Προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού

- Πρόβλημα (γραμ.) ακέραιου προγραμματισμού (π.α.π.) = π.γ.π. + Περιορισμός κάποιων μεταβλητών στους ακεραίους.
- Παράδειγμα π.α.π. :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{υπό} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. & & & & & & & & \\
 & x_i \text{ ακέραιος}, i \in I. & & & & & & & &
\end{array}
$$

Τεχνικές μοντελοποίησης

- Μοντελοποίηση δυαδικών αποφάσεων.
- Μοντελοποίηση εξαρτώμενων αποφάσεων.
- Μοντελοποίηση μεταβλητών με πεπερ. πλήθος τιμών.
- Μοντελοποίηση γραμμικών συναρτήσεων με άλματα.

Μοντελοποίηση δυαδικών αποφάσεων

- Για την μοντελοποίηση δυαδικών αποφάσεων (να κάνω το A ή να μην το κάνω)

$$x_A = \begin{cases} 1 & , \text{παίρνω την απόφαση να κάνω το } A \\ 0 & , \text{δεν κάνω το } A. \end{cases}$$

Μοντελοποίηση δυαδικών αποφάσεων

- Για την μοντελοποίηση δυαδικών αποφάσεων (να κάνω το A ή να μην το κάνω) εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές:

$$x_A = \begin{cases} 1, & \text{αν ληφθεί η απόφαση } A \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παράδειγμα - Δυαδικές αποφάσεις

- Επέκταση κατασκευαστικής εταιρείας.
- Κτίσιμο νέων εργοστασίων, αποθηκών σε Αθήνα/Θεσ.
- Αποφάσεις - Απαιτούμενα κεφάλαια - Αποδόσεις:

α/α	Απόφαση	Απαιτ. κεφάλαιο	Απόδοση
1	Εργοστ. Αθήνα	6 εκατ.	9 εκατ.
2	Εργοστ. Θεσ.	3 εκατ.	5 εκατ.
3	Αποθ. Αθήνα	5 εκατ.	6 εκατ.
4	Αποθ. Θεσ.	2 εκατ.	4 εκατ.

- Διαθέσιμο κεφάλαιο: 10 εκατ.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση απόδοσης.

$x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν πάρω την απόφαση } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\max \; 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$
υπό
$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$
$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,4$$

Παράδειγμα - Δυαδικές αποφάσεις

- Δεδομένα: Διαθέσιμο κεφάλαιο 10 εκατ.
  Αποφάσεις - Απαιτούμενα κεφάλαια - Αποδόσεις:

α/α	Απόφαση	Απαιτ. κεφάλαιο	Απόδοση
1	Εργοστ. Αθήνα	6 εκατ.	9 εκατ.
2	Εργοστ. Θεσ.	3 εκατ.	5 εκατ.
3	Αποθ. Αθήνα	5 εκατ.	6 εκατ.
4	Αποθ. Θεσ.	2 εκατ.	4 εκατ.

- Μεταβλητές αποφάσεων:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν ληφθεί η απόφαση } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

Παράδειγμα - Δυαδικές αποφάσεις

- Δεδομένα: Διαθέσιμο κεφάλαιο 10 εκατ.
  Αποφάσεις - Απαιτούμενα κεφάλαια - Αποδόσεις:

α/α	Απόφαση	Απαιτ. κεφάλαιο	Απόδοση
1	Εργοστ. Αθήνα	6 εκατ.	9 εκατ.
2	Εργοστ. Θεσ.	3 εκατ.	5 εκατ.
3	Αποθ. Αθήνα	5 εκατ.	6 εκατ.
4	Αποθ. Θεσ.	2 εκατ.	4 εκατ.

- Π.α.π.:

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{υπό} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Μοντελοποίηση εξαρτώμενων αποφάσεων I

- Για τη μοντελοποίηση δυο δυαδικών αποφάσεων έχουν εισαχθεί οι μεταβλητές x_A και x_B.
- Αν η απόφαση A επιτρέπεται να λήφθει μόνο αν ληφθεί η απόφαση B

