρό πρόβλημα παραγωγής.
- Το μικρό πρόβλημα παραγωγής είναι μια ειδική περίπτωση μοντέλου και όχι ένα μοντέλο.
- Το AMPL ενθαρρύνει το διαχωρισμό μοντέλου από τα δεδομένα και τον αλγόριθμο επίλυσης.

AMPL: Μοντέλο, δεδομένα, λύση



- Διάγραμμα αλληλεπίδρασης στοιχείων του AMPL

Μοντελοποίηση στην AMPL

- Το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{n} (1/r_i) x_i \leq t \\ & 0 \leq x_i \leq m_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

γράφεται ως

```
## Example 02 - version 1
param n;
param t;
param p{i in 1..n};
param r{i in 1..n};
param m{i in 1..n};
var x{i in 1..n};
maximize profit: sum{i in 1..n} p[i]*x[i];
subject to time: sum{i in 1..n} (1/r[i])*x[i] <= t;
subject to capacity{i in 1..n}: 0 <= x[i] <= m[i];
```

Χρησιμοποιώντας δείκτες στην AMPL

```
## Example 02 - version 1
param n;
param t;
param p{i in 1..n};
param r{i in 1..n};
param m{i in 1..n};
var x{i in 1..n};
maximize profit: sum{i in 1..n} p[i]*x[i];
subject to time: sum{i in 1..n} (1/r[i])*x[i] <= t;
subject to capacity{i in 1..n}: 0 <= x[i] <= m[i];
```

- `param` → Δήλωση παραμέτρου.
- `{i in 1..n}` → Δήλωση δείκτη και συνόλου διαδοχικών ακεραίων στους οποίου κινείται.
- Ένας δείκτης μπορεί να αφορά παραμέτρους, μεταβλητές, αθροίσεις ή περιορισμούς.

Δεδομένα στην AMPL I

```
## Data 1 for Example 02 - version 1
param n:= 2;
param t:= 40;
param p:= 1 10 2 15;
param r:= 1 40 2 30;
param m:= 1 1000 2 860;
```

- `param` + όνομα + `:=` → Δήλωση τιμών παραμέτρου.
- Αν μια παράμετρος είναι διανυσματική, τότε γράφουμε το δείκτη κάθε συνιστώσας και μετά την τιμή της.
- Το AMPL αγνοεί κενά και αλλαγές γραμμών (carriage returns).

Δεδομένα στην AMPL II

```
## Data 1 for Example 02 - version 1
param n:= 2;
param t:= 40;
param p:= 1 10 2 15;
param r:= 1 40 2 30;
param m:= 1 1000 2 860;
```



```
## Data 2 for Example 02 - version 1
param n:= 2;
param t:= 40;
param p:= 1 10
          2 15;
param r:= 1 40
          2 30;
param m:= 1 1000
          2  860;
```

Δεδομένα στην AMPL III

```
## Data 2 for Example 02 - version 1
param n:= 2;
param t:= 40;
param p:= 1 10
          2 15;
param r:= 1 40
          2 30;
param m:= 1 1000
          2  860;
```



```
## Data 3 for Example 02 - version 1
param n:= 2;
param t:= 40;
param:       p  r   m:=
          1 10 40 1000
          2 15 30  860;
```

AMPL Μοντέλο, δεδομένα, επίλυση

- Τυπική ακολουθία εντολών για την εισαγωγή μοντέλου, δεδομένων, την επίλυση και την εμφάνιση της λύσης:

```
reset;
model Example02v1.mod;
data Example02v1d1.dat;
solve;
display x;
```

Χρήση συνόλων στην AMPL I - Μοντέλο

```
## Example 02 - version 1
param n;
param t;
param p{i in 1..n};
param r{i in 1..n};
param m{i in 1..n};
var x{i in 1..n};
maximize profit: sum{i in 1..n} p[i]*x[i];
subject to time: sum{i in 1..n} (1/r[i])*x[i] <= t;
subject to capacity{i in 1..n}: 0 <= x[i] <= m[i];
```

- Στην κωδικοποίηση του μοντέλου με δείκτες δεν υπάρχει σύνδεση των δεικτών των μεταβλητών με αυτό που μοντελοποιούν.
  Π.χ. το x[1] δεν παραπέμπει σε κάποιο συγκεκριμένο τύπο ελαιολάδου.

