

Άσκηση 1

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 3x_2 \\ \text{υπό} \quad & 5x_1 + 1x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το αρχικό λείψνο είναι

$$J = 0 \quad \boxed{+3x_1} + 3x_2$$

Εφαρμόζουμε $\checkmark \Rightarrow$ Simplex
"βελτιστώντας" x

$$\boxed{w_1} = 5 \quad \boxed{-5x_1} - 1x_2 \rightarrow \text{μνδ. για } x_1 = \frac{5}{5}$$

$$w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{μνδ. για } x_1 = \frac{6}{2}$$

H x_1 μπαίνει στη βάση.

H w_1 θα γίνει από τη βάση ($\min \{\frac{5}{5}, \frac{6}{2}\} = \frac{5}{5}$)

Επόμενο λείψνο:

$$J = 3 \quad -\frac{3}{5}w_1 \quad \boxed{+\frac{12}{5}x_2}$$

$$x_1 = 1 \quad -\frac{1}{5}w_1 - \frac{1}{5}x_2 \rightarrow \text{μνδ. για } x_2 = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

$$\boxed{w_2} = 4 \quad +\frac{2}{5}w_1 \quad \boxed{-\frac{13}{5}x_2} \rightarrow \text{μνδ. για } x_2 = \frac{4}{\frac{13}{5}} = \frac{20}{13}$$

Το λείψνο δεν είναι βέλτιστο.

H x_2 μπαίνει στη βάση.

H w_2 θα γίνει από τη βάση ($\min \{5, \frac{20}{13}\} = \frac{20}{13}$)

Επόμενο λείψνο:

$$J = \frac{87}{13} - \frac{3}{13}w_1 - \frac{12}{13}w_2$$

$$x_1 = \frac{9}{13} - \frac{3}{13}w_1 + \frac{1}{13}w_2$$

$$x_2 = \frac{20}{13} + \frac{2}{13}w_1 - \frac{5}{13}w_2$$

Το λείψνο είναι βέλτιστο.

Βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (\frac{9}{13}, \frac{20}{13}, 0, 0)$.

Βέλτιστη τιμή α.ε. $J^* = \frac{87}{13}$

Το δίδιο πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*) = (\frac{3}{13}, \frac{12}{13}, 0, 0) \quad \text{με } J^* = \frac{87}{13}$$

Άσκηση 2

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{υπό} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το αρχικό ζήτημα είναι

$$J = 0 \boxed{+1x_1} + 2x_2$$

$$w_1 = 3 + 3x_1 - x_2 \nearrow$$

$$\boxed{w_2} = 4 \textcircled{-1}x_1 + 4x_2 \rightarrow$$

Εφικτότητα ✓
"θελαιψυχία" x } $\Rightarrow$ Simplex

H x_1 μπαίνει στη βάση.

H w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$J = 4 \quad -1w_2 + 6x_2$$

$$w_1 = 17 \quad -3w_2 + 11x_2$$

$$x_1 = 4 \quad -1w_2 + 4x_2$$

Το x_2 έχει θετικό συντελεστή στην α.ε. και μη-αρνητικούς συντελεστές στους περιορισμούς. Άρα, το πρόβλημα είναι μη-φραγμένο.

Το ζήτημα είναι μη-εφικτό

Άσκηση 3

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{υπό} \quad & -3x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\begin{aligned} J &= 0 \quad \boxed{-2x_1} - 3x_2 \\ \boxed{w_1} &= -3 \quad \boxed{+3x_1} - x_2 \\ w_2 &= 2 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

επιμερώμενα X } $\Rightarrow$
"βελτιστοποιή" V }
Διάνη μέθοδο Simplex

Η w_1 βγαίνει από τη βάση ($-3 < 0$).

Η x_1 μένει στη βάση.

Το επόμενο λεξικό είναι

$$\begin{aligned} J &= -2 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{11}{3}x_2 \\ x_1 &= 1 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ w_2 &= 1 - \frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}x_2 \end{aligned}$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη λύση είναι $(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (1, 0, 0, 1)$.

Η βέλτιστη τιμή της α.ε είναι $J^* = -2$.

Το δυνάμει πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*) = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{11}{3}\right) \text{ με } J^* = -2.$$

Άσκηση Α

$$\max -x_1 - 3x_2$$

$$\text{υπό } -3x_1 + x_2 \leq -3$$

$$4x_1 - x_2 \leq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το αρχικό πρόβλημα είναι

$$J = 0 \quad \boxed{-x_1} - 3x_2$$

$$\boxed{w_1} = -3 \quad \boxed{+3x_1} - x_2$$

$$w_2 = -4 - 4x_1 + x_2$$

"βελτιστοποίηση"
εφικτότητα x } $\Rightarrow$ Δοκίμια μέθοδος
Simplex

Η w_1 βγαίνει από τη βάση. ($-3 < 0$)

Το x_1 μπαίνει στη βάση.

$$J = -1 - \frac{1}{3}w_1 - \frac{10}{3}x_2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}x_2$$

$$w_2 = -8 - \frac{4}{3}w_1 - \frac{1}{3}x_2$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Δεν υπάρχει υποσυνολική μεταβλητή για να μπει στη βάση (οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στον 2ο περιορισμό είναι < 0).

Το πρόβλημα είναι μη-εφικτό.