$x_A \leq x_B$ → Αν $x_B = 1$, τότε $x_A \leq 1 \Rightarrow x_A = 0$ ή $x_A = 1$

↳ Αν $x_B = 0$, τότε $x_A \leq 0 \Rightarrow x_A = 0$

Μοντελοποίηση εξαρτώμενων αποφάσεων I

- Για τη μοντελοποίηση δυο δυαδικών αποφάσεων έχουν εισαχθεί οι μεταβλητές x_A και x_B.
- Αν η απόφαση A επιτρέπεται να λήφθει μόνο αν ληφθεί η απόφαση B τότε εισάγουμε τον περιορισμό

$$x_A \leq x_B.$$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις Ι

- Πρόβλημα επέκτασης κατασκευαστικής εταιρείας με τα ίδια δεδομένα.
- Επιπλέον περιορισμός: Η κατασκευή αποθήκης σε μια πόλη είναι δυνατή μόνο αν κατασκευαστεί σε αυτήν εργοστάσιο.
- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Κατασκευή εργοστασίου στην Αθήνα.
  x_2: Κατασκευή εργοστασίου στη Θεσσαλονίκη.
  x_3: Κατασκευή αποθήκης στην Αθήνα.
  x_4: Κατασκευή αποθήκης στη Θεσσαλονίκη.

$$\max \; 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

υπό

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$

$$x_3 \le x_1$$

$$x_4 \le x_2$$

$$x_i \in \{0,1\}, \; i = 1,2,3,4.$$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις I

- Πρόβλημα επέκτασης κατασκευαστικής εταιρείας με τα ίδια δεδομένα.
- Επιπλέον περιορισμός: Η κατασκευή αποθήκης σε μια πόλη είναι δυνατή μόνο αν κατασκευαστεί σε αυτήν εργοστάσιο.
- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Κατασκευή εργοστασίου στην Αθήνα.
  x_2: Κατασκευή εργοστασίου στη Θεσσαλονίκη.
  x_3: Κατασκευή αποθήκης στην Αθήνα.
  x_4: Κατασκευή αποθήκης στη Θεσσαλονίκη.
- Επιπλέον περιορισμοί:

$$\begin{aligned} x_3 &\leq x_1 \\ x_4 &\leq x_2. \end{aligned}$$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις I

- Νέο π.α.π. :

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{υπό} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_3 \leq x_1 \\ & x_4 \leq x_2 \\ & x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Μοντελοποίηση εξαρτώμενων αποφάσεων II

- Για τη μοντελοποίηση δυο δυαδικών αποφάσεων έχουν εισαχθεί οι μεταβλητές x_A και x_B.
- Αν το πολύ μία από τις αποφάσεις A, B επιτρέπεται να λήφθει

$$x_A + x_B \leq 1$$

Μοντελοποίηση εξαρτώμενων αποφάσεων II

- Για τη μοντελοποίηση δυο δυαδικών αποφάσεων έχουν εισαχθεί οι μεταβλητές x_A και x_B.
- Αν το πολύ μία από τις αποφάσεις A, B επιτρέπεται να λήφθει τότε εισάγουμε τον περιορισμό

$$x_A + x_B \leq 1.$$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις II

- Πρόβλημα επέκτασης κατασκευαστικής εταιρείας με τα ίδια δεδομένα.
- Επιπλέον περιορισμός: Το πολύ μια αποθήκη μπορεί να κτιστεί.
- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Κατασκευή εργοστασίου στην Αθήνα.
  x_2: Κατασκευή εργοστασίου στη Θεσσαλονίκη.
  x_3: Κατασκευή αποθήκης στην Αθήνα.
  x_4: Κατασκευή αποθήκης στη Θεσσαλονίκη.

$x_3 + x_4 \leq 1$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις II

- Πρόβλημα επέκτασης κατασκευαστικής εταιρείας με τα ίδια δεδομένα.
- Επιπλέον περιορισμός: Το πολύ μια αποθήκη μπορεί να κτιστεί.
- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Κατασκευή εργοστασίου στην Αθήνα.
  x_2: Κατασκευή εργοστασίου στη Θεσσαλονίκη.
  x_3: Κατασκευή αποθήκης στην Αθήνα.
  x_4: Κατασκευή αποθήκης στη Θεσσαλονίκη.
- Επιπλέον περιορισμός:

$$x_3 + x_4 \leq 1.$$

Παράδειγμα - Εξαρτώμενες αποφάσεις II

- Νέο π.α.π. :

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{υπό} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Μοντελοποίηση μεταβλ. με πεπερ. πλήθος τιμών

$x \in \{1, \sqrt{2}, \frac{7}{4}\}$

- Έστω μεταβλητή x με πεπερασμένο πλήθος δυνητικών τιμών από το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

$x \in \{1, \sqrt{2}, \frac{7}{4}\}$

$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ πάρει την τιμή } 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ πάρει την τιμή } \sqrt{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$x_3 = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ πάρει την τιμή } \frac{7}{4} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$x = 1 \cdot x_1 + \sqrt{2} \cdot x_2 + \frac{7}{4} x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

Μοντελοποίηση μεταβλ. με πεπερ. πλήθος τιμών

- Έστω μεταβλητή x με πεπερασμένο πλήθος δυνητικών τιμών από το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
- Εισάγουμε μεταβλητές y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ και τους περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
& x = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \\
& \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\
& y_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Μοντελοποίηση γραμ. συναρτήσεων με άλματα

- Σε διαδ. παραγωγής συχνά υπάρχουν κόστη εκκίνησης.
- Σε προβλήματα μεταφοράς συχνά υπάρχουν πάγια κόστη.
- Αν x είναι η ποσότητα παραγωγής ή η ποσότητα προς μεταφορά, το αντίστοιχο κόστος είναι συχνά

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ K + cx & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

- Τέτοιες συναρτήσεις μοντελοποιούνται με χρήση δυαδικών μεταβλητών.