Χρήση συνόλων στην AMPL II - Μοντέλο

- Αυτό μπορεί να θεραπευτεί ορίζοντας και χρησιμοποιώντας σύνολα.
- Αντί για `param n;` ορίζουμε `set P;`.
- Αντί για `in 1..n` βάζουμε `in P`.

```
## Example 02 - version 2
set P;
param t;
param p{i in P};
param r{i in P};
param m{i in P};
var x{i in P};
maximize profit: sum{i in P} p[i]*x[i];
subject to time: sum{i in P} (1/r[i])*x[i] <= t;
subject to capacity{i in P}: 0 <= x[i] <= m[i];
```

Χρήση συνόλων στην AMPL III - Δεδομένα

- Το αρχείο των δεδομένων πρέπει να προσαρμοστεί.
- Γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου.
- Οι παράμετροι του συστήματος αναφέρονται με βάση τα στοιχεία του συνόλου.

```
## Data 2 for Example 02 - version 2
set P:= classic virgin;
param t:= 40;
param p:= classic 10
          virgin  15;
param r:= classic 40
          virgin  30;
param m:= classic 1000
          virgin   860;
```

Χρήση συνόλων στην AMPL IV - Δεδομένα

```
## Data 2 for Example 02 - version 2
set P:= classic virgin;
param t:= 40;
param p:= classic 10
          virgin  15;
param r:= classic 40
          virgin  30;
param m:= classic 1000
          virgin   860;
```



```
## Data 3 for Example 02 - version 2
set P:= classic virgin;
param t:= 40;
param:              p  r   m:=
          classic 10 40 1000
          virgin  15 30  860;
```

Μεταβλητές και παράμετροι με 2 δείκτες

- Σε προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού εμφανίζονται μεταβλητές και παράμετροι με 2 ή περισσότερους δείκτες.
- Στην AMPL, στο μοντέλο οι μεταβλητές και οι παράμετροι παριστάνονται όπως και πριν με 2 ή περισσότερους δείκτες που χωρίζονται με κόμμα.
- Στην AMPL, στα δεδομένα, οι τιμές των παραμέτρων παριστάνονται σε πινακική μορφή.

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης.
- s_i: η προσφορά του σημείου i.
- d_j: η ζήτηση του σημείου j.
- c_{ij}: κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης.

Το πρόβλημα της μεταφοράς - Μοντελοποίηση

- x_{ij}: ποσότητα προς μεταφορά από το i στο j.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Δεδομένα προβλήματος μεταφοράς

- Τα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος φαίνονται στον πίνακα:

Αποθ. Καταστ.	HomeDepot	KMart	WalMart	Ace
Oakland	1	2	1	3
SanJose	3	5	1	4
Albany	2	2	2	2

c_{ij}

- Τα αποθέματα στις αποθήκες είναι

	Oakland	SanJose	Albany
Απόθεμα	250	800	760

s_i

- Οι ζητήσεις στα καταστήματα είναι

	HomeDepot	KMart	WalMart	Ace
Ζήτηση	300	320	800	390

d_j

Μοντελοποίηση με σύνολα στην AMPL

```
## Example 03 - version 2

set Warehouses;
set Shops;

param cost{i in Warehouses, j in Shops};
#transportation cost from warehouse i to shop j
param supply{i in Warehouses};
#supply at warehouse i
param demand{j in Shops};
#demand at shop j

var amount{i in Warehouses, j in Shops};
```

Μοντελοποίηση με σύνολα στην AMPL (συνέχεια)

```
minimize Cost:
sum{i in Warehouses, j in Shops}
  cost[i,j]*amount[i,j];

subject to Supply {i in Warehouses}:
sum{j in Shops} amount[i,j] <= supply[i];

subject to Demand {j in Shops}:
sum{i in Warehouses} amount[i,j] >= demand[j];

subject to positive{i in Warehouses, j in Shops}:
amount[i,j]>=0;
```

Μοντελοποίηση με συνολα στην AMPL (παρατηρήσεις)

- Κάθε παράμετρος και μεταβλητή έχουν περιγραφικά ονόματα.
- Οι παράμετροι και οι μεταβλητές με διπλούς δείκτες παριστάνονται όπως πριν, με τους δείκτες να χωρίζονται με κόμμα.
- Οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση ονομάζονται με τα ίδια ονόματα με κάποιες μεταβλητές, αλλά με κεφαλαίο το πρώτο γράμμα.