Το σύστημα είναι μη-γραμμικό, διότι το τελευταίο μέλος του συστήματος θα είναι το αντίθετο-αντίστροφο του τελευταίου μέλους το πρώτου.

$$-J = 1 - 1z_1 + 8y_2$$

$$y_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z_1 + \frac{4}{3}y_2$$

$$z_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}y_2 \quad \text{το οποίο είναι μη-γραμμικό.}$$

Άσκηση 5

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\ \text{υπό} \quad & -3x_1 + 2x_2 \leq -6 \\ & 3x_1 - 1x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\underline{J = 0 - x_1 + 2x_2}$$

$$w_1 = -6 + 3x_1 - 2x_2$$

$$w_2 = -3 - 3x_1 + 1x_2$$

Επιλύουμε X
"βελτιστοποιούμε" X } $\Rightarrow$

Διυική μέθοδο Simplex σε
τροποποιημένο
με νέα αρχι-επιμενική
συνάρτηση

$$J' = 0 - 1x_1 - 1x_2$$

Το τροποποιημένο πρόβλημα είναι

$$\underline{J' = 0 - 1x_1 - 1x_2}$$

$$\underline{w_1 = -6 + 3x_1 - 2x_2}$$

$$w_2 = -3 - 3x_1 + 1x_2$$

Κάνω διυική μέθοδο Simplex.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η x_1 μπαίνει στη βάση.

$$\underline{J' = -2 - \frac{1}{3}w_1 - \frac{5}{3}x_2}$$

$$x_1 = 2 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{2}{3}x_2$$

$$w_2 = -9 - 1w_1 - 1x_2$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Δεν υπάρχει μη-θετική μεταβλητή που μπορεί να
μπαει στη βάση (όλα οι συντελεστές στο $Q \equiv$
περιορισμός είναι < 0).

Άρα το τροποποιημένο πρόβλημα είναι μη-
επιλυτό. Οπότε και το αρχικό πρόβλημα είναι
μη-επιλυτό.

Το δοθέν πρόβλημα είναι μη-επιλυτό ή μη-φραγμένο.

Άσκηση 6

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$

$$\text{υπό} \quad -1x_1 + 2x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\underline{J = 0 + 3x_1 - 1x_2}$$

$$w_1 = -2 + 1x_1 - 2x_2$$

$$w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2$$

"βελτιστοποίηση" $\times$ $\Rightarrow$
επιμέτρηση $\times$

Αυτή μέθοδος Simplex σε
τροποποιημένο με αντικειμε-
νική συνάρτηση
 $J' = 0 - 1x_1 - 1x_2$

Το τροποποιημένο λεξικό είναι

$$\underline{J' = 0 \boxed{-1x_1} - 1x_2}$$

$$\boxed{w_1} = -2 \textcircled{+1}x_1 - 2x_2$$

$$w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2$$

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η x_2 μπαίνει στη βάση.

$$\underline{J' = -2 \quad -1w_1 \quad -3x_2}$$

$$x_1 = 2 + 1w_1 + 2x_2$$

$$w_2 = 2 - 2w_1 - 7x_2$$

Το τελευταίο λεξικό του τροποποιημένου είναι
βέλτιστο. Ελεγχτρέψω στο αρχικό λεξικό. Η
αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$J = 0 + 3x_1 - 1x_2 = 0 + 3(2 + 1w_1 + 2x_2) - 1x_2 = \\ 6 + 3w_1 + 5x_2$$

$$\underline{J = 6 + 3w_2 + 5x_2}$$

$$x_2 = 2 + 1w_2 + 2x_2$$

$$\boxed{w_2} = 2 - 2w_2 - 7x_2$$

Συνεχίζουμε με μέθοδο Simplex.

H x_2 μπορεί να βγει.

H w_2 μπορεί να βγει.

$$\underline{J = \frac{52}{7} + \frac{11}{7}w_1 - \frac{5}{7}w_2}$$

$$x_1 = \frac{18}{7} + \frac{3}{7}w_1 - \frac{2}{7}w_2$$

$$\boxed{x_2} = \frac{2}{7} - \frac{2}{7}w_1 - \frac{1}{7}w_2$$

H w_2 μπορεί να βγει.

H x_2 μπορεί να βγει.

$$\underline{J = 9 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{3}{2}w_2}$$

$$x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}w_2$$

$$w_1 = 1 - \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}w_2$$

Το z είναι βέλτεστο.

H βέλτεστη β.ε.2. είναι

$$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (3, 0, 1, 0)$$

και η βέλτεστη τιμή της α.ε. είναι $J^* = 9$

Το z είναι πρόβλημα έχει βέλτεστη τιμή

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*) = (0, \frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2}) \text{ με } J^* = 9$$

Γενικά

(Ασκήση 1)

Εφικότητα ✓
"βεβαιότητα" X } $\Rightarrow$ Simplex $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{βέλιση β.ε.λ} \\ \text{μη-εφικτό} \end{cases}$ (Ασκήση 2)

Εφικότητα X
"βεβαιότητα" ✓ } $\Rightarrow$ Δικύβη μέθοδος Simplex $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{βέλιση β.ε.λ} \\ \text{μη-εφικτό} \end{cases}$ (Ασκήση 3)
(Ασκήση 4)

Π.Χ.

$$J = 5 - 5x_1 - 3x_2$$

$$\overline{W_1} = -3 \quad -1x_1 \quad -2x_2$$

$$W_2 = 2 \quad +1x_1 \quad -2x_2$$

Εφικότητα X
"βεβαιότητα" X } $\Rightarrow$ Δικύβη μέθοδος Simplex σε
τροποποιημένο

Το τροποποιημένο
έχει βέλιση β.ε.λ.

$\Downarrow$

και το αρχικό έχει
την ίδια εφικότητα.
Εισαγωγή στο αρχικό
πρόβλημα και επίλυση
με Simplex.

(Ασκήση 5)

Το τροποποιημένο
είναι μη-εφικτό

$\Downarrow$

το αρχικό είναι
μη-εφικτό

(Ασκήση 5)