Έστω ότι θέλω να εξαιρεθούν το κόστος παραγωγής

$$c(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ K + c \cdot x & , x > 0 \end{cases}$$

Έστω ότι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί είναι M.

Ορίζω μια δυαδική μεταβλητή απόφασης

$$y = \begin{cases} 1 & , \text{αν ξεκινάει η παραγωγή} \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μόνο αν ξεκινάει η παραγωγή θα επιτρέπεται να παράξω θετική ποσότητα.

x = ποσότητα που θα παράξω

$$\min \; Ky + c \cdot x$$

υπό

$$x \le M \cdot y \quad ?$$

$$y \in \{0,1\}$$

$$x \ge 0$$

+ υπόλοιπους περιορισμούς

Μοντελοποίηση γραμ. συναρτήσεων με άλματα

- Θέτουμε

$$\begin{array}{ll} \min & Ky + cx \\ \text{υπό} & x \leq My \\ & x \geq 0 \\ & y \in \{0, 1\}, \end{array}$$

όπου M κάποιος μεγάλος αριθμός (πρακτικά κάποιο άνω φράγμα που γνωρίζουμε για το x).

- Η ιδέα γενικεύεται αν έχουμε πολλές μεταβλητές και πολλά είδη κόστους εκκίνησης.

Εφαρμογές τεχνικών μοντελοποίησης

- Το πρόβλημα του σακιδίου.
- Το πρόβλημα ανάθεσης.
- Το πρόβλημα επιλογής τοποθεσίας εγκαταστάσεων.

Το πρόβλημα του σακιδίου

- n αντικείμενα. δείκτης $j = 1, 2, \ldots, n$
- w_j: βάρος του αντικειμένου j.
- c_j: χρησιμότητα (αξία) του αντικειμένου j.
- k: μέγιστο επιτρεπόμενο βάρος.
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων ώστε να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητα.

Μεταβλητές απόφασης:

$x_j = \begin{cases} 0, & \text{αν δεν επιλέγω το αντικείμενο } j \\ 1, & \text{αν επιλέγω το αντικείμενο } j \end{cases}$, $j = 1, \ldots, n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le k$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Το πρόβλημα του σακιδίου

- n αντικείμενα.
- w_j: βάρος του αντικειμένου j.
- c_j: χρησιμότητα (αξία) του αντικειμένου j.
- k: μέγιστο επιτρεπόμενο βάρος.
- Στόχος: Επιλογή αντικειμένων ώστε να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητα.
- Μεταβλητές αποφάσεων:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν το } j \text{ επιλεγεί,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Π.α.π.:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq k \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα της ανάθεσης

- m άτομα: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, m εργασίες: $B_1, B_2, \ldots, B_m$.
- Ακριβώς ένα άτομο για κάθε εργασία.
- r_{ij}: Απόδοση του ατόμου A_i στην εργασία B_j.
- Στόχος: Ανάθεση εργασιών για μέγιστη απόδοση.

$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } A_i \text{ πάρει την εργασία } B_j \\ 0, & \text{>> δεν >> >> >> >> >>} \end{cases}$

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} x_{ij}$$

υπό $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (κάθε άτομο έχει πάρει ακριβώς 1 εργασία)

εργασιών που αναθέτουμε στον A_i

ατόμων που έχει αναθέσει η B_j $= \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (κάθε εργασία έχει ανατεθεί σε ακριβώς 1 άτομο)

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$

Το πρόβλημα της ανάθεσης

- m άτομα: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, m εργασίες: $B_1, B_2, \ldots, B_m$.
- Ακριβώς ένα άτομο για κάθε εργασία.
- r_{ij}: Απόδοση του ατόμου A_i στην εργασία B_j.
- Στόχος: Ανάθεση εργασιών για μέγιστη απόδοση.
- Μεταβλητές αποφάσεων:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } A_i \text{ ασχοληθεί με την } B_j \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το πρόβλημα της ανάθεσης