Δεδομένα με σύνολα στην AMPL

```
## Data 1 for Example 03 - version 2
set Warehouses:= Oakland SanJose Albany;
set Shops:= HomeDepot Kart Walart Ace;
param cost: HomeDepot Kart Walart Ace:=
Oakland          1         2          1         3
SanJose          3         5          1         4
Albany           2         2          2         2;
param supply:= Oakland      250
               SanJose      800
               Albany       760;
param demand:= HomeDepot    300
               Kart         320
               Walart       800
               Ace          390;
```

Δεδομένα με σύνολα στην AMPL (παρατηρήσεις)

- Τα δεδομένα αυτά πρέπει να σωθούν σε ένα αρχείο με επέκταση `.dat`.
- Παρατηρείστε πώς εισάγονται οι τιμές στην παράμετρο `cost`:
  Μετά το όνομα της παραμέτρου μπαίνει `:` και
  μετά το όνομα του τελευταίου δείκτη μπαίνει `:=`

Περιορισμοί ακεραιότητας στην AMPL

- Για να δηλώσουμε ότι μια μεταβλητή περιορίζεται να είναι ακέραιη, γράφουμε `integer` στην εντολή εισαγωγής της, μετά το όνομά της και πριν το `;`
- Π.χ.: Αν θέλουμε η μεταβλητή `x` να είναι ακέραια, την εισάγουμε γράφοντας:
  `var x integer;`
- Για να δηλώσουμε ότι μια μεταβλητή περιορίζεται να είναι δυαδική (0-1), γράφουμε `binary` στην εντολή εισαγωγής της, μετά το όνομά της και πριν το `;`
- Π.χ.: Αν θέλουμε η μεταβλητή `y` να είναι δυαδική, την εισάγουμε γράφοντας:
  `var y binary;`
- Πρέπει ο αλγόριθμος επίλυσης που επιλέγουμε (solver) να υποστηρίζει επίλυση με ακέραιες μεταβλητές.

Παραγωγή με ακέραιες ποσότητες

- Στο αρχικό παράδειγμα το ελαιόλαδο πωλείται σε συσκευασίες του λίτρου.
- Δεν έχει νόημα να παραχθεί μη-ακέραιος αριθμός συσκευασιών.
- Το π.γ.π. τώρα γίνεται:

$$\begin{aligned} \max \quad & 10Oil_c + 15Oil_v \\ \text{υπό} \quad & \tfrac{1}{40}Oil_c + \tfrac{1}{30}Oil_v \leq 40 \\ & 0 \leq Oil_c \leq 1000 \\ & 0 \leq Oil_v \leq 860 \\ & Oil_c, Oil_v \text{ ακέραιες.} \end{aligned}$$

Μοντέλο στην AMPL

```
## Example 04
## with integer variables
var Oil_c integer; # amount of classic
var Oil_v integer; # amount of virgin
maximize profit: 10*Oil_c + 15*Oil_v;
subject to time: (1/40)*Oil_c + (1/30)*Oil_v <= 40;
subject to classic_limit: 0 <= Oil_c <= 1000;
subject to virgin_limit: 0 <= Oil_v <= 860;
```

Πρόβλημα επιλογής εγκαταστάσεων

- Πρόβλημα επιλογής εγκαταστάσεων = Πρόβλημα μεταφοράς + Κόστη εγκατάστασης για τους σταθμούς αφετηρίας (αποθήκες) που θα αποφασιστεί να χρησιμοποιηθούν.
- Τα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος φαίνονται στον πίνακα:

Αποθ. Καταστ.	HomeDepot	KMart	WalMart	Ace
Oakland	1	2	1	3
SanJose	3	5	1	4
Albany	2	2	2	2

- Τα αποθέματα στις αποθήκες είναι

	Oakland	SanJose	Albany
Απόθεμα	550	1100	1060

Πρόβλημα επιλογής εγκαταστάσεων (συνέχεια)

- Οι ζητήσεις στα καταστήματα είναι

	HomeDepot	KMart	WalMart	Ace
Ζήτηση	300	320	800	390

- Τα κόστη εγκατάστασης (εκκίνησης) είναι

	Oakland	SanJose	Albany
Κόστος Εγκατάστ.	500	500	500

x_{ij} : ποσότητα που θα μεταφερθεί από την αποθήκη i στο καταστήμα j

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{υπό} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$y_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, αν χρησιμοποιείται η αποθήκη i
, αλλιώς

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i$$

κόστος χρησιμοποίησης αποθήκης i

υπό $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$

$x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

$y_i \in \{0, 1\}$ $i = 1, 2, \ldots, m$.