- m άτομα: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, m εργασίες: $B_1, B_2, \ldots, B_m$.
- Ακριβώς ένα άτομο για κάθε εργασία.
- r_{ij}: Απόδοση του ατόμου A_i στην εργασία B_j.
- Στόχος: Ανάθεση εργασιών για μέγιστη απόδοση.
- Μεταβλητές αποφάσεων:

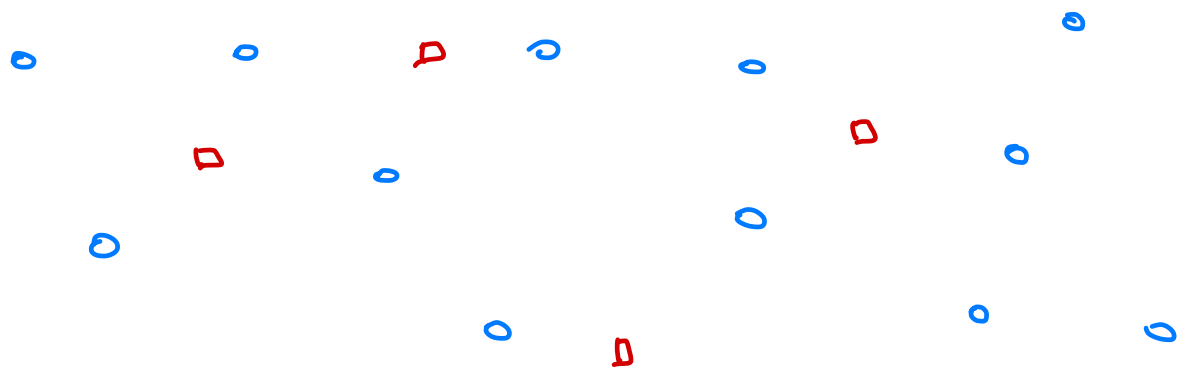
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } A_i \text{ ασχοληθεί με την } B_j \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Π.α.π.:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} x_{ij} \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ j = 1, 2, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα επιλογής τοποθεσίας εγκαταστάσεων

- n δυνατές τοποθεσίες παροχής υπηρεσιών. Σείστης $j = 1, 2, \ldots, n$
- m πελάτες., Σείστης $i = 1, 2, \ldots, m$
- c_j: Κόστος εγκατάστασης παρόχου υπηρεσιών στην τοποθεσία j.
- d_{ij}: Κόστος ανάθεσης πελάτη i στον πάροχο j.
- Στόχος: Επιλογή τοποθεσιών για εγκατάσταση παρόχων υπηρεσιών και ανάθεση κάθε πελάτη σε έναν πάροχο, με ελάχιστο δυνατό κόστος.



Μεταβλητές απόφασης:

$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν εγκαθίσταται πάροχος στην τοποθεσία } j \\ 0, & \text{αν δεν εγκαθίσταται } \gg \gg \gg \gg \end{cases}$, $j = 1, \dots, n$

$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ανατίθεται το τμήμα } i \text{ στον πάροχο } j \\ 0, & \text{αν δεν ανατίθεται } \gg \gg \gg \gg \gg \gg \end{cases}$,

$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j}_{\text{κόστος εγκατάστασης}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, y_{ij}}_{\text{κόστος ανάθεσης}}$$

υπό

$$y_{ij} \le x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

2ος τρόπος

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j}_{\text{κόστος εγκατάστασης}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\, y_{ij}}_{\text{κόστος ανάθεσης}}$$

υπό

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \le m \cdot x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Το πρόβλημα επιλογής τοποθεσίας εγκαταστάσεων

- n δυνατές τοποθεσίες παροχής υπηρεσιών.
- m πελάτες.
- c_j: Κόστος εγκατάστασης παρόχου υπηρεσιών στην τοποθεσία j.
- d_{ij}: Κόστος ανάθεσης πελάτη i στον πάροχο j.
- Στόχος: Επιλογή τοποθεσιών για εγκατάσταση παρόχων υπηρεσιών και ανάθεση κάθε πελάτη σε έναν πάροχο, με ελάχιστο δυνατό κόστος.
- Μεταβλητές αποφάσεων:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{αν η } j \text{ τοποθεσία χρησιμοποιηθεί για πάροχο} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν ο πελάτης } i \text{ ανατεθεί στον πάροχο } j \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το πρόβλημα επιλογής τοποθεσίας εγκαταστάσεων

- Η κλασική μοντελοποίηση Facility Location (FL) - Π.α.π.:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_{ij} \leq y_j,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n \\
& y_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της επιλογής τοποθεσίας εγκαταστάσεων

- Η εναλλακτική μοντελοποίηση Aggregate Facility Location (AFL) - Π.α.π.:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n \\
& y_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$