Μοντελοποίηση

- Για τη μοντελοποίηση χρησιμοποιούμε 0-1 μεταβλητές $open_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$open_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η αποθήκη } i \text{ χρησιμοποιηθεί,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- $open_i = 0 \Rightarrow amount_{ij} = 0$ για κάθε j.
  Αν η αποθήκη i δεν χρησιμοποιηθεί τότε δεν θα μεταφερθούν ποσότητες από αυτήν προς κανένα κατάστημα.
- Συνεπώς εισάγουμε τους περιορισμούς:

$$0 \leq amount_{ij} \leq supply_i \times open_i.$$

Μοντέλο στην AMPL

```
## Example 05

set Warehouses;
set Shops;

param cost{i in Warehouses, j in Shops};
#transportation cost from warehouse i to shop j
param supply{i in Warehouses};
#supply capacity at warehouse i
param demand{j in Shops};
#demand at shop j
param fixed_charge{i in Warehouses};
#cost of opening warehouse i
```

Μοντέλο στην AMPL (συνέχεια)

```
var amount{i in Warehouses, j in Shops};
var open{i in Warehouses} binary;
# = 1 if warehouse i is opened, 0 otherwise

minimize Cost:
sum{i in Warehouses, j in Shops}
cost[i,j]*amount[i,j]
+ sum{i in Warehouses} fixed_charge[i]*open[i];

subject to Supply {i in Warehouses}:
sum{j in Shops} amount[i,j] <= supply[i]*open[i];
subject to Demand {j in Shops}:
sum{i in Warehouses} amount[i,j] = demand[j];
subject to positive{i in Warehouses, j in Shops}:
amount[i,j]>=0;
```

Δεδομένα στην AMPL

```
## Data 1 for Example 05

set Warehouses:= Oakland SanJose Albany;
set Shops:= HomeDepot Kart Walart Ace;

param cost: HomeDepot Kart Walart Ace:=
  Oakland        1         2        1     3
  SanJose        3         5        1     4
  Albany         2         2        2     2;

param supply:=
  Oakland  550
  SanJose 1100
  Albany   1060;
```

Δεδομένα στην AMPL (συνέχεια)

```
param demand:=
  HomeDepot 300
  Kart      320
  Walart    800
  Ace         390;

param fixed_charge:=
  Oakland  500
  SanJose 500
  Albany   500;
```

Μη-γραμμικός προγραμματισμός και AMPL

- Η AMPL μπορεί να λύνει και προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού.
- Θα πρέπει να επιλεγεί αλγόριθμος επίλυσης (solver) που υποστηρίζει τη λύση τέτοιων προβλημάτων.
  Π.χ. ο solver `cplex` δεν υποστηρίζει επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων προγραμματισμού, ενώ ο `minos` υποστηρίζει.
  Οπότε θα πρέπει να δώσουμε την εντολή:

```
option solver minos;
```

- Η διαδικασία επίλυσης μπορεί να καταλήγει μόνο σε τοπικό ακρότατο ή σε κρίσιμο σημείο, οπότε τα αποτελέσματα πρέπει να χρησιμοποιούνται με προσοχή.

Παράδειγμα π.μ-γ.π.

- Μία εταιρεία παράγει 2 προϊόντα: P_1 και P_2.
- Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να φτιάξει μέχρι 250 κιλά από το P_1 και μέχρι 320 κιλά από το P_2.
- Για την παραγωγή αυτών των προϊόντων απαιτείται μια πρώτη ύλη. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_1 χρειάζονται 0.7 κιλά πρώτης ύλης, ενώ για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_2 χρειάζονται 0.4 κιλά πρώτης ύλης.
- Η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης είναι 200 κιλά.
- Η εταιρεία γνωρίζει ότι αν φτιάξει x_1 κιλά από το P_1, θα έχει κέρδος $x_1(300 - x_1)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας. Επίσης, αν φτιάξει x_2 κιλά από το P_2, θα έχει κέρδος $x_2(1000 - 3x_2)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας.
- Η εταιρεία θέλει να βρει τις ποσότητες (σε κιλά) που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Παράδειγμα π.μ-γ.π.

- x_1: ποσότητα προϊόντος P_1 που θα παραχθεί.
  x_2: ποσότητα προϊόντος P_2 που θα παραχθεί.
- Π.μ-γ.π.:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2) \\ \text{υπό} \quad & x_1 \leq 250 \\ & x_2 \leq 320 \\ & 0.7x_1 + 0.4x_2 \leq 200 \\ & x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Μοντελοποίηση στην AMPL

```
# Example 06

var amount_1;
var amount_2;

maximize profit : amount_1*(300-amount_1)
                  +amount_2*(1000-3*amount_2);

subject to material : 0.7*amount_1+0.4*amount_2<=200;
subject to limit_1: 0<=amount_1<=250;
subject to limit_2: 0<=amount_2<=320;
```

Επίλυση στην AMPL

```
option solver minos;
model Example06.mod;
solve;

display amount_1;
display amount_2;
```